复旦大学课程教学大纲

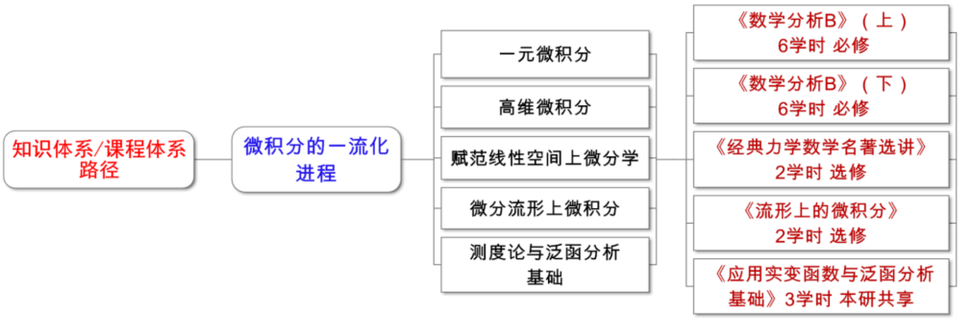
院系：航空航天系 **日期：2019 年 03 月**

<table>
<tr><td>课程代码</td><td colspan="5">MATH120017</td></tr>
<tr><td>课程名称</td><td colspan="5">数学分析 B（Ⅱ），适用于混合教学班级</td></tr>
<tr><td>英文名称</td><td colspan="5">Mathematical Analysis B（Ⅱ）</td></tr>
<tr><td>学 分 数</td><td>5</td><td>周学时</td><td>5</td><td>授课语言</td><td>中文</td></tr>
<tr><td>课程性质</td><td colspan="5">□通识教育专项□核心课程□通识教育选修☑大类基础□专业必修□专业选修□其他</td></tr>
<tr><td>教学目的</td><td colspan="5">高维微积分的主要研究对象为向量值映照，相对于一元函数（自变量与因变量均为一个数），向量值映照的自变量与因变量都可以是有限个数，由此高维微积分提供的思想与方法具有广泛的背景，并且是后续诸多数理与专业课程的坚实基础。从高维微积分的学习开始，就应该注重逐步建立自己的数理知识体系。本课程追求教学的广度与深度可以类比国内外具有一流水平的教程的程度，追求优秀的教与学的成效。

1．课程广度、深度与理念的一流化
1.1 一流化知识体系的课程分布
研习当今具有国内外一流水平的微积分教程，以我国北大张筑生著«数学分析新讲»、俄罗斯卓里奇著«Mathematical Analysis» 等为代表，此处的“一流化”可以表征为以下特点：（1）在讲述一元微分学基础上（第一学期），多元微分学则直接建立在有限维 Euclid 空间之间向量映照之上。卓里奇书还进一步讲述一般赋范线性空间之间映照的微分学；（2）在讲述一元函数 Riemann 积分的基础上（第一学期），多元积分学则沿用有限维 Eucild 空间上 Lebesgue 积分建立的思想和方法，甚至直接进行。（3）基于有限维 Euclid 空间之间微分同胚的知识，发展微分流形上的微积分。
上述一流化做法的必要性及可行性，可归纳如下：
✧ 必要性。（1）建立于有限维 Euclid 空间之间映照的微积分以及一般赋范线性空间之间映照的微分学将真正全面地展现微积分在认识自然及非自然世界中的作为；相关的系统思想及方法不仅为力学、物理学等广大基础科学和技术科学而且也为经济管理等学科提供深厚的知识基础。（2）讲述一般赋范线性空间之间映照的微分学，有限维 Euclid 空间上 Lebesgue 积分建立的基本思想和方法，为进一步研习测度论以及泛函分析做了十分有益的铺垫；有限维 Euclid 空间中微分流形的初步理论为今后研习现代数学、力学、物理以及数理经济等较为高深的学问（相关系统思想及方法的集合）提供必要的基础。需</td></tr>
</table>

指出，随着我们所研究事务的复杂度的提高，测度论以及泛函分析、微分流形等基本思想和方法是我们研究和认识复杂事务所必然需要的。

✧ 可行性。(1) 一元微分学（面对一般实函数）建立的思想和方法，可很大程度地直接应用于有限维 Euclid 空间之间映照；而有限维 Euclid 空间之间映照的微分学建立几乎可以“一模一样”的应用于一般赋范线性空间之间映照的微分学的建立。由此，我们可以将新知识的学习过程作为“温故而知新”的过程。（2）有限维 Euclid 空间中微分流形的初步理论实质性地基于微分同胚的相应结论，由此我们又可以实践“温故而知新”的过程。



“微积分的一流化进程”涉及的知识体系及其所属课程

按上所述，我们对“具有一流化的微积分的知识体系”的追求对于今后高层次的学习以及研究等具有基础性的深远作用。在明确目标后，结合复旦现有的课程及其学分设置，我们设想了“微积分一流化进程”的教学路径，现研究及实践的主要内容如上图所示：① 大学一年级必修“数学分析”，主要涉及 Euclid 空间上微积分 → ② 大一暑期选修课程《经典力学数学名著选讲》(有关微积分的深化)，主要包括一般赋范空间上微分学，高维 Euclid 空间上微积分的深化内容（包括秩定理、Morser 定理、Euclid 空间中微分流形的初步理论等） → ③ 大二、三选修课程《流形上的微积分》，④《应用实变函数论与泛函分析基础》等，使得相关教学的深度和广度能持平甚至超越国内外一流的微积分或数学分析的教程，如俄罗斯数学教材选译之一的卓里奇箸《Mathematical Analysis》。此教材被 Wolf 奖获得者 V.I.Arnold 誉为迄今为止最好的现代分析学教程，极力体现现代化的知识体系及其在认识自然及非自然世界中的作用。

1.2 数学通识——各课程间融会贯通与触类旁通的纽带

追求正本清源，不断加深各课程知识体系间的关系，有助于“融会贯通、触类旁通”，切实加深对各课程所提供的知识的理解。一定程度上，知识体系应该是由核心思想向外辐射，数理知识体系[1]的核心可谓微积分及线性代数。

事例 1：微积分核心思想：动态逼近程度的刻画（点列极限）→整个微积分体系的发展（包括导数、积分、级数）。学生学习微积分，仅需依赖极限这一唯一的核心概念，导数是一种特定的极限，积分、级数也是特定的极限，这些知识

[1] 可以理解为：微积分＋线性代数→常微分方程，偏微分方程；复变函数；概率统计等知识体系。此知识体系，力学、数学、物理等理工专业均涉及，仅是要求程度有所不同。

学习体现“温故而知新”的效果，而非总是在不断地学习“全新”的内容，有助于加深认识。

事例 2：基于有限维 Euclid 空间之间微分同胚理解张量分析中的曲线坐标系，从参数区域至物理区域间向量值映照的 Jacobi 阵直接给出局部协变基→基于非奇异阵其逆阵的唯一存在性，获得协变基之对偶基（亦即逆变基）的唯一存在性→基于向量值映照其 Jacobi 阵的每列即为此向量值相对于相应曲线坐标的变化率，导出 Christoffel 符号的意义及其计算式等——教学实践表明，简单应用有限维 Euclid 空间之间映照的微分学可对力学中广泛应用的曲线坐标系的基本概念给予十分清晰的阐述。

事例 3：基于线性代数中“同时对角化”的结论，亦即存在非奇异阵，可将一个对称正定阵和对称阵同时分别合同于单位阵和对角阵。这一常作为习题的结论，其构造性证明过程以及相关线性变化的意义（在力学实践中有着明确的意义），可以系统清晰地定义曲面的 Gauss 曲率、平均曲率并获得相关基本性质。理论力学课程中，藉上述同时对角化的结论，可以清晰推导保守系统在平衡位置附近作微振动时所具有的数学性质及其力学解释。

事例 4：基于有限维 Euclid 空间之间映照的微分学，结合矩阵基本运算，可以完整清晰地推导微积分中的 Stokes 公式。最终结果的获得，基于一个三阶反对称阵左乘一个列向量等于此反对称阵对应对偶向量叉乘此列向量，这一熟悉、简单的数学性质。理论力学中，又是藉此数学性质，获得任意运动向量相对于绝对坐标系和运动坐标系关于时间变化率之间的基本关系，此种关系的一个基本应用就是速度、加速度合成关系式的推导。由此可见，上述简单的数学性质可能就是“刚性旋转”的共有数学机制。

我们生活的世界丰富多彩，但上帝可能就拿一样东西创造了这些，这就是“数学机制”，反映为某种数学关系式。课程中的定理或性质可能并不是归纳程度最高的东西，更高的会有上述数学机制，往往可以跨课程，甚至跨学科。我们将上述数学机制称为“数学通识”，对此进行研究并在微积分等基础课程中强调这些将有助后续专业课程相关内容的学习，便于展现和理解“数学的作为”，有助于融会贯通、触类旁通。

1.3 数学与自然机理间的关系

将数理知识体系认识为：以严格的量化观点，认识自然及非自然世界的系统的思想和方法，而非纯粹逻辑过程，此处强调理论联系实践的能力。另一方面，往往对深层机制或规律的理解需要数理知识体系。

事例 1：基于无穷小量的比较及运算，我们可以进行如下估计：

$$\ln\cos x=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2+o\left(\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2\right)$$

$$=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\ \text{ thanks to } o(x^3)+o(x^3)=o(x^3),\ o(x^3)+o(x^4)=o(x^3)$$

	这个例子中反映了“抓住主要矛盾忽略次要矛盾”这样一个哲学道理，这也是力学等基础科学和技术科学从纷繁复杂的研究对象中提炼被研究事务其本质特性的最为重要的思想和方法。藉此事例，可以展现严格的数学，从方法论角度所表现的灵活性。 事例 2：二阶导数联系于法向（向心）加速度，故转轨设计的原则应该是保证二阶导数连续[2]；另一方面，由于二阶导数无法直观观测，所以数学本身起到了认识自然规律的作用。 对数学（数理知识体系）的作为的认识，取决于对于数学本身的认识。力学等具有长久发展历史的学科，真正的创新应该源于坚实的基础；研究者工作层次，决定于研究者知识体系的层次，如数理知识体系的微积分层次和实分析与泛函分析层次就有本质的差异，后者又是质上的飞跃。 2．学习方法概要 大学的学习应该注重理解与掌握知识体系的内在思想与方法，注重将知识升华为能力。
基本内容简介	《数学分析（Ⅱ）》主要针对向量值映照建立微分学与积分学，另包括级数. 高维微分学主要包括：点列的极限、向量值映照的极限、向量值映照的可微性与导数、多元函数的分析性质、多元函数的无限小分析方法、多元函数与向量值映照的有限 增量公式与估计、隐映照定理及其应用、逆映照定理及其应用等. 高维积分学主要包括：曲线、曲面上积分的建立、闭方块上 Riemann 积分的 Darboux 分析与 Lebesgue 定理、Fubini 定理与体积分换元公式、广义积分与含有参变量的积分、Gauss-Ostrogradskii 公式、Green 公式、Stokes 公式与场论基础等. 级数主要包括：数项级数、函数项级数、幂级数、Fourier 级数等. 具体内容请见教学内容安排部分。
基本要求:. 数学（数理知识体系）可理解为，按量化观点（包括定量与定性刻画），认识自然及非自然世界系统的思想和方法。另一方面，对于数学作为的认识，取决于对数学自身的认识。 按上述观点，对于《数学分析（Ⅱ）》课程，需要学生系统、深入地掌握以向量值映照为基本对象所开展的多元微分学与积分学，以及级数和 Fourier 级数有关理论及应用，具体归纳为以下主要方法: 1. 向量值映照/多元函数极限的计算方法，包括正向说明极限存在；基于路径分析方法(通过	

