《数学物理方法》第十二章作业参考解答

12.1 半径为 a 的半圆形薄板，板面绝热，在直径边界上温度保持零度，而在半圆周上保持恒温 u_0。求板内的稳定温度分布。

解：定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho,\varphi) = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 & (0<\rho<a, 0\le\varphi\le\pi) \\ u|_{\varphi=0} = 0, u|_{\varphi=\pi} = 0, & \\ u|_{\rho=a} = u_0 & \end{cases}$$

设 $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$，代入方程并分离变量，得，

$$\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho R'(\rho)\right) = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda \ ,$$

由此得到两个方程，

$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0$，

$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0$

以及边界条件，$\Phi|_{\varphi=0} = 0, \Phi|_{\varphi=\pi} = 0$

方程 $\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0$ 与边界条件 $\Phi|_{\varphi=0} = 0, \Phi|_{\varphi=\pi} = 0$ 构成本征值问题，本征值和本征函数分别为

$\lambda = \lambda_m = m^2$，　　$\Phi(\varphi) = \Phi_m(\varphi) = \sin m\varphi$，　（$m = 1,2,\cdots$）。

对应每一个本征值 $\lambda = \lambda_m = m^2$，方程 $\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0$ 的解为，

$$R_m(r) = A_m\rho^m + B_m\rho^{-m}$$

方程的一般解为:

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{m=1}(A_m\rho^m + B_m\rho^{-m})\sin m\varphi$$

$\because u(\rho\to 0)\ is\ not\ \infty, \therefore B_m = 0$

代入边界条件 $u|_{\rho=a} = u_0$，得

$$u_0 = \sum_{m=1} A_m a^m \sin m\varphi$$

其中，

$$A_m a^m = \frac{1}{\int_0^\pi \sin^2 m\theta \mathrm{d}\theta} \int_0^\pi u_0 \sin m\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^\pi \sin m\theta \mathrm{d}\theta = \begin{cases} \dfrac{4u_0}{m\pi} & m = 2n+1 \\ 0 & m = 2n \end{cases}$$

所以，$A_{2n+1} = \dfrac{4u_0}{\pi} \dfrac{a^{-(2n+1)}}{2n+1}$， $n = 0, 1, 2 \cdots$

$$\therefore u(\rho,\varphi) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0} \frac{a^{-(2n+1)}}{(2n+1)} \rho^{2n+1} \sin(2n+1)\varphi = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0} \frac{1}{(2n+1)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n+1} \sin(2n+1)\varphi$$

12.4 半径为 a 的无限长介质圆柱（介电常数为 ε ）放在匀强电场 E_0 中，电场方向与圆柱轴线垂直。求柱内、外的电势分布。

解：以圆柱的轴线为 z 轴，显然这是平面问题。以 E_0 方向为 x 轴方向取极坐标系，

设球内电势为 $u_1(\rho,\varphi)$ ，球外电势为 $u_2(\rho,\varphi)$ ，二者皆满足 Laplace 方程，

$$\nabla^2 u(\rho,\varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 ,$$

对球内问题，有自然边界条件 $u_1\big|_{\rho=0} \neq \infty$

对球外问题，有边界条件 $u_2 \,|_{\rho\to\infty} \to -E_0 \rho \cos\varphi$

并且有衔接条件 $u_1\big|_{\rho=a} = u_2\big|_{\rho=a}$； $\varepsilon \dfrac{\partial u_1}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=a} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial u_2}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=a}$

用分离变量法，可得一般解为（分离变量过程，略）：

$$u(\rho,\varphi) = A_0(1 + D_0 \ln\rho) + \sum_{m=1} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)(\rho^m + D_m \rho^{-m})$$

柱内：

$$\because u(\rho \to 0) \; is \; not \; \infty, \therefore D_m = 0, m = 0, 1, 2 \cdots$$
$$\Rightarrow u_1(\rho,\varphi) = A_0 + \sum_{m=1} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)\rho^m$$

柱外：

$$u\,|_{\rho\to\infty} \to -E_0 \rho \cos\varphi$$
$$= A_0(1 + D_0 \ln\rho) + \sum_m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)\rho^m$$

$\Rightarrow A_m = 0\ (for\ m \neq 1),\ B_m = 0\ (for\ all\ m)$

$\therefore u_2(\rho,\varphi) = -E_0 \cos\varphi(\rho + D_1\rho^{-1})$

由衔接条件：$u_1(\rho = a) = u_2(\rho = a)$ (1), $\varepsilon \dfrac{\partial u_1}{\partial \rho}|_{\rho=a} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial u_2}{\partial \rho}|_{\rho=a}$ (2)

由(1)得:

$$A_0 + \sum_{m=1}(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)a^m = -E_0\cos\varphi(a + D_1 a^{-1}) \Rightarrow$$

$$A_m = 0(for\ m \neq 1), B_m = 0(for\ all\ m),\quad A_1 \cdot a = -E_0(a + D_1 a^{-1}) \Rightarrow$$

$$u_1 = A_1 \cos\varphi\rho$$

由(2)得：$\varepsilon\ A_1 = -\varepsilon_0 E_0 (1 - \dfrac{D_1}{a^2})$

联合求解:

$$A_1 = -\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon}E_0,\ D_1 = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon}a^2$$

$$\therefore for\ \rho < a,\ u_1(\rho,\varphi) = -\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon}E_0\rho\cos\varphi$$

$$for\ \rho > a,\ u_2(\rho,\varphi) = -E_0\cos\varphi(\rho + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon}\frac{a^2}{\rho})$$

