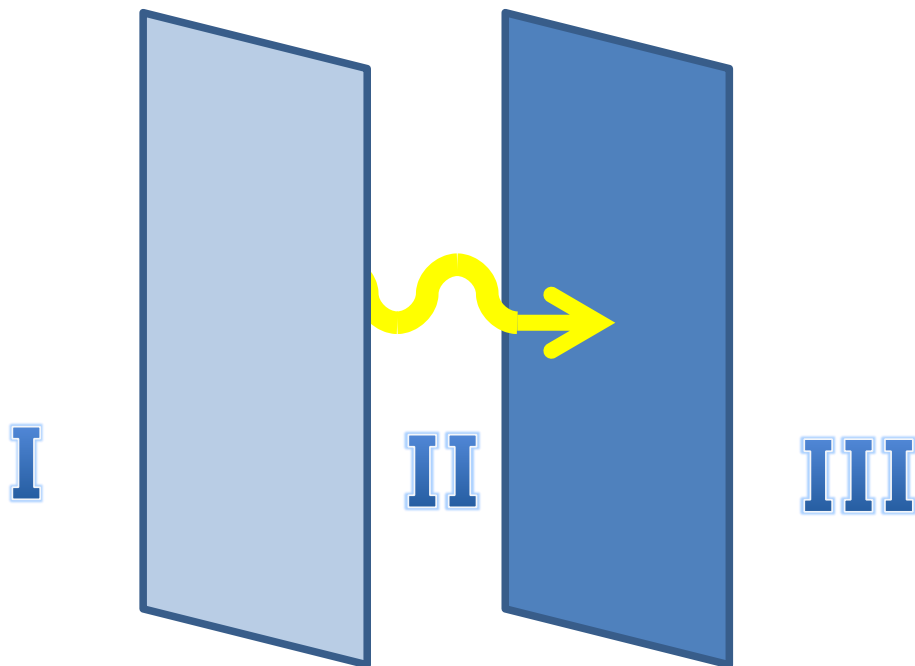


真空中两极板之间的吸引力

程恋茜

07300190091@fudan.edu.cn

1.问题的说明



↑如图，真空中有一对不带电的金属板，间距为 d_0 ，靠得很近，所以可以认为是无穷大的。

同时，极板将空间分为三个部分。

I, III：一侧边界为无穷远，另一侧为金属板。

II：两侧边界均为金属板。

有理论指出，在真空中，这两个金属板之间也会存在吸引力的作用。

下面从经典电动力学的角度尝试求解。

2.无限大谐振腔的截止频率

这三个部分可以认为是三个谐振腔。

$$a \rightarrow \infty$$

$$b \rightarrow \infty$$

对于谐振腔 I, III :

$$d \rightarrow \infty$$

所以截止频率为 $\omega = c\pi \times \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2} = 0$

$$a \rightarrow \infty$$

$$b \rightarrow \infty$$

对于谐振腔 II :

$$d \rightarrow d_0$$

从课件中的谐振腔内场分布 (9.3.6) 式 :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{0x} = -2iB_0 \frac{m\pi}{a} \frac{k_g}{k_c^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ B_{0y} = -2iB_0 \frac{n\pi}{b} \frac{k_g}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ B_{0z} = 2iB_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_{0x} = 2B_0 \frac{n\pi}{b} \frac{ck_0}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_{0y} = -2B_0 \frac{m\pi}{a} \frac{ck_0}{k_c^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) \\ E_z = 0 \end{array} \right. \quad (9.3.6)$$

$$a \rightarrow \infty$$

可以看到在 $b \rightarrow \infty$ 时，因为 Sin 函数内宗量趋向于 0，所以

$B_{0x}, B_{0y}, E_{0x}, E_{0y}$ 均为 0，此时仅有 B 的 z 方向分量 $B_{0z} = 2iB_0 \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right)$

不为零。

所以最低模式中 $p=1$

故截止频率为 $\omega = c\pi\left(\frac{1}{d}\right)$

结论：在无限大谐振腔中 (I, III 区)，谐振腔没有截止频率，在一个方向有限，另两个方向无限的谐振腔中，截止频率为 $\omega = c\pi\left(\frac{1}{d}\right)$ ，并且 E, B 六个分量中只有 B 的 z 方向分量 $B_{0z} = 2iB_0 \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right)$ 不为零。