[2]此事例引述自菲赫金哥尔茨所著《微积分教程》（俄罗斯数学教学选译之一）。

极限分析找出路径）说明极限不存在。

2. 向量值映照/多元函数导数的计算方法，包括充分性方法与极限分析方法。特别地，在充分性方法中所提取的矩阵形式的链式求导，对于隐映照与逆映照的导数计算非常有效。
3. 无限小分析方法，亦即获得多元函数的高阶多项式逼近的系统方法。类似于获得一元函数的高阶多项式逼近的无限小分析方法，获得多元函数的高阶多项式逼近并不是直接套用无限小增量公式，而是常常基于间接性方法。
4. 隐式形式曲线与曲面的处理方法，包括基于隐映照定理获得曲线与曲面的局部Monge表示，并基于矩阵形式的链式求导计算相关几何量。
5. 处理约束上最值问题的方法，主要基于Lagrange 乘子法，包括约束上极值的类别判定。
6. 变换方程方法，按微分同胚的观点，可以引入自变量变换与因变量变换，以期简化原有因变量相对于原有自变量的偏微分方程，所归结的方法可以有效地获得新的因变量相对于新的自变量的偏微分方程。
7. 体积分计算的换元方法，基于含有零测集修正的体积换元公式，针对积分区域与被积函数，归结常用的积分换元方法。
8. 判定正项级数敛散性的方法，包括通项的基于无限小分析方法的展开，比值形式的展开及其判定方法。
9. 判定一般数项级数敛散性的方法，包括绝对收敛性、条件收敛性与发散性的分析流程与判定方法。
10. 判定函数序列与函数项级数一致收敛性的方法，主要基于最值点的位置估计。
11. 幂级数的相关方法，包括确定幂级数收敛域的方法，主要基于通项比值形式的展开；获得复杂函数的幂级数表示，主要基于幂级数的分析性质；基于幂级数分析性质的相关应用，包括微分方程的级数解法等。
12. Fourier级数的相关方法，主要基于点收敛意义的展开定理获得函数的三角级数展开，包括正弦或者余弦展开。另有，内积意义的Fourier级数展开，但可在泛函分析中进行严格阐述。

掌握上述各方法是本课程的基本要求，包括：（1）获得方法的分析过程；（2）基于方法解决具体问题。值得指出，基于上述方法可以顺利地处理吉米多维奇著《数学分析习题集》中约 70-80%的题目。在逐步学习的基础上，鼓励对方法的归纳提出自己的意见与建议，以期与教师一起进一步完善甚至发展方法。基于对方法的认识与理解，希冀实现方法至能力的升华。

值得指出，是否掌握方法可以自我衡量是否达到了学习目标；是否能够独立处理作业文件中的基础性习题可以自我检查是否掌握方法。

授课方式：

本课程教学实施**“课程工程”**，主要包括：在线资源、文本支持、实体课堂、研讨课、课程讲座等五方面，概述如下：

（1）在线资源

课程体系网站：

微积分的一流化进程：http://fdjpkc.fudan.edu.cn/d201353/main.htm

本课程体系网站的建设基于微积分相关数理知识体系的研习，表现二方面：① 知识体系自身的研究，主要特征为基于“数学通识”实现同一知识体系内的融会贯通、不同知识体系之间的触类旁通；② 知识体系传播的研究，既包括研究高成效的传授方式，也包括通过组合相关知识体系以建设相关课程。

本课程体系网站，主要包括的栏目有：

研究背景 包括：“数理观点”；“教学理念与教学方式”；“知识体系与课程体系”；“课程教师与合作专家”。

体系讲稿 主要按知识体系发布对应的讲稿，包括“Euclid 空间上微积分”，“微分流形上微积分”，“赋范线性空间上微分学”，“测度论”，“泛函分析”。后二个目录尚在建设中。

教学视频 主要按知识体系发布对应的教学视频，包括：一元微分学，一元积分学；常微分基础；高维微分学，高维积分学，级数；赋范线性空间上微分学等。

课程建设 通过组合相关知识体系建设相关课程，包括：“数学分析”（一年制），“经典力学数学名著选讲”（有关微积分的深化）；“流形上的微积分”，“应用实变函数与泛函分析基础”（本科生与研究生共享课程）。对于每一课程，包括子栏目：知识体系、教学大纲、试卷习题、教与学研究、开设信息。

教学研究 综合性包括：“阶段总结”；“杂志论文（含原稿）”，“会议论文（含原稿）”；“学术报告（含随笔）”；“教改项目”。

图示研究 致力于将数理知识体系中重要的概念、复杂的分析过程进行图示化说明。图示化研究成果源于并服务于知识体系自身的研究，亦隶属并服务于知识体系传播的研究。按知识体系建设相关目录，包括：“Euclid 空间上微积分”，“微分流形上微积分”；“赋范线性空间上微分学”；“测度论”；“泛函分析”。目前主要涉及“Euclid 空间上微积分”的图示化研究，其它的均在建设中。

通识研究 隶属同一知识体系或者不同知识体系的知识点可能含有相同的“数学通识”——特定的数学等式、不等式或者特定的处理方式方法；基于“数学通识”可实现同一知识体系之间的“融会贯通”，不同知识体系之间的“触类旁通”。本栏目设计为按知识体系划分子目录以分别进行通识性结构的研究，并在对应的子栏目下涉及跨知识体系的通识性结构的研究。本栏目持续性建设中。

现课程体系网站上已经有完全可以用以自主学习的课程视频（按知识点与知识要素进行剪辑）。 **《数学分析 B（Ⅱ）》涉及：高维微分学、高维积分学、级数的二个层面的视频：（1）基础性层面，可供首次学习使用；（2）提高性层面，按基本内容、方法化、应用化进行各类，适合在一定学习的基础上使用。**

结合现有课程体系网站上的系统视频，学生可以课前先进行自学；课堂讲授无需再重复所有的“细枝末节”，而是强化思想性、强化通识性、澄清复杂性、强化方法性，并且课堂形式可以增加师生间的互动，提高课堂的翻转性。

对应数学分析的混合教学，基于复旦大学在线课程网站 http://fudan.mooc.chaoxing.com/portal 的在线课程《数学分析——一元微积分》 http://mooc1.chaoxing.com/course/99372287.html

现在线课程提供的主要学习资料为：

课程录像 分为随堂录像与概述录像二部分：① **随堂录像**，即为课程体系网站上的视频，按课程进度进行学习；② **概述录像**，注重整体性阐述相关思想与方法，应用于阶段性学习。一般而言，经过二至三次的学习可以理解与掌握数学分析的基本思想与方法。学习视频，一般对应于随堂录像，观看此类视频，并结合学习目的中所列的要点掌握基本的概念、思想与方法。

学习讲稿 为在线 PDF 文本，包括已出版教材《微积分讲稿—— 高维微积分》的主要内容。学习讲稿，主要包括：① **阐述概念、思想与方法**，基本对应于课程录像的内容。② **典型事例**，往往首先为解答一类问题提供方法，然后给出代表性事例的解答。在学习概念、思想与方法之后，学习典型事例的解答。

基础练习 为在线 PDF 文本。在学习讲稿的基础上，进行相关练习。有些章节的练习将分为二部分：① **基础性练习** 基于所归纳方法，可以较为轻松地解答这部分练习，作为对相关思想与方法最为初步的理解。这部分练习往往要求全部完成。② **提高性练习** 这部分练习涉及较为深入的分析方法或者练习于其它知识体系。解答这部分问题往往需要一定的思考，可以多次考虑相关问题。这部分练习可以结合自己的实际情况进行选择。

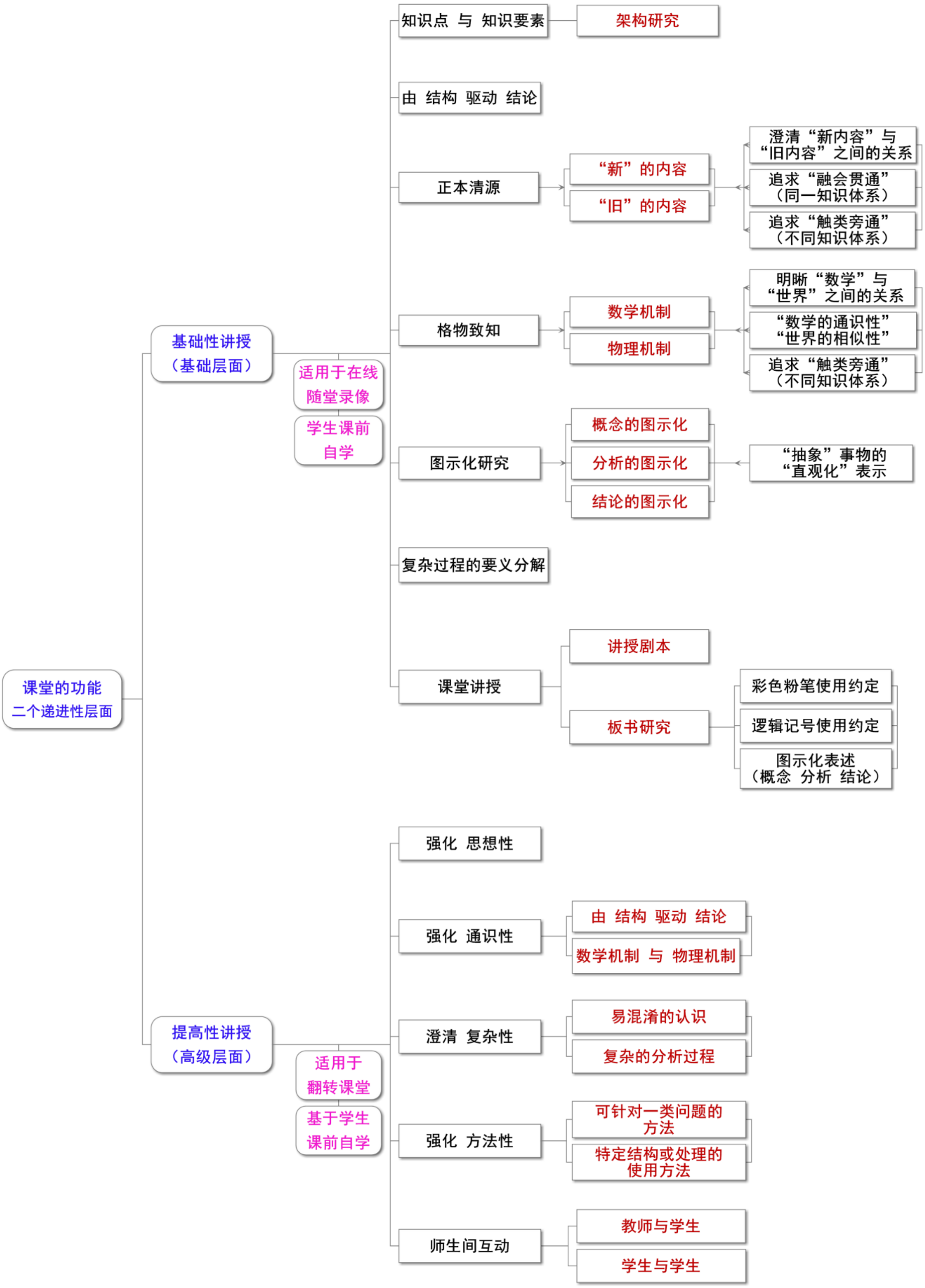
图示化研究 我们将微积分中的概念、思想、结论、分析、方法进行图示化。在完成学习视频、学习讲稿、基础练习的基础上，学习图示化研究的有关内容，以期总体性理解与掌握相关思想与方法。另有，知识体系架构的图示化，以此一方面可以检查哪些内容已掌握、哪些内容尚需掌握，另一方面可以总体性研究各知识要点之间的关系。

