Note

林杰 07300190016

谐振腔 TM 模式下波场的分布，简单地看，无非就是沿着 z 方向传播的两组方向相反的波的叠加。

$$B_z = B_{0z}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{i(k_g z-\omega t)} + B_{0z}^{'}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{i(-k_g z-\omega t)}$$

因为 z=0, z=d 处要满足边界条件，不能有法向磁场，因此有：

$$B_{0z}' = -B_{0z}, k_g = \frac{p\pi}{d};$$

相应地，可以根据这两组方向相反的电磁波的，分别求出对应 x, y 方向的电场和磁场, 再将两者叠加起来，便是最终的结果。

$$B_z = 2iB_{0z}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{p\pi}{d}z)e^{-i\omega t}$$

根据，易得：

$$E_x = \frac{ick_0}{k_c^2}\frac{\partial B_z^+}{\partial y}e^{i(k_g z-\omega t)} + \frac{ick_0}{k_c^2}\frac{\partial B_z^-}{\partial y}e^{i(-k_g z-\omega t)}$$

$$= \frac{2ck_0}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}B_{0z}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{p\pi}{d}z)e^{-i\omega t}$$

同理，可以求出，其余方向的电磁场，此处不再另写。

至于简并度的问题，如果是最一般的情况，也就是 a, b, d 各不相等，则问题相当复杂，涉及到 a, b, d 是否可以相互整除的问题，问题变成了一个非常复杂的纯数学问题。在这里，简单起见，我们考虑频

率非常大的情形。

事实上，根据频率的表达式：

$$\omega = c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}$$

我们可以类比相空间的方法，首先，一种波失模式所对应相空间体积为$\frac{\pi}{a}\times\frac{\pi}{b}\times\frac{\pi}{d}=\frac{\pi^3}{V}$，因此，可以认为波矢模式总数为，

$$N=\frac{4\pi k^3}{3}/\frac{\pi^3}{V}$$

化成频率本身表达式：

$$N=\frac{4\pi\omega^3}{3c^3}/\frac{\pi^3}{V}$$

可以想象，同一球面上对应的共振频率是一致的，因此，

$$D(\omega)=\frac{4\pi\omega^2}{c^3}/\frac{\pi^3}{V}$$

其中$\Delta\omega$我们可以取成$\frac{\pi c}{(abc)^{1/3}}$，代入上式：

$$D(\omega)=\frac{4\pi\omega^2}{c^3}/\frac{\pi^3}{V}*\frac{\pi c}{(abc)^{1/3}}=\frac{4\pi\omega^2}{c^2}V^{2/3},$$

当然，这只对频率很大时才适用？（事实上，朗道也是这么计算的）

事实上，参数 m,n,p 最多只能有一个为零，如果两个为零，对于

TE 波来说，则只会有一个方向的磁场非零，其余磁场和电场都为零。不妨设 z 方向磁场为零。这样的场分布显然是不能够存在的。z 方向交变的磁场根据法拉第定律显然是会激发 xy 平面的电场，单独存在变化磁场是不可能的。那么，谐振腔电磁场表达式我们是从 Maxwell 方程推出的，为什么会前后矛盾呢？问题就在于，这里有

$$k_c^2 = k_0^2 - k_z^2 = 0$$

因此我们有

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} = 0$$

原本的三维方程化为平面方程，显然对于 TE 波，边界条件要求:

$$\frac{\partial B_z}{\partial n} = 0 \,|\, \text{在边界上}$$

因此可以得出：

$$B_z = const$$

显然，这与先前得出磁场是随时间变化的相矛盾！

同样，对于 TM 波，考虑位移电流的话，显然也是不允许存在两个以上参数同时为零的。