高维微分学——有限增量公式

复旦力学　谢锡麟

2016 年 3 月 15 日

1　知识要素

1.1　基于单参数直线化的多维函数的有限增量公式

我们已有一维函数的有限增量公式

定理 1.1 (一维函数有限增量公式). 如果 $f(x) \in \mathscr{C}[a,b]$，$f(x) \in \mathscr{C}^p[a,b)$，且在 (a,b) 上存在 $p+1$ 阶导数，则有

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}\frac{d^k f}{dx^k}(a)(b-a)^k + \frac{1}{(p+1)!}\frac{d^{p+1} f}{dx}(a+\theta(b-a))(b-a)^{p+1}, \quad \theta \in (0,1)$$

按单参数直线化的思想，可有

定理 1.2 (多维函数有限增量公式). 如果 $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ 在直线段 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 上连续，在 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 上存在 p 阶沿 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 的方向导数且连续，在 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 上存在 $p+1$ 阶沿 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 的方向导数，则有

$$f(\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial \boldsymbol{e}^k}(\boldsymbol{a}) \cdot |\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|_{\mathbb{R}^M}^k + \frac{1}{(p+1)!}\frac{\partial^{p+1} f}{\partial \boldsymbol{e}^{p+1}}(\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})) \cdot |\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|_{\mathbb{R}^M}^{p+1}$$

此处 $\theta \in (0,1)$。

进一步引入条件，$f(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathscr{D}_x;\mathbb{R})$，$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] \subset \mathscr{D}_x$，则有

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) &+ \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}\left[\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{M} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_k}\cdots\partial x^{i_1}}(\boldsymbol{a}) \cdot |\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|_{\mathbb{R}^M}^{i_k} \cdots |\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|_{\mathbb{R}^M}^{i_1}\right] \\ &+ \frac{1}{(p+1)!}\sum_{i_{p+1},\cdots,i_1=1}^{M} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{i_{p+1}}\cdots\partial x^{i_1}}(\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})) \cdot |\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|_{\mathbb{R}^M}^{i_{p+1}} \cdots |\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|_{\mathbb{R}^M}^{i_1} \end{aligned}$$

此处 $\theta \in (0,1)$。

1.2　基于单参数曲线化的多维函数的有限增量估计

定理 1.3 (多元函数有限增量估计). 设 $\gamma \subset \mathbb{R}^m$ 为 $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ 之定义域 D_x 中连接 A 和 B 二点的光滑曲线，$f(\boldsymbol{x})$ 在 γ 上可微，则有估计

$$|f(B)-f(A)| \leqslant \sup_{\gamma} |\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x})|_{\mathbb{R}^m} |\gamma|$$

此处，$|\gamma|$ 代表曲线的弧长。

分析：考虑连接曲线

$$\boldsymbol{\gamma}(t):[a,b]\ni t\mapsto\boldsymbol{\gamma}(t)\equiv\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^m,\quad \boldsymbol{\gamma}(a)=A,\quad \boldsymbol{\gamma}(b)=B$$

对 $[a,b]$ 引入分割 $P:a=t_0<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_N=b$，以及

$$\phi(t):[t_{i-1},t_i]\ni t\mapsto\phi(t)\triangleq f\circ\boldsymbol{\gamma}(t)\in\mathbb{R}$$

对其应用 Lagrange 中值定理，有

$$f\circ\boldsymbol{\gamma}(t_i)-f\circ\boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})=[\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{\gamma}(\mu_i))\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mu_i)]\,\Delta t_i,\quad \mu_i\in(t_{i-1},t_i)$$

可有估计

$$\begin{aligned}|f\circ\boldsymbol{\gamma}(t_i)-f\circ\boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})|&=|\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{\gamma}(\mu_i))\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mu_i)|\,\Delta t_i\leqslant|\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{\gamma}(\mu_i))|_{\mathbb{R}^m}\,|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mu_i)|_{\mathbb{R}^m}\,\Delta t_i\\&\leqslant\sup_{\gamma}|\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x})|_{\mathbb{R}^m}\,|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mu_i)|_{\mathbb{R}^m}\,\Delta t_i,\quad i=1,\cdots,N\end{aligned}$$

由此可有

$$|f(B)-f(A)|=\left|\sum_{i=1}^N[f\circ\boldsymbol{\gamma}(t_i)-f\circ\boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})]\right|\leqslant\sup_{\gamma}|\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x})|_{\mathbb{R}^m}\sum_{i=1}^N|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mu_i)|_{\mathbb{R}^m}\,\Delta t_i$$