基于在线资源的具体的学习路径，如图 15 所示。原则上，学生可基于上述内容循序渐进地进行自学。

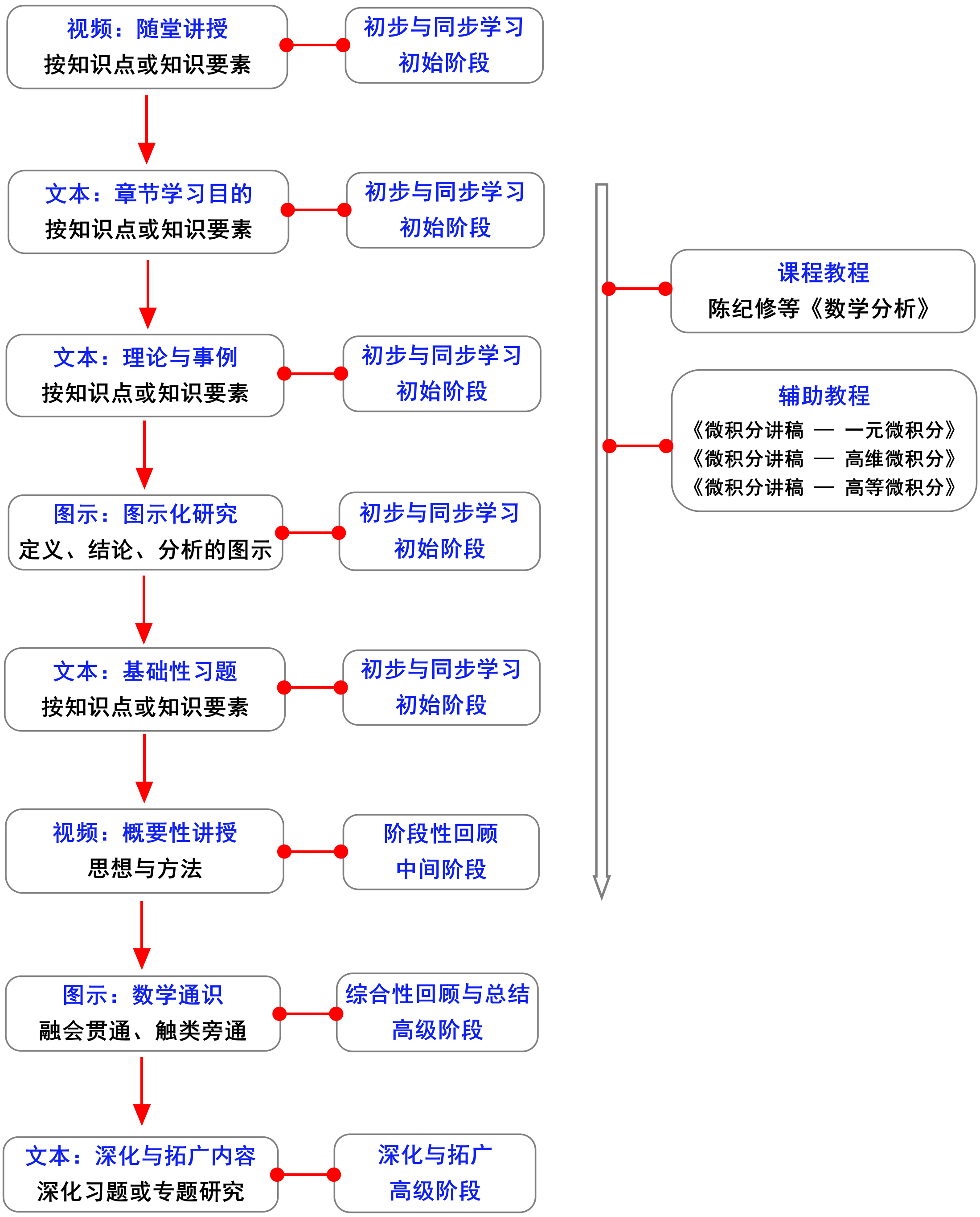
基于在线资源（课程体系网站与在线课程），我们将课堂的功能分为二个递进性层面，如图所示。

① **基础性讲授（基本层面）** 基于我们现有的对知识体系知识及其传播的研究，系统且清晰地讲授相关思想与方法。这种类型的教学视频可供学生初始的自习。

② **提高性讲授（高级层面）** 学生事先学习了基础性层面的教学视频，就此课堂讲授不再是强调与重复所有的“细枝末节”，而是强化思想性、强化通识性、澄清复杂性、强化方法性，并且课堂形式可以增加师生间的互动，提高课堂的翻转性。



课堂的功能（二个递进性层面）：基础性讲授（基础层面）、提高性讲授（高级层面）



在线课程各章节的内容架构，对应于学习路径

基于在线课程的学习流程，如上图所示。

（2）文本支持

分以下方面：

主要教程 现已正式出版《微积分讲稿——一元微积分》，按知识点进行划分（章）。每章含有知识要素，阐述思想与方法；应用事例，分类给出典型问题的处理方法；拓广深化，主要将相关思想与方法联系于其它课程。① 《讲稿》适合配合教学视频进行学习，鉴于数学分析的教与学的程度，事先务必先学习知识要素部分。② 课程讲授后，可以基于应用事例学习具体方法的应用，然后再进行练习。③ 《讲稿》拓广深化部分，适合在一定的学习基础上参阅。

习题文件 本课程按相关内容提供习题文件，主要包括：① 基础性习题，本部分习题基于课程讲授的思想与方法就可以较为顺利地进行，主要目的在于理解与熟练相关方法的应用。② 提高性习题，较为深入的习题，以此可以加深认识、拓广技艺。

研讨日志 主要整理研讨课（包括习题课）中讲述的思想、方法、习题与解答。

（3）实体课堂

每周一个下午进行集中性讲授与研讨。实体教学，追求在方法论层面传授思想与方法，亦即提高性讲授（高级层面），如图“课堂的功能”所示。就此首先需要深入研究知识体系的内在结构，然后再研究其传播形式。课堂讲解上注重三个方面的提升：

通识化 基于已有知识发展新的知识，提炼不同知识点的内在相似性（数学通识）

图示化 概念、结论、分析过程的图形表示，再复杂与精妙的内容也能经过要义分解并且将本质用图形表示，以此理解与认识上清清楚楚、简简单单

方法化 归纳可适用一类问题的程序化且有效的解决路径，籍此实现方法至能力的升华

（4）研讨课

按课程人数进行分组，每位同学每周参加一次研讨课（2 至 2 个半小时）。研讨课每周安排 2-3 次，时间与同学们协调，每周研讨课的内容错开，整理有《研讨课日志》，每位同学每周参加一次，再自学其它时段的研讨课记录。另安排有习题课，隔周周末进行，每次三小时。

（5）课程讲座

每学期进行三次课程讲座，按内容进行：微分学、积分学、综合性讲座各一次。

主讲教师简介：

学术上，注重以知识体系研究为基础，藉此驱动教学与科研工作。相对地，教学与科研的提升不断地要求更为深入的知识体系，同时也积累且深化了基于知识体系认知世界的经验。

教学方面 注重以知识点及知识要素构建知识体系；注重通过数学通识实现同一知识体系的融会贯通以及不同知识体系之间的触类旁通；注重以知识体系认知世界的过程，基于已有的知识发展新知识的过程进行课程讲述。目前建设有“微积分的一流化进程”以及“现代连续介

质力学理论及实践”二条教学路径：

微积分的一流化进程 http://fdjpkc.fudan.edu.cn/d201353/main.htm

现代连续介质力学理论及实践 http://fdjpkc.fudan.edu.cn/d201354/main.htm

藉此进行微积分、张量分析、连续介质有限变形理论知识体系的传播，课程的广度及深度可类比国内外具有一流水平的教程或专著，且教与学效果优良，受到本校师生的赞誉并开始致力于推广到其它院校。

就教学研究与实践工作，申请人作为负责人获得市教委重点课程建设项目 2 项，重点教改项目 2 项；独立获得校级教学成果奖二等奖 1 项，作为主要贡献者及负责人获得 2013 年度高等教育上海市级教学成果一等奖“追求具有一流水平的微积分与连续介质力学基础知识体系的教研与实践”；获得复旦大学本科教学贡献奖。作为课程负责人，获得 1 项校级精品课程，1 项市级精品课程荣誉。

现已独立出版著述《现代张量分析及其在连续介质力学中的应用》（2014 年）、《微积分讲稿——一元微积分》（2015 年）、《微积分讲稿——高维微积分》（2017 年）；并已发表侧重知识体系及其传播的学术论文近 10 篇，均为系统性论述。

科研方面 注重基于知识体系研究以发展可适合一类问题的新思想及方法；注重理论联系实际。提出按几何形态区分体积及曲面形态连续介质，并分别提出“当前物理构型对应之曲线坐标系显含时间的有限变形理论”、“几何形态为曲面的连续介质的有限变形理论”。基于相关理论发展了含有可变形边界流动的涡量-速度势解法；提出一般二维运动的涡量动力学理论等。就上述科学研究工作，申请人作为负责人获得 3 项国家自然科学基金面上项目的资助。目前，通过各种学术交流、推荐相关研究思想与方法，获得业内多位专家的赞誉，逐步开始形成特色与影响。

