实现超前波的一种尝试

在索莫非和布里渊的《Group Velocity in Wave Propagation》一书中，明确表示对于以洛伦茨模型为色散关系的介质，不论是在吸收区还是远离吸收区的频谱，能量速度和信号速度皆不会超过真空中的光速，在介质共振频率附近，群速度的定义失去意义，而在远离共振频率的地方，群速度，信号速度，能量速度[1]（包括了电磁波能量和电子运动的动能）三者等价，否认了超光速波的存在。

那能否构造出特殊色散关系的介质，来实现超光速波的存在？事实上，在这之前，有大量实验的确观测到了所谓超光速波甚至负速度波，这些实验大都利用了群速度在某些非吸收频谱的反常，例如双增益介质两共振峰之间的波段（王立军在 2000 年的实验），但随后的理论分析，建立在量子信息传递理论[2]的计算表明实验中有效信息速度是小于光速的。用简单的程序模拟也能发现，这种介质并不能产生超前波。

先看看色散关系的限制条件[3]，考虑响应的非即时性：

$$D(x,t)=\varepsilon_0(E(x,t)+\int_{-\infty}^{\infty}G(\tau)E(x,t-\tau)d\tau \quad (1)$$

其中

$$G(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0-1\right]e^{-i\omega\tau}d\omega \quad （2）$$

显然根据因果律，必须有：

$$G(\tau)=0,\tau<0 \quad （3）$$

这就要求 $\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0-1$ 只存在频率复平面的下半平面[4]存在奇点，这个由因果性产生的条件，很大程度上就限制了超光速波的存在。

现在考虑一个非常简单的一维模型。电磁波沿着 x 轴向正方向传播，在 t=0 时到达 x=0 点，然后进入充满介质 x>0 区域的介质。在 x=0 这一点，波的时间变换关系为：

$$\begin{aligned} &f(t)=\sin(\nu t) && t\geq 0 \\ &f(t)=0 && t<0 \end{aligned} \quad （4）$$

经傅里叶分析[5]之后：

$$f(t,x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\int_c \exp(-i(\omega t-\omega nx/c))/\omega-\nu d\omega \quad （5）$$

---

[1] 参见《Group velocity in wave propagation》 Sommerfield&Brillioun 1960

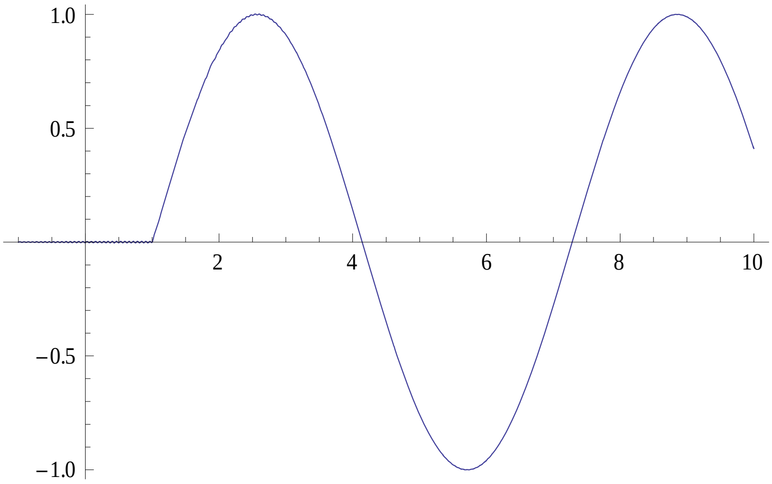
[2] 很多文章，不一一举出

[3]《Classical Electrodynamics》 J.D Jackson

[4] 参见《数学物理方法》

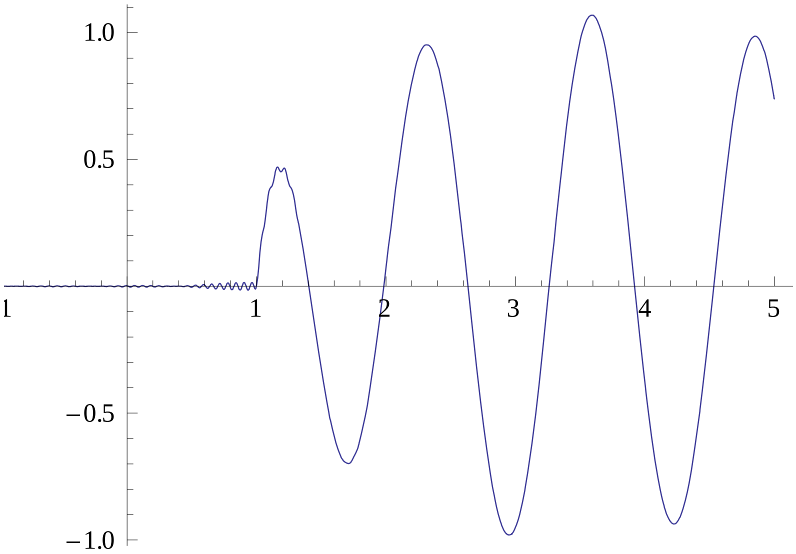
[5]参见《Group velocity in wave propagation》

其中，n 即为折射率，在这里为介电常数的正的平方根，5 式表明了在介质中的某点在 t 时刻的电磁波的电场值。这里要注意的是，折射率的奇点与 $\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0 - 1$ 通常情况下是一致的，保证了传统介质中不可能存在超光速的存在。