3.金属板作用力

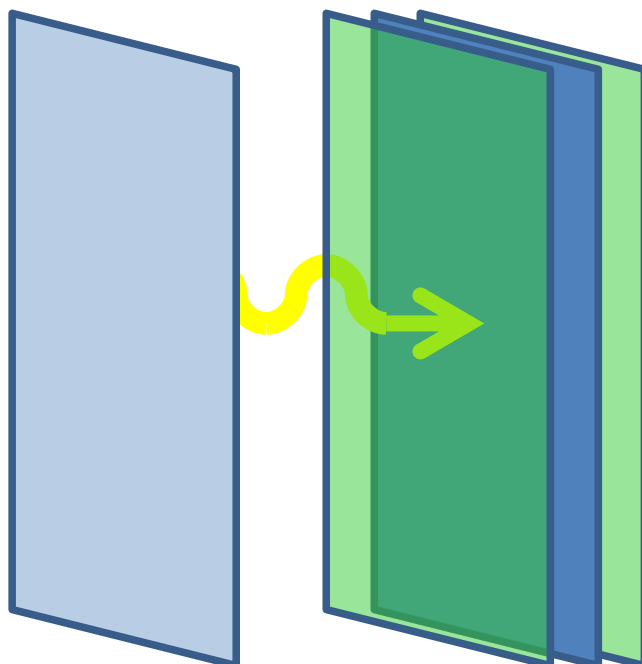
现在，求金属板之间的作用力。

从量子力学中可以知道，真空并不是真正的空，其中存在有基态的电磁波。将来自此的扰动作为激发，在谐振腔 II 中会产生一个模式，通过 2 中推导，取最低模式 $p=1$ ，此模式 E, B 六个分量中只有 B 的 z 方向分量 $B_{0z} = 2iB_0 \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right)$ 不为零。在谐振腔 I, III 中，通过 2 中推导，不存在非零的电磁波模式。

所以，通过此场分布可以计算出金属板的受力。

用封闭面包围一个金属板，忽略边界效应，金属板边界无场，所

以未将金属板四边处封闭面画出。



在绿色界面上研究绿色面内金属板的受力。

$$\text{由 } \vec{T} = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) \vec{I} - \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}\vec{B}$$

$$\text{右侧绿色面： } \vec{f} = -\vec{e}_n \cdot \vec{T} = 0$$

左侧绿色面：

$$\vec{f} = -\vec{e}_n \cdot \vec{T} = -(0 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\mu_0} B_{0z}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\mu_0} B_{0z}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\mu_0} B_{0z}^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \frac{1}{2\mu_0} B_{0z}^2 \vec{1}$$

¹ 计算中未计入时间因子，因为在取模平方过程中，时间因子会被消掉。

$$\text{代入 } B_{0z} = 2iB_0 \sin\left(\frac{\pi}{d}z\right)$$

$$\text{易知, } \vec{f} = \frac{1}{2\mu_0} \left| 2B_0 i \sin\left(\frac{\pi}{d}z\right) \right|^2 = \frac{2B_0^2}{\mu_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{d}z\right)$$

这个力方向指向另一金属板。

4.Comment

在之前的推导中,我们用经典电动力学定性推导出了真空中两块不带电的金属板之间有相互吸引作用力的事实。

用到的知识很简单,仅为 Maxwell 张量和谐振腔。

谐振腔部分中,场的分布是由矩形谐振腔的结论推广到无穷大之后得出的。对于这部分,在推导之后甚感于对谐振腔方面知识仍不够了解,也激发了我选修下学期《高等电动力学》的渴望。我在谐振腔部分的推导并非足够严谨,甚至可能有错误。当然,严格的求解要借助于量子力学及量子电动力学²。

在这篇 NOTE 中,通过经典电动力学给出了定性正确的答案。我想,如果我在这篇 NOTE 中的推导和结论大致正确的话,很适合作为下一届电动力学课的思考题或者作业,因为这个结论本身(**真空中不带电的两金属板有相互吸引作用**)是相当有意思的。

最后要感谢李力,这个 idea 来自于他上周五参加香港大学工学院院长周永祖教授学术报告后和我交流的内容。

² 关于真空中电磁波基态