学术任职 曾任复旦大学教学指导委员会委员；现任复旦大学教师教学发展委员会委员（2015 年起），现任中国力学学会第八届科学普及工作委员会委员（2011 年起），复旦大学复旦学院任重书院导师委员会主任（2013-2014 年）；复旦大学复旦学院腾飞书院导师；学术期刊《水动力学研究与进展》（中英文版）编委，《力学进展》编委。

联系方式:

办公地点：复旦大学邯郸路校区，北区三角地力学与航空航天实验室 202 室；

Tel：021-65643938、13601747708

Email：xiexilin@fudan.edu.cn

教学团队成员

姓名	性别	职称	院系	在教学中承担的职责
谢锡麟	男	正高级讲师（教学型教授）	航空航天系	课程负责人

教学内容安排：

我们将微积分“知识体系”分成若干个“知识点”，而每个知识点由若干“知识要素”组成。以下按知识体系的发展安排教学进度。可能会由于假期或者教与学的实际情况对进度稍作调整。

每周线上学习内容，务必在实体课堂之前基于在线资源、文本支持进行自我学习，要求大致了解相关内容；实体课堂讲授与讨论线下内容，以期澄清相关思想与方法，如有困难则基于在线资源、文本支持继续学习。

混合教学的同学，按下述“线上学习内容”事先进行在线学习，“线下讲授与讨论内容”在实体课堂进行；一般教学的同学，按“线上学习内容”进行讲授。

特别注意：以下所列视频，按其内容属性分别归属于：基本内容、方法化、应用事例；视频位于“微积分一流化进程”的“教学视频”栏目，相关根目录标识上述三种内容属性。

第一部分 有限维 Euclid 空间上的微分学

§01 第 01 周

§01-online 线上学习内容

1. 向量值映照的背景 ① 有限维 Euclid 空间（Cartesian 空间），按等价性观点（一一对应）理解公理化定义（包括定义加法及数乘，使其成为线性空间）、几何化（引入典则基，Cartesian 坐标，加法的平行四边形法则等）。② 向量值映照的实际背景，从具体研究过程中提取。值得指出，一元函数是一元微积分的主要研究对象，而向量值映照是高维微积分的主要研究对象。③ 对比一元函数极限研究，引出 Euclid 空间中距离的概念，进而定义作为线性空间的 Euclid 空间的范数。基于距离，可定义球形邻域。④ 定义点列收敛，类比于数值上序列的分析性质，研究点列极限的分析性质。
2. 向量值映照的极限 ① 基于球形邻域，可完全类比与一元函数情形，定义向量值映照的极限，包括 Cauchy 叙述、Heine 叙述及其等价性结论，向量值映照极限的 Cauchy 收敛原理。连续性作为特殊的映照极限加以研究。② 向量值映照极限的分析性质，包括复合向量值映照极限定理，强调非接触性条件。③ 向量值映照极限等价于其各分量的极限（本性质由 Euclid 空间中距离性质决定），籍此基于多元函数极限的四则运算以及复合向量值映照极限定理获得多元函数极限计算的充分性方法。④ 多元函数极限的路径分析方法，主要用于说明极限的不存在性。

§01-offline 线下讲授与讨论内容

向量值映照/多元函数极限的计算方法 ① 向量值映照的极限定义。 ② 正向说明多元函数极限存在的估计方法，主要联系于基本不等式。③ 基于路径分析方法说明极限不存在。

§01-教学视频目录

基本内容：向量值映照的极限-2018-2019 学年第二学期

01. 向量值映照的概述-01-向量值映照的概念 时长：09m16s
02. 向量值映照的概述-02-高维 Euclid 空间的图示化 时长：09m23s

03. 向量值映照的概述-03-高维 Euclid 空间的线性结构 时长：07m50s
04. 向量值映照的概述-向量值映照的图示化 时长：08m41s
05. 向量值映照的极限：01-向量值映照极限的概念 时长：05m04s
06. 向量值映照的极限：02-极限的三种刻画形式 时长：11m39s
07. 向量值映照的极限：03-三种刻画形式的图示化-Part 01 时长：05m20s
向量值映照的极限：03-三种刻画形式的图示化-Part 02 时长：08m34s
08. 向量值映照的极限：04-三种刻画形式的等价性-Part 01 时长：04m56s
向量值映照的极限：04-三种刻画形式的等价性-Part 02 时长：05m25s
向量值映照的极限：04-三种刻画形式的等价性-Part 03 时长：03m46s
向量值映照的极限：04-三种刻画形式的等价性-Part 04 时长：10m59s

方法化：向量值映照极限的计算方法-2015-2016 学年第二学期

01. 向量值映照极限的计算-Part-01-整体极限存在等价于分量极限存在 时长：06m40s
02. 向量值映照极限的计算-Part-02-充分性方法-Part 01-多元函数极限的四则运算 时长：08m54s
03. 向量值映照极限的计算-Part-02-充分性方法-Part 02-复合函数极限定理 时长：08m28s
04. 向量值映照极限的计算-Part-03-正向说明函数极限的方法 时长：03m13s
05. 向量值映照极限的计算-Part-04-反向说明函数极限不存在的方法-Part 01-回顾一元函数 Heine 叙述的应用 时长：05m05s
06. 向量值映照极限的计算-Part-04-反向说明函数极限不存在的方法-Part 02-函数极限与路径极限的关系 01 时长：15m18s
向量值映照极限的计算-Part-04-反向说明函数极限不存在的方法-Part 02-函数极限与路径极限的关系 02 时长：01m55s
向量值映照极限的计算-Part-04-反向说明函数极限不存在的方法-Part 02-函数极限与路径极限的关系 03 时长：08m10s
07. 向量值映照极限的计算-Part-04-反向说明函数极限不存在的方法-Part 03-函数极限与累次极限的关系 01 时长：08m14s
向量值映照极限的计算-Part-04-反向说明函数极限不存在的方法-Part 03-函数极限与累次极限的关系 02 时长：07m55s
08. 向量值映照极限的计算-Part-05-方法概述-充分性条件与必要性条件 时长：01m34s
09. 向量值映照极限的计算-Part-06-分析事例-Part 01-基于无限小分析 01 时长：10m44s
向量值映照极限的计算-Part-06-分析事例-Part 01-基于无限小分析 02 时长：03m48s
向量值映照极限的计算-Part-06-分析事例-Part 01-基于无限小分析 03 时长：11m50s
向量值映照极限的计算-Part-06-分析事例-Part 01-基于无限小分析 04 时长：09m15s

10. 向量值映照极限的计算-Part-06-分析事例-Part 02-基于路径分析 01 时长：07m20s
    向量值映照极限的计算-Part-06-分析事例-Part 02-基于路径分析 02 时长：09m50s
11. 向量值映照极限的计算-Part-07-分析事例-Part 01-事例 01-Part 01 时长：06m30s
    向量值映照极限的计算-Part-07-分析事例-Part 01-事例 01-Part 02 时长：08m50s
12. 向量值映照极限的计算-Part-07-分析事例-Part 01-事例 02-Part 01 时长：07m18s
    向量值映照极限的计算-Part-07-分析事例-Part 01-事例 02-Part 02 时长：04m08s
    向量值映照极限的计算-Part-07-分析事例-Part 01-事例 02-Part 03 时长：06m14s

§02 第 02 周

§02-online 线上学习内容

1. 向量值映照的可微性 ① 向量值映照的可微性定义。可微性为映照的局部行为，其实质为基于线性映照来“逼近”因自变量变化而引起的因变量的变化，误差为因变量变化的一阶无穷小量。由此，首先需要澄清不同维数 Euclid 空间之间线性映照的定义及其表示形式（引入线性映照矩阵）；然后分析的可微性定义的表示，引入作为线性映照矩阵的 Jacobi 矩阵，该矩阵的分量则为向量值映照各分量相对于自变量各分量的偏导数；上述整个过程对于理解可微性定义至关重要。② 向量值映照的方向导数，通过极限定义；当可微时，则对所有的方向导数存在；沿 Cartesian 坐标轴的方向导数定义为向量值映照对自变量各分量的偏导数，由此 Jacobi 阵的每一列可理解为向量值映照的各个偏导数，此概念直接服务于今后引入曲线坐标系（微分同胚）所诱导的局部基。③ 多元函数的高阶偏导数。多元函数高阶偏导数的定义基于低一阶多元偏导函数之有关坐标轴的方向导数。本课程不拟引入向量值映照的“高阶导数”，因为这需要引入抽象空间之间的线性映照。
2. 导数计算的充分性方法 ① 复合向量值映照的可微性定理。分析过程基于复合向量值映照的极限定理，注意有关非接触性条件的处理。② 复合向量值映照可微性定理直接提供了复合映照导数的链式求导法则，要求掌握向量值映照复合向量值映照的一般情形，基于分块矩阵运算，亦即矩阵形式的链式求导法则。这种形式对于今后处理由隐映照定理决定的隐映照之导数运算十分重要。③ 向量值映照导数的几何应用。（i）我们将 m 维 Euclid 空间中的曲线认识为单参数向量值映照，其 Jacobi 阵为列向量，即为曲线在当地的切向量；按可微性定义认识曲线当地切线的意义。（ii）曲面认识为参数为 m-1 维的向量值映照，其 Jacobi 阵如为列满秩，则其各个列向量（值域空间中各坐标曲线切向量）构成当地 m-1 维切空间；说明曲面上曲线的切向量一定位于切空间之中；按线性代数中齐次线性方程组有关结论获得法向量的确定方法。
3. 导数计算的极限方法 对于平面上分片定义的多元函数，在分片的边界上连续性、可微性、二阶及高阶导数的计算一般需要按极限定义进行极限分析获得。

§02-offline 线下讲授与讨论内容

向量值映照/多元函数导数的计算方法 ① 向量值映照的可微性定义，获得 Jacobi 矩阵包括充分性方法与极限分析方法。② 导数计算的充分性方法，包括多元函数偏导数计算的四则运算；复合向量值映照的可微性定理，矩阵形式的链式求导。③ 导数计算的极限分析方法。

§01-教学视频目录

基本内容：向量值映照的可微性-2018-2019 学年第二学期

01. 向量值映照的可微性-Part 01：回顾一元函数的变化率 时长：12m11s
02. 向量值映照的可微性-Part 01：单参数向量值映照的变化率 时长：12m32s
    向量值映照的可微性-Part 01：单参数向量值映照的变化率 时长：07m29s
03. 向量值映照的可微性-Part 01：事例：螺旋线 时长：11m52s
04. 向量值映照的可微性-Part 02：可微性的图示化 时长：10m02s
05. 向量值映照的可微性-一阶线性近似 时长：04m44s
06. 向量值映照的可微性-一阶线性近似的计算 时长：10m56s
    向量值映照的可微性-一阶线性近似的计算 时长：11m19s
    向量值映照的可微性-一阶线性近似的计算 时长：09m49s
    向量值映照的可微性-一阶线性近似的计算 时长：06m12s
07. 向量值映照的可微性-一阶线性近似的表达 时长：11m19s
08. 向量值映照的可微性-一阶偏导数 时长：06m28s
09. 向量值映照的可微性-一阶偏导数的几何意义 时长：12m58s
10. 向量值映照的可微性-Part 03：事例：旋成体-Part 01 时长：07m16s
    向量值映照的可微性-Part 03：事例：旋成体-Part 02 时长：05m24s
    向量值映照的可微性-Part 03：事例：旋成体-Part 03 时长：08m28s
    向量值映照的可微性-Part 03：事例：旋成体-Part 04 时长：11m44s
    向量值映照的可微性-Part 03：事例：旋成体-Part 05 时长：10m26s
11. 向量值映照的可微性-Part 03：事例：非规则球面-Part 01 时长：05m54s
    向量值映照的可微性-Part 03：事例：非规则球面-Part 02 时长：10m22s
12. 复合向量值映照的可微性定理：定理的内容 时长：06m56s
13. 复合向量值映照的可微性定理：定理的证明 01 时长：10m35s
    复合向量值映照的可微性定理：定理的证明 01 时长：10m09s

