《数学物理方法》第十三章作业参考解答

13.1 半径为 b 和高为 h 的圆柱体，下底的温度保持为 0 度，上底的温度为 ρ 的函数 $f(\rho)$，其侧面在零摄氏度的空气中自由冷却，求圆柱体内部各点的稳恒温度。

解：定解问题为：

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\left(\rho u_\rho\right)_\rho + \dfrac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz} = 0, \quad (0 \le \rho \le b, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le z \le h) \\ [u + h u_\rho]\big|_{\rho=b} = 0 \\ u\,|_{z=0} = 0, u\,|_{z=h} = f(\rho) \end{cases}$$

由于问题的轴对称性，设 $u = u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$，代入上述方程，得到

$$\rho R'' + R' + \lambda \rho R = 0, \qquad (1)$$
$$Z'' - \lambda Z = 0, \qquad (2)$$

以及边界条件， $R(0) \ne \infty, \quad (R + hR')\,|_{\rho=b} = 0$

（1）与上面的边界条件构成本征问题，方程的通解为

$$R(\rho) = CJ_0(\sqrt{\lambda}\rho) + DN_0(\sqrt{\lambda}\rho)$$

考虑到第一个边界条件，方程的解应为： $R(\rho) = J_0(\sqrt{\lambda}\rho)$，

代入第二个边界条件得： $J_0(\sqrt{\lambda}b) + h\sqrt{\lambda}J_0'(\sqrt{\lambda}b) = 0$。

设方程 $J_0(x) + h\dfrac{x}{b}J_0'(x) = 0$ 的正根为 x_n，则本征值 $\lambda = \lambda_n = (\dfrac{x_n}{b})^2, n = 1, 2\cdots$

相应的本征函数为 $R(\rho) = R_n(\rho) = J_0\left(\dfrac{x_n}{b}\rho\right)$

对应每一个本征值，由 Z 满足的方程： $Z''(z) - \lambda Z(z) = 0$，解得

$$Z_n(z) = A_n \cosh\left(\frac{x_n}{b} z\right) + B_n \sinh\left(\frac{x_n}{b} z\right)$$

因此，一般解为，

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cosh\left(\frac{x_n}{b} z\right) + B_n \sinh\left(\frac{x_n}{b} z\right)\right] J_0\left(\frac{x_n}{b}\rho\right)$$

由$u|_{z=0}=0$，得，$A_n=0$，所以方程的解为，

$$u(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\left(\frac{x_n}{b}z\right)J_0\left(\frac{x_n}{b}\rho\right)$$

代入边界条件$u|_{z=h}=f(\rho)$，得，

$$f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\left(\frac{x_n}{b}h\right)J_0\left(\frac{x_n}{b}\rho\right)$$

其中，$B_n\sinh\left(\frac{x_n}{b}h\right)=\dfrac{1}{\left\|J_0\left(\frac{x_n}{b}\rho\right)\right\|^2}\int_0^b f(\rho)J_0\left(\frac{x_n}{b}\rho\right)\rho d\rho$

而，$\left\|J_0\left(\frac{x_n}{b}\rho\right)\right\|^2=\frac{b^2}{2}\left\{\left[J_0'(x_n)\right]^2+\left[J_0(x_n)\right]^2\right\}=\frac{b^2}{2}\left[1+\frac{b^2}{(hx_n)^2}\right]\left[J_0(x_n)\right]^2$

所以方程的解为：

$$u(\rho,z)=\frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\frac{x_n}{b}\rho)}{\left[J_0(x_n)\right]^2}\left[1+\frac{b^2}{(hx_n)^2}\right]^{-1}\frac{\sinh\left(\frac{x_n}{b}z\right)}{\sinh\left(\frac{x_n}{b}h\right)}\int_0^b f(\rho)J_0\left(\frac{x_n}{b}\rho\right)\rho d\rho$$

13.2 半径为 R 的圆形膜，边缘固定。初始形状是旋转抛物面，即 $u(\rho,t)\big|_{t=0}=H\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)$（H 为常数）。初始速度为零。求解膜的振动情况。

解：

定解问题为：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2\nabla^2u=a^2\left[\frac{1}{\rho}\left(\rho u_\rho\right)_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}\right]\\ u|_{\rho=0}\neq\infty,\quad u|_{\rho=R}=0\\ u|_{t=0}=H\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right),\quad u_t|_{t=0}=0\end{cases},$$

