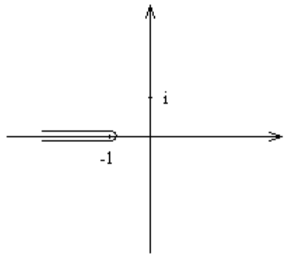
《数学物理方法》第三章作业参考解答

1．Taylor 级数展开：将$\ln(1+z)$在$z=i$的领域内展开为 Taylor 级数，且问收敛半径为多少？

解：

$\ln(1+z)$的支点为-1，∞， 沿负实轴作割线，并规定 上岸 $\arg(1+z)=\pi$，下岸 $\arg(1+z)=-\pi$



$\ln(1+i)=\ \ln\sqrt{2}+\dfrac{\pi}{4}i$

由 Taylor 展开公式：$f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}(b)}{k!}(z-b)^k$

因此可得 $\ln(1+z)=\ln\sqrt{2}+\dfrac{\pi}{4}i+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k(1+i)^k}(z-i)^k$

$a_n=\dfrac{(-1)^{k-1}}{k(1+i)^k}$

收敛半径$R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k+1}{k}\cdot|1+i|=\sqrt{2}$

思考：其它单值分支，以及不同的割线作法，结果如何？

2．函数$f(z)=\dfrac{1}{z^3(z-1)^3(z-3)}$，求在区域

（1）$0<|z|<1$ 内的幂级数展开式，是 Taylor 级数还是 Laurent 级数，为什么？

（2） $1<|z|<3$ 内 Laurent 级数中z^{-6}项的展开系数。

解法一：

（1）$0<|z|<1$ 时

$$f(z)=\frac{1}{3\cdot z^3\cdot(1-z)^3\cdot(1-\frac{z}{3})}$$

其中$\dfrac{1}{(1-z)^3}=\dfrac{1}{2}\cdot\sum\limits_{k=2}^{\infty}k(k-1)z^{k-2}=\dfrac{1}{2}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)z^n$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^k}$$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)z^{n-3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^k}=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+2)(k+1)}{3^{n-k}}\right)z^{n-3}$$

是 Laurent 级数，有 z 的负幂项

（2）当$1<|z|<3$

$$\frac{1}{(z-1)^3}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{z^{k+3}} \qquad （2.2）$$

$$\therefore f(z)=-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{z^{k+6}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{3^n}z^{n-k-6}$$

当 k=n 时 z 有-6 次项

$$\therefore a_n=-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{3^k}$$

由（2.2）式，当 z=3 时，$\frac{1}{(3-1)^3}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{3^{k+3}}$

因此可得$a_n=-\frac{9}{8}$

解法二：

(1) $0<|z|<1$ 时

$$f(z)=\frac{1}{8\cdot z^3}\left(\frac{-z^2-3}{(z-1)^3}+\frac{1}{z-3}\right)=\frac{1}{8\cdot z^3}\left(\frac{z^2}{(1-z)^3}+\frac{3}{(1-z)^3}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\right)$$

同解法一，可得

$$\frac{1}{(1-z)^3}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)z^{k-2}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)z^n$$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^k}$$

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(k+2)(k+1)}{16}z^{k+2}+\frac{3(k+2)(k+1)}{16}z^k-\frac{1}{24}\left(\frac{z}{3}\right)^k\right]$$

(2) 当$1<|z|<3$

同理可得：

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\frac{(k+2)(k+1)}{16}\frac{1}{z^{k+1}}+-\frac{3(k+2)(k+1)}{16}\frac{1}{z^{k+3}}-\frac{1}{24}(\frac{z}{3})^k\right]$$

因此可得 z^{-6} 项系数是 $-\frac{9}{8}$

解法三：

（2）

$$\begin{aligned}a_{-6}&=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{z^{-6+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{z^2}{(z-1)^3(z-3)}dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{z^2/(z-3)}{(z-1)^3}dz\\&=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^2}{z-3}\right]_{z=1}\\&=-\frac{9}{8}\end{aligned}$$

其中，l 为在环域 $1<|z|<3$ 内绕点 $z=0$ 的简单必曲线，积分方向为逆时针。

3．考察下列函数的孤立奇点，并确定它们的类别：

（1）$e^{\frac{1}{z-2i}}$；

（2）$\frac{1-\cos z}{z^2}$；

（3）$\tan^2 z$

解：

(1) 存在奇点 z=2i

$\lim\limits_{z\to 2i}e^{\frac{1}{z-2i}}$ 不存在

∴ z=2i 是本性奇点

(2) 存在奇点 z=0

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{2}=\frac{1}{2}$$

∴ z=0 是可去奇点

(3) 存在奇点 $z=(\frac{1}{2}+n)\pi$

$$\lim_{z\to(\frac{1}{2}+n)\pi}\tan^2 z=\infty$$

$$\lim_{z\to(\frac{1}{2}+n)\pi}\left((z-\frac{\pi}{2}-n\pi)^2\tan^2 z\right)=\lim_{z\to(\frac{1}{2}+n)\pi}\left(\frac{(z-\frac{\pi}{2}-n\pi)\sin z}{\cos z}\right)^2$$

$$=\lim_{z\to(\frac{1}{2}+n)\pi}\left(\frac{\sin z+(z-\frac{\pi}{2}-n\pi)\cos z}{-\sin z}\right)^2=1$$

$\therefore$ z=0 是 2 阶极点