方法化：向量值映照导数的计算-2015-2016 学年第二学期

01. 向量值映照导数的计算-Part 01-事例 01-Part 01-连续性 时长：04m53s
02. 向量值映照导数的计算-Part 01-事例 01-Part 02-可微性 时长：10m35s
03. 向量值映照导数的计算-Part 01-事例 01-Part 03-偏导数 时长：09m45s
04. 向量值映照导数的计算-Part 02-方法概述-Part 01-分片定义函数的极限分析 时长：07m41s
05. 向量值映照导数的计算-Part 02-方法概述-Part 02-分片定义函数的偏导数计算 时长：02m21s
06. 向量值映照导数的计算-Part 03-复合向量值映照可微性定理-Part 01-阐述复合的意义及相关结论 时长：06m25s

07. 向量值映照导数的计算-Part 03-复合向量值映照可微性定理-Part 02-回顾一元函数复合的结论及分析 时长：08m00s
08. 向量值映照导数的计算-Part 03-复合向量值映照可微性定理-Part 03-分析-连续性 时长：11m06s
09. 向量值映照导数的计算-Part 03-复合向量值映照可微性定理-Part 04-分析-可微性 01 时长：11m45s
向量值映照导数的计算-Part 03-复合向量值映照可微性定理-Part 04-分析-可微性 01 时长：06m40s
10. 向量值映照导数的计算-Part 03-复合向量值映照可微性定理-Part 05-链式求导-Part 01-数值形式 时长：12m20s
11. 向量值映照导数的计算-Part 03-复合向量值映照可微性定理-Part 05-链式求导-Part 02-矩阵形式 时长：18m40s
向量值映照导数的计算-Part 03-复合向量值映照可微性定理-Part 05-链式求导-Part 02-矩阵形式 时长：07m05s

§03 第 03 周

§03-online 线上学习内容

1. 基于直线单参数化的有限增量公式或估计 ① 直线单参数化的基本思想。② 多元函数在直线段上的 Lagrange 中值定理；向量值映照在直线段上的有限增量估计。
2. 基于直线单参数化的相关分析结论 ① 多元函数可微性的一个充分性条件。② 多元函数混合偏导数可交换次序的两个充分性条件。

§03-offline 线下讲授与讨论内容

基于直线段上多元函数的 Lagrange 中值定理的相关分析结论 ① 基于直线单参数化获得直线段上多元函数的 Lagrange 中值定理。② 获得多元函数可微性的一个充分性条件。③ 获得多元函数混合偏导数可交换次序的两个充分性条件。

§03-教学视频目录

基本内容：单参数化的思想与相关结论-2018-2019 学年第二学期

01. 曲线单参数化：概述与回顾 时长：06m17s
02. 曲线单参数化：曲线单参数化的图示化 时长：08m30s
03. 曲线单参数化：研究沿曲线的变化率 时长：08m01s
曲线单参数化：研究沿曲线的变化率 时长：06m52s
曲线单参数化：研究沿曲线的变化率 时长：12m04s
04. 曲线单参数化：沿直线的变化率（方向导数）-Part 01 时长：09m18s
曲线单参数化：沿直线的变化率（方向导数）-Part 02 时长：09m31s
曲线单参数化：沿直线的变化率（方向导数）-Part 03 时长：07m34s
05. 直线单参数化：直线段上多元函数的 Lagrange 中值定理-Part 01 时长：05m34s
直线单参数化：直线段上多元函数的 Lagrange 中值定理-Part 02 时长：08m57s

直线单参数化：直线段上多元函数的 Lagrange 中值定理-Part 03 时长：06m45s
直线单参数化：直线段上多元函数的 Lagrange 中值定理-Part 04 时长：08m35s
直线单参数化：直线段上多元函数的 Lagrange 中值定理-Part 05 时长：06m21s
直线单参数化：直线段上多元函数的 Lagrange 中值定理-Part 06 时长：07m16s
直线单参数化：直线段上多元函数的 Lagrange 中值定理-Part 07 时长：10m23s
直线单参数化：直线段上多元函数的 Lagrange 中值定理-Part 08 时长：07m10s
直线单参数化：沿坐标轴的 Lagrange 中值定理 时长：05m34s

06. 直线单参数化的应用-Part 01：可微性的充分性条件-Part 01 时长：06m48s
直线单参数化的应用-Part 01：可微性的充分性条件-Part 02 时长：07m17s
直线单参数化的应用-Part 01：可微性的充分性条件-Part 03 时长：12m18s

07. 直线单参数化的应用-Part 02：混合偏导数可以交换次序的充分性条件-Part 01 时长：09m03s
直线单参数化的应用-Part 02：混合偏导数可以交换次序的充分性条件-Part 02 时长：03m40s
直线单参数化的应用-Part 02：混合偏导数可以交换次序的充分性条件-Part 03 时长：04m06s
直线单参数化的应用-Part 02：混合偏导数可以交换次序的充分性条件-Part 04 时长：04m58s
直线单参数化的应用-Part 02：混合偏导数可以交换次序的充分性条件-Part 05 时长：06m40s
直线单参数化的应用-Part 02：混合偏导数可以交换次序的充分性条件-Part 06 时长：09m38s
直线单参数化的应用-Part 02：混合偏导数可以交换次序的充分性条件-Part 07 时长：11m00s
直线单参数化的应用-Part 02：混合偏导数可以交换次序的充分性条件-Part 08 时长：07m59s
直线单参数化的应用-Part 02：混合偏导数可以交换次序的充分性条件-Part 09 时长：05m54s

§04 第 04 周

§04-online 线上学习内容

1. 隐映照定理的分析 ① 基于直线单参数化获得直线段上向量值映照的有限增量估计，回顾直线段上多元函数的 Lagrange 中值定理。② 有限维 Euclid 空间中有界闭集上的压缩映照定理（不动点定理）。③ 基于压缩映照定理，构造性地证明隐映照定理
2. 隐映照定理的应用——曲线与曲面的隐式表示 ① m 维 Euclid 空间中 1 维曲面的隐式表示，并曲线的切向量、切线。② m+1 维 Euclid 空间中 m 维曲面的隐式表示，并确定曲面的坐标线的切向量、切空间、法向量。③ m 维 Euclid 空间中 k 维曲面的隐式表示，实

际给出了 k 维曲面的局部 Monge 型表示的存在性，亦即 m 维 Euclid 空间中一个点的 m 个 Cartesian 坐标中的 k 个决定其它 m-k 个，并确定 k 维曲面相对于自变量各分量的变化率，亦即确定曲面向量值映照的 Jacobi 矩阵。

§04-offline 线下讲授与讨论内容

1. 证明隐映照定理
2. 隐式表示的曲线与曲面的分析方法 ① 隐映照定理，分析要义包括：（ⅰ）直线段上向量值映照的有限增量估计；（ⅱ）压缩映照定理。② 隐映照定理的几何解释，即为 m 维 Euclid 空间中 k 维曲面的局部 Monge 型表示。③ 基于矩阵形式链式求导，可以获得 Monge 曲面关于自变量各个分量的变化率，亦即确定曲面映照额 Jacobi 矩阵。④ m 维 Euclid 空间中 k 维曲面的两个特殊事例：（ⅰ）m 维 Euclid 空间中 1 维曲面，亦即曲线；（ⅱ）m+1 维 Euclid 空间中 m 维曲面。

§04-教学视频目录

基本内容：隐映照定理-2018-2019 学年第二学期

01. 隐映照定理-概念：因果分解 时长：09m36s
02. 隐映照定理-因果分解的图示化-Part 01 时长：11m20s
    隐映照定理-因果分解的图示化-Part 02 时长：10m07s
03. 隐映照定理-因果分解的条件 时长：10m48s
04. 隐映照定理-隐映照定理的图示化-Part 01 时长：10m42s
    隐映照定理-隐映照定理的图示化-Part 02 时长：04m40s
05. 隐映照定理-压缩映照定理与不动点-Part 01 时长：08m18s
    隐映照定理-压缩映照定理与不动点-Part 02 时长：06m45s
    隐映照定理-压缩映照定理与不动点-Part 03 时长：05m38s
06. 隐映照定理-向量值映照的有限增量估计 时长：07m53s
    隐映照定理-向量值映照的有限增量估计 时长：07m12s
07. 隐映照定理-基于压缩映照定理证明隐映照定理-Part 01 时长：12m55s
    隐映照定理-基于压缩映照定理证明隐映照定理-Part 02 时长：07m28s
    隐映照定理-基于压缩映照定理证明隐映照定理-Part 03 时长：08m09s
08. 隐映照定理-问题概述 时长：03m20s
09. 隐映照定理-证明隐映照的连续性 时长：10m10s
10. 隐映照定理-证明隐映照的可微性 时长：10m04s
    隐映照定理-证明隐映照的可微性 时长：05m40s
    隐映照定理-证明隐映照的可微性 时长：08m24s
11. 隐映照定理-隐映照导数的计算方法-Part 01 时长：08m55s
    隐映照定理-隐映照导数的计算方法-Part 02 时长：07m55s
12. 隐映照定理-分析事例-Part 01 时长：07m53s
    隐映照定理-分析事例-Part 02 时长：10m26s
    隐映照定理-分析事例-Part 03 时长：11m25s
    隐映照定理-分析事例-Part 04 时长：05m16s

基本内容：隐映照定理的几何应用-2015-2016 学年第二学期

01. 隐映照定理的应用-Part 01-曲线与曲面的隐式表示-Part 01-定理内容：-Part 01 时长：12m00s

隐映照定理的应用-Part 01-曲线与曲面的隐式表示-Part 01-定理内容：-Part 02 时长：00m56s

02. 隐映照定理的应用-Part 01-曲线与曲面的隐式表示-Part 02-四维空间中曲面-Part 01-局部 Monge 型化：-Part 01 时长：05m35s

隐映照定理的应用-Part 01-曲线与曲面的隐式表示-Part 02-四维空间中曲面-Part 01-局部 Monge 型化：-Part 02 时长：09m00s