12.8 一半径为 1 的空心球，以球心为坐标原点，当表面充电至电势为 $V_0(1 + 2\cos\theta + 3\cos\theta^2)$（$V_0$ 为常量）时，求球内各点的电势。

解:

由于对称性，u 与 φ 无关

定解问题为 $\begin{cases} \nabla^2 u(r,\theta) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0 \\ u\big|_{r=0} \neq \infty, u\big|_{r=1} = V_0(1 + 2\cos\theta + 3\cos\theta^2) \end{cases}$

令 $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$， 代入方程且乘以 $\dfrac{r^2}{R\Theta}$ 得，

$$\frac{1}{R}\left(r^2 R'\right)' = -\frac{1}{\Theta\sin\theta}\left(\sin\theta\,\Theta'\right)' = l(l+1)$$

从而有，

$$r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0,$$

$$\Theta'' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Theta' + l(l+1)\Theta = 0$$

记 $\cos\theta = x$， $\Theta(\theta) = y(x)$，得

$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$，　　　l 阶 Legendre 方程，

它与自然边界条件 $\Theta(0), \Theta(\pi)$ 有界，即 $y(x)\big|_{x=\pm1}$ 有界，构成本征值问题。

它的本征值和本征函数分别为

$\lambda = \lambda_l = l(l+1)$， $y(x) = P_l(x)$　$\left(l = 0,1,2,\cdots\right)$

对应每一个本征值，方程 $r^2R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0$ 的解为

$$R_l(r) = C_l r^l + D_l \frac{1}{r^{l+1}}$$

方程的一般解为:

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(C_l r^l + D_l \frac{1}{r^{l+1}})P_l(\cos\theta)$$

由 $u\big|_{r=0} \neq \infty$，所以 $D_l = 0$

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$u\big|_{r=1} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(\cos\theta) = V_0(1 + 2\cos\theta + 3\cos\theta^2)$$

由
$$P_0(\cos\theta) = 1$$
$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$
$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos\theta^2 - 1)$$

所以

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(\cos\theta) = V_0(1 + 2\cos\theta + 3\cos\theta^2)$$
$$= 2V_0(P_0(\cos\theta) + P_1(\cos\theta) + P_2(\cos\theta))$$

可得 $C_0 = C_1 = C_2 = 2V_0$

所以 $u = 2V_0(1 + rP_1(\cos\theta) + r^2P_2(\cos\theta))$

12.11 在点电荷（带电 $4\pi\varepsilon_0 q$ ）的电场中放置一导体球（球的半径为 a），球心语

点电荷相距 $d(d>a)$，求解着静电场。

解：

以球心为原点，极轴过点电荷取球坐标系，则静电场与 φ 无关。球外任意一点 (r,θ,φ) 的电势 $u(r,\theta,\varphi)$ 为点电荷产生的电势和球上感应电荷产生的电势的迭加， 即

$u(r,\theta,\varphi)=\dfrac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}+v(r,\theta)$，其中 $v(r,\theta)$ 为感应电荷产生的势场。$v(r,\theta)$ 满足 Laplace 方程。如果设导体球的电势为 u_0，则 $v\big|_{r=a}=u_0-\dfrac{q}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\theta}}$

因此，$v(r,\theta)$ 所满足的定界问题为

$$\begin{cases}\nabla^2 v=0\\ v\big|_{r=a}=u_0-\dfrac{q}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\theta}},v\big|_{r\to\infty}=0\end{cases}$$

令 $v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$， 代入方程且乘以 $\dfrac{r^2}{R\Theta}$ 得，

$$\frac{1}{R}\left(r^2R'\right)'=-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\left(\sin\theta\,\Theta'\right)'=l(l+1)$$

从而有，

$$r^2R''+2rR'-l(l+1)R=0\,,$$

$$\Theta''+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Theta'+l(l+1)\Theta=0$$

记 $\cos\theta=x$， $\Theta(\theta)=y(x)$，得

$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+l(l+1)y=0$， l 阶 Legendre 方程，

它与自然边界条件 $\Theta(0),\Theta(\pi)$ 有界，即 $y(x)\big|_{x=\pm1}$ 有界，构成本征值问题。

它的本征值和本征函数分别为

$$\lambda=\lambda_l=l(l+1),\quad y(x)=P_l(x)\quad \left(l=0,1,2,\cdots\right)$$

对应每一个本征值，方程 $r^2R''+2rR'-l(l+1)R=0$ 的解为

$$R_l(r)=C_l r^l+D_l\frac{1}{r^{l+1}}$$

方程的一般解为:

$$v(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(C_l r^l+D_l\frac{1}{r^{l+1}})P_l(\cos\theta)$$

由 $v\big|_{r\to\infty}=0$，所以 $C_l=0$，因此

$$v(r,\theta)=D_l\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

由边界条件 $v\big|_{r=a}=u_0-\dfrac{q}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\theta}}$，得

$$v(r,\theta)\big|_{r=a}=D_l\frac{1}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta)=u_0-\frac{q}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\theta}}$$

$$=u_0-\frac{q}{a}\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{a}{d})^{l+1}P_l(\cos\theta)$$

比较系数，可得 $D_0=au_0-\dfrac{qa}{d}$, $\quad D_l=-q\dfrac{a^{2l+1}}{d^{l+1}}\quad(l=1,2,\cdots)$

所以，$v(r,\theta)=\dfrac{au_0}{r}-q\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{a^{2l+1}}{d^{l+1}r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$

$$u(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}+\frac{au_0}{r}-q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^{2l+1}}{d^{l+1}r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

$$=\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}+\frac{au_0}{r}-qa\cdot\frac{1}{\sqrt{a^4+d^2r^2-2\cos\theta dra^2}}$$