

Drude 模型下电磁波在金属中的传播

1. 长波近似

我们可以设电场为均匀场来计算 ϵ 的原因是用了一个长波近似, 而这对于大多数情况是成立的。证明如下:

由电子的运动方程 $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{E} - \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$, 带入试解 $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$ 。

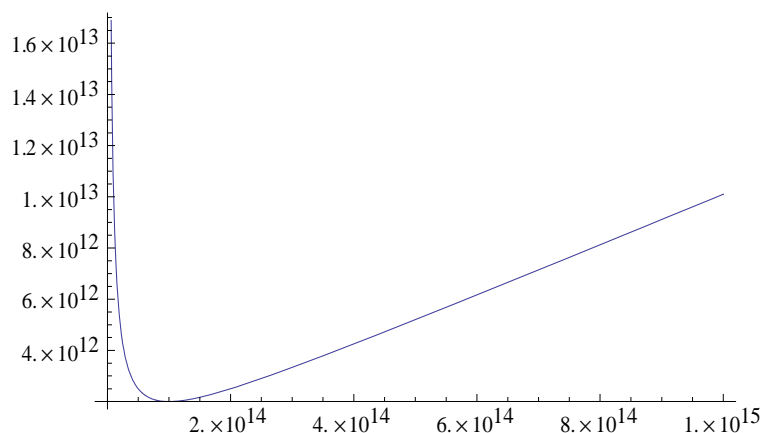
$$\text{得 } \vec{r}_0 = -\frac{e \vec{E}_0}{m} \frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}$$

对于良导体 $\tau \sim 10^{-14} s$, 要进行长波近似的话, 得满足 $r_0 \ll \lambda$ 。即

$$E_0 \ll 0.01 \omega + \frac{10^{26}}{\omega}$$

用 mathematica 进行画图

Plot [0.01*x + ((10^26) * (x^-1)), {x, 0, 10^15}]



可知其函数的最小值为 2×10^{12} 。故一般情况下的电场能够满足这个长波近似这个条件。然而, 利用了长波近似, 虽然可以使计算简便, 而且这样近似求得电导率对非局域的情况同样适用, 但是 \mathbf{E} 与 \mathbf{j} 的值便不能确定了。考虑单频的电磁波, 在单频的条件下将电磁波看为在某一个频率下的 **准静态**, 利用准静态近似, 可以求得的趋肤深度。所以, \mathbf{E} 与 \mathbf{j} 的值随着电磁波透入深度的不同而改变, 而这是利用局域近似的情况所不能得到的。其实, 我们也能定性的得出结论。由于电子运动速度 $v \ll c$, 电子运动的振幅 $d = vT$ 远小于入射波的波长 $\lambda = cT$, T 为振动周期。故能利用长波近似。

2. 忽略磁场带来的洛伦兹力的原因

电场与磁场存在模量上的关系 $E_0 = v_{\text{wave}} B_0$, 其中 v_{wave} 是电磁波在介质中的波速。而通

常情况下, $v_{wave} \gg v$ 。从而 $e\vec{v} \times \vec{B} = e \frac{\vec{v}}{v_{wave}} \times (\vec{e}_z \times \vec{E}_0)$, 磁场带来的洛伦兹力非常小, 与电场

力相比可以忽略。如果考虑了洛伦兹力, 电子的运动方程为 $m \frac{d\vec{v}}{dt} = e(E + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{m\vec{v}}{\tau}$ 。中间多了一个非线性项, 硬解很麻烦, 但是可以估计这会导致电子的速度是个张量, 进而电导率是个张量, 即**电导率是各向异性的**。只不过张量的非对角元素应该远远小于对角元素。

3.复电导率的实部和虚部的物理意义

复电导率 $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{1-i\omega\tau}$, 当 $\omega \rightarrow 0$ 时, 对应的直流电导率是 $\sigma_c = \frac{ne^2\tau}{m}$ 。可以看到 σ_c 是与弛豫时间有关的, 弛豫时间越长, 电子的自由程越长, 对应的电导率越大, 电子与晶格碰撞而耗散的能量越少。将复电导率写成

$$\sigma = \frac{ne^2}{m(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2})} \frac{1}{\tau} + i \frac{ne^2\omega}{m(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2})} = \text{Re}(\sigma) + i \text{Im}(\sigma)。$$