隐映照定理的应用-Part 01-曲线与曲面的隐式表示-Part 02-四维空间中曲面-Part 01-局部 Monge 型化：-Part 03 时长：12m57s

03. 隐映照定理的应用-Part 01-曲线与曲面的隐式表示-Part 03-四维空间中曲线-Part 01-局部 Monge 型化：-Part 01 时长：14m50s

隐映照定理的应用-Part 01-曲线与曲面的隐式表示-Part 03-四维空间中曲线-Part 01-局部 Monge 型化：-Part 02 时长：09m00s

04. 隐映照定理的应用-Part 01-曲线与曲面的隐式表示-Part 03-四维空间中曲线-Part 02-隐映照的导数计算：-Part 01 时长：13m30s

隐映照定理的应用-Part 01-曲线与曲面的隐式表示-Part 03-四维空间中曲线-Part 02-隐映照的导数计算：-Part 02 时长：13m50s

05. 隐映照定理的应用-Part 01-曲线与曲面的隐式表示-Part 03-四维空间中曲线-Part 03-计算曲线的切向量：-Part 01 时长：12m15s

隐映照定理的应用-Part 01-曲线与曲面的隐式表示-Part 03-四维空间中曲线-Part 03-计算曲线的切向量：-Part 02 时长：10m55s

应用事例：隐映照的导数计算-2015-2016 学年第二学期

01. 隐映照的导数计算-Part 01-方法 时长：08m35s

隐映照的导数计算-Part 01-方法 时长：14m45s

02. 隐映照的导数计算-Part 02-事例-Part 01-事例 01 时长：04m40s

隐映照的导数计算-Part 02-事例-Part 01-事例 01 时长：11m10s

隐映照的导数计算-Part 02-事例-Part 01-事例 01 时长：14m50s

03. 隐映照的导数计算-Part 02-事例-Part 02-事例 02 时长：08m13s

隐映照的导数计算-Part 02-事例-Part 02-事例 02 时长：10m26s

隐映照的导数计算-Part 02-事例-Part 02-事例 02 时长：08m04s

§05 第 05 周

§05-online 线上学习内容

无限小增量公式及有限增量公式 ① 基于直线单参数化，获得多元函数的无限小增量公式及有限增量公式都是将自变量变化限制在直线段上，由此应用一维函数的无限小增量公式及有限增

量公式，并结合复合映照的可微性定理，可获得相关结论。② 多元函数的无限小分析方法，亦即获得多元函数的局部意义下的高阶多元多项式逼近的实际方法。

§05-offline 线下讲授与讨论内容

多元函数的无限小分析方法 ① 基于直线单参数化，获得方向导数形式的多元函数的无限小增量公式。② 多元函数的高阶多元多项式逼近的唯一性。③ Landau 符号的性质。④ 基于多元函数的高阶多元多项式逼近的唯一性，说明实际获得复杂多元函数的高阶多元多项式逼近的间接性方法。⑤ 多元函数展开至二阶的几何意义，结合线性代数中二次型理论获得函数等高线的类别判定。 ⑥ 多元函数极值类别的判定。

§05-教学视频目录

方法化：向量值映照的无限小分析方法-2018-2019 学年第二学期

01. 向量值映照的无限小分析方法-回顾一元函数的无限小分析方法 01 时长：09m24s
    向量值映照的无限小分析方法-回顾一元函数的无限小分析方法 02 时长：08m38s
    向量值映照的无限小分析方法-回顾一元函数的无限小分析方法 03 时长：09m19s
02. 向量值映照的无限小分析方法-建立无限小增量公式 时长：10m50s
03. 向量值映照的无限小分析方法-建立无限小增量公式-图示化 时长：08m55s
04. 向量值映照的无限小分析方法-建立无限小增量公式-方向导数形式 01 时长：05m04s
    向量值映照的无限小分析方法-建立无限小增量公式-方向导数形式 02 时长：11m32s
05. 向量值映照的无限小分析方法-建立无限小增量公式-偏导数形式 01 时长：09m24s
    向量值映照的无限小分析方法-建立无限小增量公式-偏导数形式 02 时长：08m16s
    向量值映照的无限小分析方法-建立无限小增量公式-偏导数形式 03 时长：11m43s
06. 向量值映照的无限小分析方法-建立无限小增量公式-总结 时长：05m30s
07. 向量值映照的无限小分析方法-多项式逼近的唯一性 01 时长：03m59s
    向量值映照的无限小分析方法-多项式逼近的唯一性 02 时长：12m08s
    向量值映照的无限小分析方法-多项式逼近的唯一性 03 时长：08m39s
    向量值映照的无限小分析方法-多项式逼近的唯一性 04 时长：11m38s
    向量值映照的无限小分析方法-多项式逼近的唯一性 05 时长：07m38s
    向量值映照的无限小分析方法-多项式逼近的唯一性 06 时长：11m17s
    向量值映照的无限小分析方法-多项式逼近的唯一性 07 时长：04m58s
08. 向量值映照的无限小分析方法-事例 01 时长：10m31s
    向量值映照的无限小分析方法-事例 01 时长：03m25s
    向量值映照的无限小分析方法-事例 01 时长：12m25s
09. 向量值映照的无限小分析方法-事例 02 时长：12m07s
    向量值映照的无限小分析方法-事例 02 时长：09m20s
    向量值映照的无限小分析方法-事例 02 时长：06m09s
    向量值映照的无限小分析方法-事例 02 时长：09m17s
    向量值映照的无限小分析方法-事例 02 时长：04m32s

§06 第 06 周

§06-online 线上学习内容

1. 约束上最值问题 ① 基于隐映照定理，将约束上的极值问题化成自由极值问题：一般约束方程可理解为 m 维 Euclid 空间中 k 维曲面（1<k<m）的隐式表示形式；由于目标函数定义在曲面（约束）之上，通过曲面的局部 Monge 型表示，故原目标函数等价于直接定义在曲面定义域上的函数。② 基于矩阵形式的链式求导，获得约束上极值点的控制方程。③ 将约束上的分布/标量场展开至二阶，以此研究约束上极值点的类别。就此过程，推导出 Lagrange 条件极值的系统性处理方法（Lagrange 乘子法）。② 其它应用。
2. 约束上最值问题的相关应用 ① 获得相关不等式。

§06-offline 线下讲授与讨论内容

§06-教学视频目录

方法化：约束上最值问题的处理方法-2015-2016 学年第二学期

01. 约束最值-Part 01-将约束极值转化为自由极值 01 时长：06m00s
    约束最值-Part 01-将约束极值转化为自由极值 02 时长：07m30s
02. 约束最值-Part 02-获得临界点方程 时长：09m10s
    约束最值-Part 02-获得临界点方程 时长：09m15s
    约束最值-Part 02-获得临界点方程 时长：08m10s
03. 约束最值-Part 03-研究极值类别 时长：10m20s
    约束最值-Part 03-研究极值类别 时长：13m15s
    约束最值-Part 03-研究极值类别 时长：11m35s
04. 约束最值-Part 04-导出 Lagrange 函数 时长：20m24s
05. 约束最值-Part 05-应用事例 时长：14m10s
    约束最值-Part 05-应用事例 时长：10m50s

应用事例

§07 第 07 周

§07-online 线上学习内容

1. 逆映照定理的分析 ① 基于隐映照定理，获得逆映照定理。② 微分同胚的定义，隐映照定理亦称为局部微分同胚存在性定理；基于局部微分同胚存在性定理可获得全局微分同胚存在性定理（充分必要条件）。
2. 微分同胚的意义 微分同胚提供了将“不规则区域”（物理域）变化为“规则区域”（参数域）的一般方法，籍此可以将发生在物理域上的事件“等价性”地转换为参数域上的事件，具体为将物理域上的偏微分方程转换为参数域上的偏微分方程；逆映照定理提供了全部的细节需要。

§07-offline 线下讲授与讨论内容

方程变化的方法 ① 自变量变化的两种形式及其处理方法。② 因变量变换的一般形式及其处理方法。

§07-教学视频目录

基本内容：微分同胚-2015-2016 学年第二学期

01. 微分同胚-Part 01-局部微分同胚存在性定理-Part 01-回顾隐映照定理 时长：05m50s

02. 微分同胚-Part 01-局部微分同胚存在性定理-Part 02-分析 时长：12m52s

微分同胚-Part 01-局部微分同胚存在性定理-Part 02-分析 时长：14m50s

微分同胚-Part 01-局部微分同胚存在性定理-Part 02-分析 时长：06m05s

微分同胚-Part 01-局部微分同胚存在性定理-Part 02-分析 时长：03m52s

微分同胚-Part 01-局部微分同胚存在性定理-Part 02-分析 时长：06m26s

03. 微分同胚-Part 02-全局微分同胚存在性定理-Part 01-阐述微分同胚 时长：04m39s

04. 微分同胚-Part 02-全局微分同胚存在性定理-Part 02-分析 时长：09m25s

05. 微分同胚-Part 03-微分同胚的应用事例-Part 01-非规则球体-Part 01-一般处理 时长：00m33s

微分同胚-Part 03-微分同胚的应用事例-Part 01-非规则球体-Part 01-一般处理 时长：05m16s

微分同胚-Part 03-微分同胚的应用事例-Part 01-非规则球体-Part 01-一般处理 时长：05m27s

06. 微分同胚-Part 03-微分同胚的应用事例-Part 01-非规则球体-Part 02-方程转换-Part 01-一般处理 时长：10m50s

07. 微分同胚-Part 03-微分同胚的应用事例-Part 01-非规则球体-Part 02-方程转换-Part 02-处理一阶导数 时长：03m06s

微分同胚-Part 03-微分同胚的应用事例-Part 01-非规则球体-Part 02-方程转换-Part 02-处理一阶导数 时长：11m55s

08. 微分同胚-Part 03-微分同胚的应用事例-Part 01-非规则球体-Part 03-建立微分同胚-Part 01-说明单射 时长：12m15s

09. 微分同胚-Part 03-微分同胚的应用事例-Part 01-非规则球体-Part 03-建立微分同胚-Part 02-计算 Jacobi 矩阵 时长：13m14s

10. 微分同胚-Part 03-微分同胚的应用事例-Part 01-非规则球体-Part 03-建立微分同胚-Part 03-说明区域 时长：03m00s

11. 微分同胚-Part 03-微分同胚的应用事例-Part 01-非规则球体-Part 04-方程转换-Part 01-处理一阶导数 时长：15m12s

12. 微分同胚-Part 03-微分同胚的应用事例-Part 01-非规则球体-Part 04-方程转换-Part 0-处理二阶导数 时长：03m55s

微分同胚-Part 03-微分同胚的应用事例-Part 01-非规则球体-Part 04-方程转换-Part 0-处理二阶导数 时长：10m30s

—— **阶段性考试-03：高维微分学**

第二部分 有限维 Euclid 空间上的积分学

§08 第 08 周

§08-online 线上学习内容

1. 闭方块上有界函数 Darboux 和分析 ① Riemann 积分部分和的极限定义，澄清其 Cauchy 叙述、Heine 叙述以及 Cauchy 收敛原理。 ② Darboux 大和及小和的分析性质，主要为“和谐式估计”；引入振幅和。相关内容完全类比于闭区间上情形。
2. Riemann 可积的振幅和判别法 ① Darboux 和判别法。② Riemann 判别法。③ Riemann 可积函数类。相关内容完全类比于闭区间上情形。
3. Lebesgue 定理