采用极坐标系，由于对称性，方程的解 u 与 φ 无关，设$u=u(\rho,t)=T(t)R(\rho)$

代入上述方程，得到

$$\rho R''+R'+\lambda\rho R=0, \qquad (1)$$

$$T''-\lambda a^2 Z=0, \qquad (2)$$

以及边界条件， $R(0)\neq\infty, \quad R(\rho)|_{\rho=R}=0$

（1）与上面的边界条件构成本征问题，

其本征值为 $\lambda=\lambda_n=\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{R}\right)^2, n=1,2\cdots$

相应的本征函数为$R(\rho)=R_n(\rho)=J_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)$，其中，$x_n^{(0)}$是$J_0(x)$的正零点。

对应每一个本征值，由 T 满足的方程：$T''-a^2\lambda T=0$，解得

$$T_n=A_n\sin\frac{x_n^{(0)}at}{R}+B_n\cos\frac{x_n^{(0)}at}{R}$$

因此，一般解为，

$$u(\rho,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\sin\frac{x_n^{(0)}at}{R}+B_n\cos\frac{x_n^{(0)}at}{R}\right]J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)$$

由第二个初始条件$u_t|_{t=0}=0$，可得： $A_n=0$，所以方程的解为，

$u(\rho,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\cos\dfrac{x_n^{(0)}at}{R}\,J_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)$，代入初始条件$u|_{t=0}=H\left(1-\dfrac{\rho^2}{R^2}\right)$，得，

$$H\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}B_nJ_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)$$

其中，

$$\begin{aligned}B_n&=\frac{2}{R^2\left[J_1(x_n^{(0)})\right]^2}\int_0^R H\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho d\rho\\&=\frac{4HJ_2\left(x_n^{(0)}\right)}{\left[x_n^{(0)}J_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]^2}=\frac{8H}{\left[x_n^{(0)}\right]^3J_1\left(x_n^{(0)}\right)}\end{aligned}$$

计算中运用了递推公式$\left(x^\nu Z_\nu\right)'=x^\nu Z_{\nu-1}$，$\dfrac{2\nu}{x}Z_\nu=Z_{\nu-1}+Z_{\nu+1}$，以及$J_0\left(x_n^{(0)}\right)=0$

所以，方程的解为：

$$u(\rho,t)=4H\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_2\left(x_n^{(0)}\right)J_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)}{\left[x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})\right]^2}\cos\frac{x_n^{(0)}at}{R}=8H\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)}{\left[x_n^{(0)}\right]^3J_1(x_n^{(0)})}\cos\frac{x_n^{(0)}at}{R}$$

13.3 底半径为 a，高为 h 的均匀导热圆柱，上底面绝热，下底面保持温度为 0 度，侧面保持温度为常数 v，求柱内的温度分布。

解：

由题目得到定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{\rho}\left(\rho u_\rho\right)_\rho + \dfrac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz} = 0 \\ u\,|_{z=0} = 0, \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0 \\ u\,|_{\rho=0} \neq \infty, u\,|_{\rho=a} = v \end{cases}$$

易知 u 与 φ 无关

设 $u = R(\rho)Z(z)$，代入上述方程，得到

$$\rho R'' + R' - \lambda \rho R = 0, \qquad (1)$$
$$Z'' + \lambda Z = 0, \qquad (2)$$

以及边界条件，$Z\big|_{z=0} = 0, Z'\big|_{z=h} = 0$

（2）与边界条件 $Z\big|_{z=0} = 0, Z'\big|_{z=h} = 0$ 构成本征值问题，

本征值为 $\lambda_n = \left(\dfrac{2n+1}{2h}\pi\right)^2$， n=0,1,2…

相应的本征函数为 $Z_n = \sin\left(\dfrac{2n+1}{2h}\pi z\right)$

（1）式可化为 0 阶虚宗量 Bessel 方程（过程略）

其解为 $R_n(\rho) = A_n I_0\left(\dfrac{2n+1}{2h}\pi\rho\right) + B_n K_0\left(\dfrac{2n+1}{2h}\pi\rho\right)$

因此，定解问题的一般解为

$$\therefore u(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n I_0\left(\frac{2n+1}{2h}\pi\rho\right) + B_n K_0\left(\frac{2n+1}{2h}\pi\rho\right)\right]\sin\left(\frac{2n+1}{2h}\pi z\right)$$

由边界条件 $u\,|_{\rho=0} \neq \infty$，得， $B_n = 0$

$$\therefore u(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n I_0\left(\frac{2n+1}{2h}\pi\rho\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2h}\pi z\right)$$