Mathenatics 模拟双增益介质传播情况，这里的横坐标表示 ct/x

（模拟皆采用一维半无限大介质模型）



Mathenatics 模拟普通洛伦茨模型介质

可以清楚地看到通常介质在 ct/x<1 的时空域内都是没有场存在的,基于折射率只存在位于复平面下方的奇点。

那我们是否能够做到：

$$\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0 - 1$$

对应所有奇点在复平面下方，确保因果关系成立

$$n = \sqrt{\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0}$$

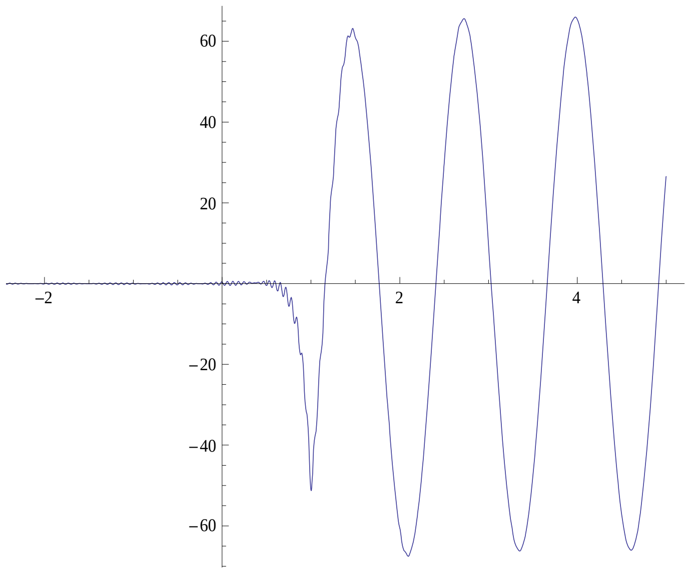
存在复平面上方的奇点，产生超前波

最简单的例子：

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{i\alpha}{\omega + i\beta}(\alpha > \beta > 0) \qquad (6)$$

显然，这样的色散关系对应的折射率除了$-i\beta$奇点之外，还存在$i(\alpha-\beta)$这个奇点，这样势必会导致超前波的存在。

模拟所得结果



$\alpha/\beta=10$

可以看到对于这样的奇异介质，在 0<ct/x<1 的时空域内会有场存在，当 ct/x 趋近 1 时，电磁波传递又趋于正常传播，同时当 ct/x 趋向负无穷大时，场自动趋向于零，不会发散。

再看一个例子，反常洛伦茨模型：

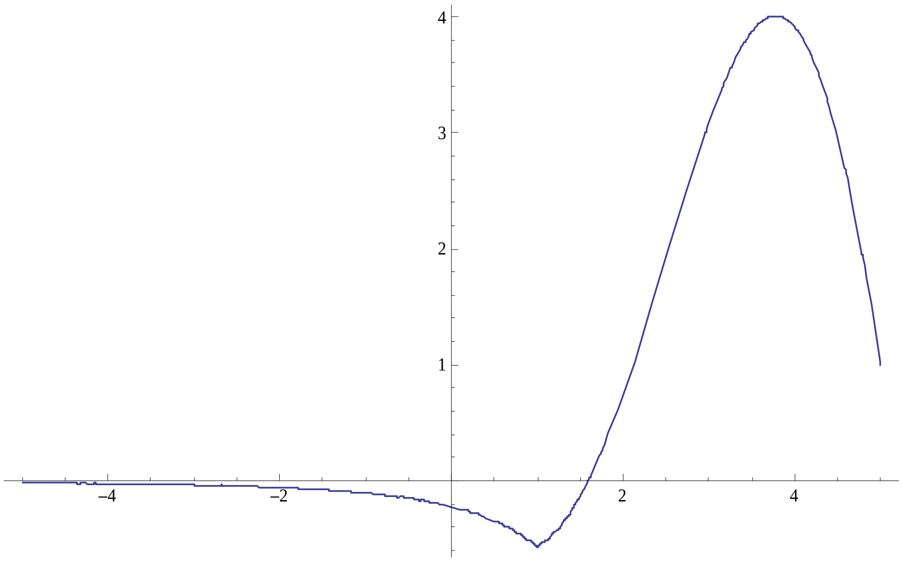
$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{a^2}{\omega_0^2-2i\rho\omega-\omega^2}(a^2>\omega_0^2) \qquad (7)$$

存在奇点：

$$U=-i\rho\pm\sqrt{\omega_0^2-\rho^2} \qquad (8)$$

$$N=-i\rho\pm\sqrt{\omega_0^2-\rho^2-a^2} \qquad (9)$$

显然当$a>\omega_0$时，会存在复平面上半平面的奇点，同样会存在超前波。



$$a^2/\omega_0^2 = 5 \qquad\qquad \rho/\omega_0 = 0.07$$

类似前面例子这里同样观察到了超前波的存在，靠近横坐标 1 处自动回归正常传播方式，而且当 ct/x 趋向负无穷大时，场值趋向于零。唯一不同的是，这里即便是函数值 ct/x 依然非零，这就说明，对于这样的介质，存在负波速，这的确有点难以理解。

至于这样的介质是否存在，还是根本就不可能实现，以及这样的传播对应的物理，这还是个问题，还在思考中。