§08-offline 线下讲授与讨论内容

1. 闭方块上 Riemann 可积的 Lebesgue 定理 需引入 Lebesgue 零测集概念，给出证明细节（反映 Riemann 积分的本质性质）。
2. Riemann 可积函数的基本性质 ① 一般允许集上 Riemann 积分的定义。② 非负可积函数的积分为零，则其几乎处处为零。

§08-教学视频目录

基本内容：闭方块上 Riemann 积分的定义及其基本分析结论-2015-2016 学年第二学期

01. 闭方块上 Riemann 积分的定义及其基本分析结论-Part 01-Riemann 积分的定义-Part 01 时长：13m30s
闭方块上 Riemann 积分的定义及其基本分析结论-Part 01-Riemann 积分的定义-Part 02 时长：13m35s

02. 闭方块上 Riemann 积分的定义及其基本分析结论-Part 02-Riemann 可积必有界-Part 01 时长：02m55s
闭方块上 Riemann 积分的定义及其基本分析结论-Part 02-Riemann 可积必有界-Part 02 时长：08m15s

03. 闭方块上 Riemann 积分的定义及其基本分析结论-Part 03-Darboux 和及其和谐式估计-Part 01 时长：07m31s
闭方块上 Riemann 积分的定义及其基本分析结论-Part 03-Darboux 和及其和谐式估计-Part 02 时长：14m45s
闭方块上 Riemann 积分的定义及其基本分析结论-Part 03-Darboux 和及其和谐式估计-Part 03 时长：10m48s

04. 闭方块上 Riemann 积分的定义及其基本分析结论-Part 04-基于 Darboux 和和谐式估计的结论-Part 01 时长：16m10s
闭方块上 Riemann 积分的定义及其基本分析结论-Part 04-基于 Darboux 和和谐式估计的结论-Part 02 时长：08m45s

05. 闭方块上 Riemann 积分的定义及其基本分析结论-Part 05-Riemann 可积的等价性判定方法及其应用-Part 01 时长：12m15s
闭方块上 Riemann 积分的定义及其基本分析结论-Part 05-Riemann 可积的等价性判定方法及其应用-Part 02 时长：05m20s

闭方块上 Riemann 积分的定义及其基本分析结论-Part 05-Riemann 可积的等价性判定方法及其应用-Part 03 时长：15m55s

基本内容：Lebesgue 定理-2015-2016 学年第二学期

01. Lebesgue 定理-Part 01-分析基础-Part 01-零测集 01 时长：06m54s
    Lebesgue 定理-Part 01-分析基础-Part 01-零测集 02 时长：13m25s
02. Lebesgue 定理-Part 02-分析要义-Part 01-函数关于点的振幅 时长：05m34s
    Lebesgue 定理-Part 02-分析要义-Part 01-函数关于点的振幅 时长：01m58s
    Lebesgue 定理-Part 02-分析要义-Part 01-函数关于点的振幅 时长：07m20s
03. Lebesgue 定理-Part 02-分析要义-Part 02-Cantor 定理 时长：08m15s
    Lebesgue 定理-Part 02-分析要义-Part 02-Cantor 定理 时长：02m00s
04. Lebesgue 定理-Part 03-由 Riemann 可积证明不连续点为零测集-Part 01-基本处理 时长：11m00s
    Lebesgue 定理-Part 03-由 Riemann 可积证明不连续点为零测集-Part 01-基本处理 时长：14m45s
05. Lebesgue 定理-Part 03-由 Riemann 可积证明不连续点为零测集-Part 02-精细说明-Part 01-零测集的确界刻画 时长：12m28s
06. Lebesgue 定理-Part 03-由 Riemann 可积证明不连续点为零测集-Part 02-精细说明-Part 02-有限覆盖定理 时长：12m15s
07. Lebesgue 定理-Part 03-由 Riemann 可积证明不连续点为零测集-Part 02-精细说明-Part 03-零测集有关说明 时长：06m05s
    Lebesgue 定理-Part 03-由 Riemann 可积证明不连续点为零测集-Part 02-精细说明-Part 03-零测集有关说明 时长：12m00s
08. Lebesgue 定理-Part 04-由不连续点全体为零测集证明 Riemann 可积-Part 01-基本思想 时长：05m40s
09. Lebesgue 定理-Part 04-由不连续点全体为零测集证明 Riemann 可积-Part 02-基本处理时长：09m31s
10. Lebesgue 定理-Part 04-由不连续点全体为零测集证明 Riemann 可积-Part 03-精细说明 时长：15m25s

§09 第 09 周

§09-online 线上学习内容

1. 曲线上的积分 ① 第一类曲线积分，质量型积分。② 第二类曲线积分，做功型积分。
2. 曲面上的积分 ① 第一类曲面积分，质量型积分。② 第二类曲面积分，通量型积分。③ 标量函数数乘法向量在曲面上积分，压力型积分。

§09-offline 线下讲授与讨论内容

1. 曲线、曲面上积分的通识性结构 ① 积分的基本思想：整体细分、局部近似、引入极限。② 曲线的切线段近似；曲线上的累积效应。③ 曲面的切平面片近似；曲面上的累积效应。④ 不同局部近似具有相同极限的结构。
2. 曲线、曲面上积分的表达式、定义式、计算式 ① 曲线上积分的表达式、定义式、计算式。② 曲面上积分的表达式、定义式、计算式。

§09-教学视频目录

基本内容：基于可微性的曲线与曲面上积分的建模-2015-2016 学年第二学期

01. 基于可微性的曲线与曲面上积分的建模-Part 01-曲线与曲面的向量值映照 时长：04m40s

02. 基于可微性的曲线与曲面上积分的建模-Part 02-曲线上的积分 时长：16m42s

03. 基于可微性的曲线与曲面上积分的建模-Part 03-曲面上的积分-Part 01-曲面的分割 时长：02m08s

04. 基于可微性的曲线与曲面上积分的建模-Part 03-曲面上的积分-Part 02-曲面的可微性与切平面近似 时长：13m18s

基于可微性的曲线与曲面上积分的建模-Part 03-曲面上的积分-Part 02-曲面的可微性与切平面近似 时长：16m42s

05. 基于可微性的曲线与曲面上积分的建模-Part 03-曲面上的积分-Part 03-曲面上的积分 时长：06m50s

基于可微性的曲线与曲面上积分的建模-Part 03-曲面上的积分-Part 03-曲面上的积分 时长：05m51s

06. 基于可微性的曲线与曲面上积分的建模-Part 03-曲面上的积分-Part 04-由折线构成的面积近似 时长：03m50s

基于可微性的曲线与曲面上积分的建模-Part 03-曲面上的积分-Part 04-由折线构成的面积近似 时长：06m40s

基于可微性的曲线与曲面上积分的建模-Part 03-曲面上的积分-Part 04-由折线构成的面积近似 时长：07m30s

基于可微性的曲线与曲面上积分的建模-Part 03-曲面上的积分-Part 04-由折线构成的面积近似 时长：11m45s

基于可微性的曲线与曲面上积分的建模-Part 03-曲面上的积分-Part 04-由折线构成的面积近似 时长：04m20s

§10 第 10 周

§10-online 线上学习内容

1. Fubini 定理 按 Riemann 积分的 Darboux 和分析，证明 Fubini 定理（不失一般性，可基于闭方块形式加以说明）。
2. 具有零测集修正的体积分换元公式 ① 微分同胚下可测集的基本性质。② 积分换元公式的系统性结论：可划分为三个定理；清晰叙述相关内容，要求在实际应用中严格检验相

关条件。③ 零测集的若干事例。④ 积分换元公式的系统性证明，主要技术要点为：（ⅰ）微分同胚下零测集的性质；（ⅱ）微分同胚局部可分解为简单微分同胚之复合；（ⅲ）有关零测集的处理。注：细节可暂不做要求。④高维广义积分定义及有关结论。

§ 10-offline 线下讲授与讨论内容

1. 证明 Fubini 定理
2. 重积分具体计算方法 积分换元公式及 Fubini 定理实质性地提供了重积分计算的解决方案。应用事例，包括（广义）球坐标系、（广义）柱坐标系、线性变换等基本变换形式；在建立微分同胚时，可以基于参数域至物理域或者物理域至参数域二种映照形式。

§ 10-教学视频目录

基本内容：Fubini 定理及其用应用-2015-2016 学年第二学期

01. Fubini 定理及其应用-Part 01-Fubini 定理-Part 01-应用背景 时长：10m20s

02. Fubini 定理及其应用-Part 01-Fubini 定理-Part 02-基于部分和的分析 时长：11m35s

    Fubini 定理及其应用-Part 01-Fubini 定理-Part 02-基于部分和的分析 时长：05m10s

03. Fubini 定理及其应用-Part 01-Fubini 定理-Part 03-基于 Darboux 和的分析 时长：11m07s

    Fubini 定理及其应用-Part 01-Fubini 定理-Part 03-基于 Darboux 和的分析 时长：06m48s

    Fubini 定理及其应用-Part 01-Fubini 定理-Part 03-基于 Darboux 和的分析 时长：13m27s

04. Fubini 定理及其应用-Part 01-Fubini 定理-Part 04-获得累次积分的结论 时长：10m12s

05. Fubini 定理及其应用-Part 02-允许集上的积分-Part 01-允许集上积分的定义 时长：10m18s

§ 11 第 11 周

§ 11-online 线上学习内容

1. 曲面积分与体积分之间的相互转化 Gauss-Astrogradskii 公式，建立了曲面积分及体积分之间的关系。（ⅰ）其理论基础，即为一元微积分中的 Newton-Leibinze 公式；Gauss-Astrogradskii 公式对相关向量场的正则性可有两种要求，其一为直至边界连续可微；其二为内部连续可微以及直至边界连续，此种情形需要体积意义下内部逼近。（ⅱ）按上述分析，Gauss-Astrogradskii 公式可有二种形式，其一面上积分为向量值的通量；其二面上积分为标量函数数乘单位法向量的积分，后者提供了阿基米德浮力定理的直接证明。
2. 平面上曲线积分与面积分之间的相互转化 Green 公式，建立了平面上线积分同面积分之间的关系。（ⅰ）可在特定柱型体上对平面向量值应用 Gauss-Astrogradskii 公式，可获

得二种形式的 Green 公式，其一线上积分为做功型，其二线上积分为通量型。(ii) Green 公式对平面向量场正则性的要求完全继承 Gauss-Astrogradskii 公式的相关要求。