取极限 $|P|\to 0$，即有

$$|f(B)-f(A)|\leqslant\sup_{\gamma}|\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x})|_{\mathbb{R}^m}\int_a^b|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)|_{\mathbb{R}^m}\,\mathrm{d}t$$

1.3 基于单参数曲线化的向量值映照的有限增量估计

定理 1.4 (向量值映照有限增量估计). 定理：设 $\gamma\subset\mathbb{R}^m$ 为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^n$ 之定义域 D_x 中连接 A 和 B 二点的光滑曲线，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 γ 上可微，则有估计，

$$|\boldsymbol{f}(B)-\boldsymbol{f}(A)|_{\mathbb{R}^n}\leqslant\sup_{\gamma}|\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|_{\mathbb{R}^{n\times m}}|\gamma|$$

此处，$|\gamma|$ 代表曲线的弧长。

分析：考虑上述一致的连接曲线及分割。考虑如下的函数

$$\phi(t):[t_{i-1},t_i]\ni t\mapsto\phi(t)\triangleq\sum_{\alpha=1}^n f^\alpha\circ\boldsymbol{\gamma}(t)\,[f^\alpha\circ\boldsymbol{\gamma}(t_i)-f^\alpha\circ\boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})]$$

对其利用 Lagrange 中值定理有

$$\begin{aligned}\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})&\triangleq\sum_{\alpha=1}^n[f^\alpha\circ\boldsymbol{\gamma}(t_i)-f^\alpha\circ\boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})]^2=|\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\gamma}(t_i)-\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})|^2_{\mathbb{R}^n}\\&=\sum_{\alpha=1}^n\sum_{\beta=1}^m\left[\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta}(\gamma(\mu_i))\dot{x}^\beta(\mu_i)\right]\,\left[f^\alpha\circ\boldsymbol{\gamma}(t_i)-f^\alpha\circ\boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})\right]\Delta t_i\\&=\Big[\,(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\gamma}(t_i)-\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\gamma}(t_{i-1}))^T\,\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}(\mu_i))\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mu_i)\Big]\Delta t_i\\&\leqslant|\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\gamma}(t_i)-\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})|_{\mathbb{R}^n}\,|\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}(\mu_i))|_{\mathbb{R}^{n\times m}}\,|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mu_i)|_{\mathbb{R}^m}\,\Delta t_i\end{aligned}$$

亦即有估计

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\gamma}(t_i) - \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})|_{\mathbb{R}^n} &\leqslant |\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}(\mu_i))|_{\mathbb{R}^{n\times m}} \, |\dot{\gamma}(\mu_i)|_{\mathbb{R}^m} \, \Delta t_i \\
&\leqslant \sup_{\gamma} |\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|_{\mathbb{R}^{n\times m}} |\dot{\gamma}(\mu_i)|_{\mathbb{R}^m} \Delta t_i
\end{aligned}
$$

由此可有

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{f}(B) - \boldsymbol{f}(A)|_{\mathbb{R}^n} = \left| \sum_{i=1}^{N} \left[\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\gamma}(t_i) - \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\gamma}(t_{i-1}) \right] \right|_{\mathbb{R}^n} &\leqslant \sum_{i=1}^{N} |\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\gamma}(t_i) - \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\gamma}(t_{i-1})|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leqslant |\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}(\mu_i))|_{\mathbb{R}^{n\times m}} \sum_{i=1}^{N} |\dot{\gamma}(\mu_i)|_{\mathbb{R}^m} \, \Delta t_i
\end{aligned}
$$

取极限 $|P| \to 0$，即有

$$
|\boldsymbol{f}(B) - \boldsymbol{f}(A)|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \sup_{\gamma} |\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|_{\mathbb{R}^{n\times m}} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_{\mathbb{R}^m} \, \mathrm{d}t
$$

2 应用事例

3 建立路径

- 区别于一般基于单参数直线化的处理，我们成功实现基于单参数曲线化的处理，获得了一般多维函数与一般向量值映照的有限增量估计，当连接曲线为直线时则为一般教程中的结果形式。分析上，首先将连接曲线分成若干段，每段上获得有限增量估计，然后基于 Riemann 积分有关理论获得最终结果。

- 基于相关分析，让学生感悟基于已有的分析方法获得新结果的一种过程。引导学生真正理解和掌握数学分析中基本的思想及方法（可称为“微积分或数学分析原理”，相比于具体结论更为本质和更有意义），综合应用这些具有基础意义的思想及方法可能获得新的结论。