由条件$u|_{\rho=a}=v$得

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nI_0\left(\frac{2n+1}{2h}\pi a\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2h}\pi z\right)=v$$

其中，

$$A_nI_0\left(\frac{2n+1}{2h}\pi a\right)=\frac{2}{h}\int_0^h v\sin\left(\frac{2n+1}{2h}\pi z\right)dz=\frac{4v}{(2n+1)\pi}$$

$$\therefore u(\rho,z)=\frac{4v}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_0\left(\frac{2n+1}{2h}\pi\rho\right)}{(2n+1)I_0\left(\frac{2n+1}{2h}\pi a\right)}\sin\left(\frac{2n+1}{2h}\pi z\right)$$

13.4 解定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2\nabla^2u(r,\theta,\varphi)\quad(0\le r\le b,0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le 2\pi)\\ u\big|_{r=0}\ne\infty,u\big|_{r=b}=0\\ u\big|_{t=0}=f(r)\cos\theta\end{cases}$$

解：

球坐标系，由初始条件可知u与φ无关,令$u=T(t)V(r,\theta)$带入上式

可得$\dfrac{T'}{a^2T}=\dfrac{\nabla^2V}{V}=-\lambda$

$$T'+a^2\lambda T=0$$
$$\nabla^2V+\lambda V=0$$

再令$u=R(r)\Theta(\theta)$,代入得

$$\frac{1}{R}\left(r^2R'\right)'+\lambda r^2=-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\left(\sin\theta\,\Theta'\right)'=l(l+1)$$

从而有，$r^2R''+2rR'+\left(\lambda r^2-l(l+1)\right)R=0$，（$l$阶球 Bessel 方程）　　（1）

可将其化为$l+\dfrac{1}{2}$阶 Bessel 方程（过程略）即，$xy''+2xy'+\left[x^2-\left(l+\dfrac{1}{2}\right)^2\right]y=0$

另一个方程为 $\Theta''+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\Theta'+l(l+1)\Theta=0$　　（2）

方程（2）可化为 Legendre 方程，$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+l(l+1)y=0$

它与自然边界条件$\Theta(0),\Theta(\pi)$有界，即 $y(x)\big|_{x=\pm1}$有界，构成本征值问题。

其本征值和本征函数分别为 $l(l+1)$， $y(x)=P_l(x)$ $\left(l=0,1,2,\cdots\right)$

其中$x=\cos\theta,\Theta(\theta)=y(x)$

方程（1）与边界条件$R\big|_{r=0}\neq\infty,R\big|_{r=b}=0$构成本征值问题，

其本征值和本征函数分别为 $\lambda=\lambda_{nl}=\left(\dfrac{x_n^{(l+1/2)}}{b}\right)^2$， $R_{nl}(r)=j_l\left(\dfrac{x_n^{(l+1/2)}}{b}r\right)$，

（$n=1,2,3,\cdots$） 其中，$x_n^{(l+1/2)}$是$J_{l+1/2}(x)$的正零点

对应本征值$\lambda=\lambda_{nl}$，由方程$T'+a^2\lambda T=0$ 解得

$$T_{nl}=A_{nl}e^{-a^2\lambda_n t}=A_{nl}e^{-\frac{a^2}{b^2}\left(x_n^{(l+1/2)}\right)^2 t}$$

因此，定解问题的一般解为

$$u(r,\theta,t)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{nl}\,j_l\left(\frac{x_n^{l+1/2}}{b}r\right)P_l(\cos\ \theta)e^{-\frac{a^2}{b^2}\left(x_n^{(l+1/2)}\right)^2 t}$$

由条件$u\big|_{t=0}=f(r)\cos\theta$，得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{nl}\,j_l\left(\frac{x_n^{l+1/2}}{b}r\right)P_l(\cos\theta)=f(r)\cos\theta$$

由$P_1=\cos\theta$可以确定$l=1$， 因此，有$\sum_{n=1}^{\infty}A_{n1}j_1\left(\dfrac{x_n^{(3/2)}}{b}r\right)=f(r)$

$$A_{n1}=\frac{1}{\left\|j_1\left(\dfrac{x_n^{(3/2)}}{b}r\right)\right\|^2}\int_0^b f(r)j_1\left(\frac{x_n^{(3/2)}}{b}r\right)r^2dr$$

$$\therefore u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{n1}J_1\left(\frac{x_n^{(3/2)}}{b}r\right)\cdot\cos\theta\cdot e^{-\frac{a^2}{b^2}\left(x_n^{(3/2)}\right)^2 t}$$