3. 曲线积分与曲面积分之间的相互转化 Stokes 公式，建立了三维空间中线积分同面积分之间的关系。理论分析上可从做功形式的线积分开始计算，作为曲面边界的三维曲线其原像为二维参数域的边界，对此可引入单参数向量值映照；由此通过复合映照形式给出三维空间中曲线的向量值映照；经曲面参数域上的 Green 公式，结合分块矩阵运算，可获得原向量值做功形式的线积分等于其旋度在曲面上的通量；三维向量值之旋度，为其 Jacobian 阵的反称化矩阵所确定的对偶向量。

§11-offline 线下讲授与讨论内容

1. Gauss-Astrogradskii 公式 ① 证明结论。② 应用形式。
2. Green 公式 ① 证明结论。② 应用形式。
3. Stokes 公式 ① 证明结论。② 应用形式。

§11-教学视频目录

基本内容：积分关系式-2015-2016 学年第二学期

01. 积分关系式-Part 01-回顾曲线与曲面上积分 时长：16m35s
    积分关系式-Part 01-回顾曲线与曲面上积分 时长：16m45s
    积分关系式-Part 01-回顾曲线与曲面上积分 时长：02m32s
02. 积分关系式-Part 02-Gauss-Ostrogradskii 公式-Part 01-柱型体体积上积分 时长：10m30s
03. 积分关系式-Part 02-Gauss-Ostrogradskii 公式-Part 02-柱型体上下表面上的积分 时长：11m00s
04. 积分关系式-Part 02-Gauss-Ostrogradskii 公式-Part 03-柱型体侧面上的积分 时长：15m10s
05. 积分关系式-Part 02-Gauss-Ostrogradskii 公式-Part 04-获得一般形式的 Gauss-Ostrogradskii 公式 时长：09m25s
06. 积分关系式-Part 02-Gauss-Ostrogradskii 公式-Part 05-回顾分析过程 时长：15m18s
07. 积分关系式-Part 02-Gauss-Ostrogradskii 公式-Part 06-曲面积分等同于体积分的二种形式 时长：09m30s
08. 积分关系式-Part 02-Gauss-Ostrogradskii 公式-Part 07-获得浮力定律 时长：12m21s
    积分关系式-Part 02-Gauss-Ostrogradskii 公式-Part 07-获得浮力定律 时长：08m30s
09. 积分关系式-Part 03-Green 公式-Part 01-柱型体体积与侧面上的积分 时长：19m00s
10. 积分关系式-Part 03-Green 公式-Part 02-柱型体侧面上积分的二种处理 时长：13m45s
11. 积分关系式-Part 03-Green 公式-Part 03-获得做功与通量形式的二类 Green 公式 时长：11m50s
12. 积分关系式-Part 03-Green 公式-Part 04-Green 公式的应用事例 时长：13m48s

积分关系式-Part 03-Green 公式-Part 04-Green 公式的应用事例 时长：13m12s

13. 积分关系式-Part 04-Stokes 公式-Part 01-旋转的数学机制 时长：09m10s

积分关系式-Part 04-Stokes 公式-Part 01-旋转的数学机制 时长：16m15s

14. 积分关系式-Part 04-Stokes 公式-Part 02-计算曲线上环量-Part 01-建立曲线向量值映照 时长：11m00s

15. 积分关系式-Part 04-Stokes 公式-Part 02-计算曲线上环量-Part 03-在曲面参数域上运用 Green 公式 时长：24m20s

16. 积分关系式-Part 04-Stokes 公式-Part 03-Stokes 公式的应用事例 时长：22m10s

§12 第 12 周

§12-online 线上学习内容

1. 场论的研究对象为标量场、向量场；按映照观点“场”可理解为自变量为空间位置刻画量的标量值或向量值映照；场论的主要内容即为利用微积分研究各种场及其间的关系。
2. 标量场之梯度，向量场之散度与旋度的物理意义。
3. 无旋场的标量势；一般向量场的标量势及向量势分解，亦即 Stokes-Helmholtz 分解

§12-offline 线下讲授与讨论内容

1. 曲线与曲面上积分的综合应用
2. 数理方程中的相关结论

§12-教学视频目录

—— **阶段性考试-02：高维积分学**

第三部分 级数

§13 第 13 周

§13-online 线上学习内容

1. 数项级数，按极限观点，即为其部分和点列（序列）的极限；由此可按一维 Euclid 空间中点列极限的理论加以研究；特别地，按点列的 Cauchy 收敛原理，级数收敛等价于其部分和点列为 Cauchy 点列。
2. 正项级数敛散性的各种判别法（充分性条件），可以“比较的思想”加以统领，具体内容包括“比较的形式”以及“比较的对象”。
3. 一般数项级数的收敛性研究，主要将部分和点列的 Cauchy 收敛原理结合 Abel 和式估计。一般数项级数绝对收敛与条件收敛的概念及其之间的关系。

§13-offline 线下讲授与讨论内容

1. 正项级数敛散性的判定方法
2. 交叉级数敛散性的判定方法
3. 一般数项级数敛散性的判定方法

§13-教学视频目录

§14 第 14 周

§14-online 线上学习内容

1. 函数项级数 按极限观点，即为其部分和点列（序列）的极限。函数（项）序列的极限，可有共同定义域上点点收敛及一致收敛二种形式。对于一致收敛有相应的 Cauchy 收敛原理；点点收敛基础上可定义极限函数，籍此可进一步研究函数点列是否一致收敛于极限函数。
2. 函数项级数的一致收敛辨别法 主要思想为将部分和点列一致收敛的 Cauchy 收敛原理结合 Abel 和式及其估计。
3. 函数点列的分析性质 主要基于一致收敛性及相关分析（估计）方法；主要结论涉及极限函数的正则性，求极限同求积分或求导数的可交换性。
4. 函数项级数的分析性质 基于函数点列的分析性质，即可获得函数项级数对应的分析性质。
5. 函数的级数表示 （i）一般基于函数的有限增量公式，当其余项随展开项数趋于零，即得点收敛意义的数项级数表示；当数项级数表示可在一定区间上成立，即得函数在此区间的函数项级数表示，实际为多项式形式逼近。（ii）结合函数项级数的分析性质可获得较复杂函数的函数项级数表示。

§14-offline 线下讲授与讨论内容

1. 函数序列一致收敛性的判别方法
2. 函数项级数一致收敛性的判别方法
3. 基于函数序列一致收敛性的分析性质 ① 求极限与求积分可以交换次序的条件。② 求极限与求导数可以交换次序的条件。

§14-教学视频目录

§15 第 15 周

§15-online 线上学习内容

1. 幂级数的收敛域 幂函数为特殊的函数项级数，故函数项级数的相关结论均适用于幂级数。幂级数的收敛半径及收敛域；幂级数同其对应的“逐项求导的幂级数”以及“逐项求积的幂级数”具有相同的收敛半径，但收敛域可以互为独立。
2. 幂级数的内闭一致收敛性 基于函数项级数一致收敛的判别法。
3. 函数的幂级数表示 主要基于基本初等函数的幂级数表示；幂级数的分析性质（直接来源于一般函数项级数的分析性质）；幂级数内闭一致收敛性。
4. 幂级数的应用 ① 函数的幂级数表示及其应用。② 获得幂级数的和函数及其应用。

§15-offline 线下讲授与讨论内容

1. 幂级数收敛域的确定方法 ① 比值判别法。② 基于上下极限的判别法。
2. 幂级数的分析性质 ① 函数序列的分析性质。② 幂级数的分析性质

3. 幂级数的应用 ① 函数的幂级数表示及其应用。② 获得幂级数的和函数及其应用。

§15-教学视频目录

§16 第 16 周

§16-online 线上学习内容

1. 一维实空间上周期函数的三角函数级数（Fourier 级数）表示理论 基于基础性理论，获得某区间上函数的 Fourier 级数表示；正弦或余弦展开的相关方法。
2. 函数内积意义下的三角函数逼近 需涉及抽象的内积空间（函数内积空间），单位正交系（包括 Gram-Schmitz 单位正交化过程）。本部分暂不要求理论分析细节，仅需掌握基本的结论及其应用。

§16-offline 线下讲授与讨论内容

1. Fourier 级数的应用形式
2. 级数方法概述

§16-教学视频目录

—— **阶段性考试-03：级数**

—— **第 17、18 周为考试周 期间进行期末统一性考试**

课内外讨论或练习、实践、体验等环节设计：

本课程实施的“课程工程”（见“授课方式”部分）中含有**研讨课**：一般每周安排二个下午的研讨课，每个下午分两场，每场 2 小时；每场研讨课的内容错开。建议每位同学，每周参加 2 场研讨课，至少应该参加一场。研讨课，主要由助教或任课教师主持，演练与研讨国内外典型教程后的习题，鼓励同学们上黑板解答题目，主持人可以随时提点或矫正思路与做法，并点评解答；鼓励学生之间的相互讨论。另安排有**习题课**：一般隔周周日晚进行，每次约 3 小时。

对于研讨课与习题课涉及的主要思想、方法、习题与解答，本课题提供《研讨日志》，可供学习。

如需配备助教，注明助教工作内容：

本课程需助教 1-2 名，主要工作：① 协助教师准备文本；② 批改作业；③ 与教师合作主持研讨课；④ 主要主持习题课；④ 考试相关事务，包括监考、核对成绩、登入分数、试卷分析等。

考核和评价方式（提供学生课程最终成绩的分数组成，体现形成性的评价过程）：

混合教学班级，本课程实施**“过程性评估”**，主要包括三方面内容，如下所示：

（1）阶段性考试（闭卷，占总评 60%）

1. 一元微分学
2. 一元积分学
3. 常微分方程基础

（2）平时作业与研讨课出勤（占总评 10%）

按记录情况

（3）期末统一性考试（闭卷，占 30%）

一般教学班级，主要包括三方面内容，如下所示：

（1）阶段性考试（闭卷，占总评 25%）

1. 一元微分学
2. 一元积分学
3. 常微分方程基础

（2）平时作业与研讨课出勤（占总评 5%）

按记录情况

（3）期末统一性考试（闭卷，占 70%）

教材和教学参考资料（包括作者、书名、出版社和出版时间）：

作者	教材名称	出版社	出版年月
陈纪修等	《数学分析》	复旦大学出版社	2009
谢锡麟	《微积分讲稿——高维微积分》	复旦大学出版社	2017
吉米多维奇	《数学分析习题集》（根据 2010 年俄文版翻译），俄罗斯数学教材选译	高等教育出版社	2010
张筑生	《数学分析新讲》	北京大学出版社	1999
V.A.Zorich	《Mathematical Analysis》（共 2 卷）（第 4 版），俄罗斯数学教材选译；建议直接用英文版	Springer－Verlag	2004
菲赫金哥尔茨 等	《微分分教程》（第 8 版） 俄罗斯数学教材选译	高等教育出版社	2006
阿黑波夫等	《数学分析讲义》（第 3 版） 俄罗斯数学教材选译	高等教育出版社	2006

表格栏目大小可根据内容加以调整。 2017 年