$\therefore \epsilon_r(\omega) = 1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\epsilon_0\omega} = 1 - \frac{\text{Im}(\sigma)}{\epsilon_0\omega} + i \frac{\text{Re}(\sigma)}{\epsilon_0\omega}$ 。由电导率多了一个虚部而带来的直接后果就是

是电流与电场有个**相位差**。而在作业中已经求过电场对电流单位时间做功的平均值只与 $\text{Re}(\sigma)$ 有关, 所以 $\text{Re}(\sigma)$ 对应着能量的耗散。在另一方面, 我们知道介质的折射率

$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ 。对于金属等导电介质, $\mu_r = 1$ 。 $\therefore \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 - \frac{\text{Im}(\sigma)}{\epsilon_0\omega} + i \frac{\text{Re}(\sigma)}{\epsilon_0\omega}} = n + i\chi$, 注

意到 $\frac{\text{Im}(\sigma)}{\text{Re}(\sigma)} = \frac{\omega}{\frac{1}{\tau}}$ 。严格的求解 n 与 χ 较复杂, 故只考虑极限下的行为看 $\text{Im}(\sigma)$ 。通常情况

下, $\epsilon_r \approx 1$, 故可以将其进行泰勒展开。

$$\sqrt{\epsilon_r} \approx 1 - \frac{\text{Im}(\sigma)}{2\epsilon_0\omega} + i \frac{\text{Re}(\sigma)}{2\epsilon_0\omega} = n + i\chi。$$

这样我们就可以看出 $\text{Im}(\sigma)$ 对应的是折射率, 也就是色散关系。在另一方面由 $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$ 可

知 $\text{Im}(\sigma)$ 对应的是电磁波的振荡项。也就是说 $\text{Im}(\sigma)$ 与**电磁波互相交换能量而呈现振荡**。

而 $\text{Re}(\sigma)$ 对应的是 χ , 即能量的耗散, 也就是说对应的是能量随着电磁波透入金属的深度的衰减。

要想忽略 $\text{Re}(\sigma)$, 就要满足 $\text{Im}(\sigma) \gg \text{Re}(\sigma)$, 此时对应的是良导体在光波及更高频下

的行为 $\sqrt{\varepsilon_r} \approx \sqrt{1 - \frac{\text{Im}(\sigma)}{\varepsilon_0 \omega}} = n$ 。也就是说 $\text{Im}(\sigma)$ 对应的是高频下的折射率。即色散关系。

$$\because \omega \gg \frac{1}{\tau}, \therefore \sqrt{\varepsilon_r} \approx \sqrt{1 - \frac{\text{Im}(\sigma)}{\varepsilon_0 \omega}} \approx \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}} \approx \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}。相当于一个**等离子体**!$$

此时的物理图像是：导体中的电子还来不及与晶格碰撞而失去能量，就已经返回，故此时并不对应于一个耗散能量的项，反而对应的是一个等离子体在高频下的**谐振电子**，电子与电场不断的交换能量，从而使导体呈现出强色散的性质。当然，在低频比如 GHz 下， $\text{Im}(\sigma)$ 几乎可以忽略，这时对应的就是弱色散而强耗散能量性质。

总结： $\text{Re}(\sigma)$ 对应的是能量的耗散，也就是电磁波随透入深度的衰减。 $\text{Im}(\sigma)$ 对应的是良导体的色散性质。究竟由谁来掌控就要看 ω 与 $\frac{1}{\tau}$ 的关系。当 $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ ，就可以忽略 $\text{Re}(\sigma)$ ，此时金属的色散性质占主导地位。而当 $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ 时，就可以忽略 $\text{Im}(\sigma)$ ，此时电磁波基本不色散。