《数学物理方法》第一章作业参考解答

1. 利用复变函数导数的定义式，推导极坐标系下复变函数 $f(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$ 的 C-R 条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial \rho}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\end{cases}$$

证：由于复变函数 $f(z)$ 可导，即沿任何路径，任何方式使 $\Delta z\to 0$ 时，$\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 的极限都存在且相等，因此，我们可以选择两条特殊路径，

（1）沿径向，$\Delta z=\Delta\rho e^{i\varphi}\to 0$

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{f(\rho+\Delta\rho,\varphi)-f(\rho,\varphi)}{\Delta z}=\frac{u(\rho+\Delta\rho,\varphi)+iv(\rho+\Delta\rho,\varphi)-u(\rho,\varphi)-iv(\rho,\varphi)}{\Delta\rho e^{i\varphi}}$$

$$=\left(\frac{\partial u(\rho,\varphi)}{\partial\rho}+i\frac{\partial v(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)e^{-i\varphi}$$

（2）沿半径为 ρ 的圆周，$\Delta z=\Delta\left(\rho e^{i\varphi}\right)=\rho e^{i(\varphi+\Delta\varphi)}-\rho e^{i\varphi}\approx i\rho e^{i\varphi}\Delta\varphi$

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{f(\rho,\varphi+\Delta\varphi)-f(\rho,\varphi)}{\Delta z}=\frac{u(\rho,\varphi+\Delta\varphi)+iv(\rho,\varphi+\Delta\varphi)-u(\rho,\varphi)-iv(\rho,\varphi)}{\rho e^{i\varphi}(e^{i\Delta\varphi}-1)}$$

$$=\frac{u(\rho,\varphi+\Delta\varphi)+iv(\rho,\varphi+\Delta\varphi)-u(\rho,\varphi)-iv(\rho,\varphi)}{\rho e^{i\varphi}\Delta\varphi i}$$

$$=\left(\frac{\partial v(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}-i\frac{\partial u(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\right)\frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}$$

以上两式应相等，因而，

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}$$

2. 已知一平面静电场的等势线族是双曲线族 $xy=C$，求电场线族，并求此电场的复势（约定复势的实部为电势）。如果约定复势的虚部为电势，则复势又是什么？

解：

$$\nabla^2(xy)=0$$

$$\therefore u(x,y)=xy$$

由 C-R 条件可得

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=y\Rightarrow v(x,y)=\frac{1}{2}y^2+b(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=b'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=-x\Rightarrow b(x)=-\frac{1}{2}x^2+C$$

电场线族为：$v(x,y)=-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+C$

（或者：由 $dv(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-xdx+ydy=d\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\right)$，得

$v(x,y)=-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+C$）

复势为：$\mathrm{w}=xy+\left[-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+C\right]i=-\frac{i}{2}z^2+iC$

若虚部为电势，则

$$v(x,y)=xy$$

同理由 C-R 条件可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-y\Rightarrow u(x,y)=-\frac{1}{2}y^2+A(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=A'(x)=\frac{\partial v}{\partial y}=x\Rightarrow A(x)=\frac{1}{2}x^2+C$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)+C$$

复势为：$\mathrm{w}=\frac{1}{2}(x^2-y^2+C)+ixy=\frac{1}{2}z^2+C$

3．讨论复变函数 $f(z=x+iy)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 的可导性？（提示：选择沿 X 轴、Y 轴和 Y=aX 直线讨论）

解：

考虑当函数沿 y=ax 趋近 z=0 时

$$f(z)=\sqrt{ax^2}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{a}\,|x+\Delta x|-\sqrt{a}\,|x|}{\Delta x(ia+1)}=\frac{\pm\sqrt{a}}{(ia+1)}$$

可见上式是和 a 有关的，不是恒定值

所以该函数在 z=0 处不可导

4.判断函数 $f(z)=z+\sqrt{z^2-1}=z+\sqrt{(z+1)(z-1)}$ 的支点，选定一个单值分支 $f_0(z)$，计算 $f_0(x)$？计算 $f_0(-i)$ 的值？

解：

可能的支点为 $z=0,-1,1,\infty$。

1/ $z=0$ 点邻域，$z=\rho e^{i\varphi}$，$\rho<<1$，

$$f(z)=\rho e^{i\varphi}+\sqrt{(\rho e^{i\varphi}+1)(\rho e^{i\varphi}-1)}\approx\rho e^{i\varphi}+e^{i\frac{\pi}{2}}$$，不是支点；

2/ $z=-1$ 点邻域，$z=-1+\rho e^{i\varphi}$，$\rho<<1$，

$$\begin{aligned}f(z)&=-1+\rho e^{i\varphi}+\sqrt{(-1+\rho e^{i\varphi}+1)(-1+\rho e^{i\varphi}-1)}\\&\approx-1+\rho e^{i\varphi}+\sqrt{2\rho}e^{i\varphi/2+i\pi/2}\end{aligned}$$，一阶支点；

3/ $z=1$ 点邻域，$z=1+\rho e^{i\varphi}$，$\rho<<1$，

$$\begin{aligned}f(z)&=1+\rho e^{i\varphi}+\sqrt{(1+\rho e^{i\varphi}+1)(1+\rho e^{i\varphi}-1)}\\&\approx1+\rho e^{i\varphi}+\sqrt{2\rho}e^{i\varphi/2}\end{aligned}$$，一阶支点；

3/ $z=\infty$ 点邻域，$z=\rho e^{i\varphi}$，$\rho>>1$，

$$f(z)=\rho e^{i\varphi}+\sqrt{(\rho e^{i\varphi}+1)(\rho e^{i\varphi}-1)}\approx\rho e^{i\varphi}+\rho e^{i\varphi}$$，不是支点；

因此，$z=-1,z=1$ 是 $f(z)$ 的两个支点。

从 $-1\rightarrow1$ 作割线，$f(z)$ 有两个单值分支。我们选定 $f(z)$ 的一个单值分支 $f_0(z)$ 如下：

规定在割线的上岸 I：$\theta=\arg(z+1)=0$，$\varphi=\arg(z-1)=\pi$，则在割线的上岸有，$z+1=|z+1|e^{i0}=(x+1)e^{i0}$，$z-1=|z-1|e^{i\pi}=(1-x)e^{i\pi}$，因此，

$$f_0(z)=x+\sqrt{(x+1)e^{i0}(1-x)e^{i\pi}}=x+\sqrt{1-x^2}e^{i\frac{\pi}{2}}=x+i\sqrt{1-x^2}$$ （上岸 I）

当 I 上的点 $z=x$ 绕过左端点（$z=-1$）回到下岸 II 上具有相同坐标 x 点时，$\theta=\arg(z+1)=2\pi$，$\varphi=\arg(z-1)=\pi$，即在割线的下岸 II 上，有

$z+1=|z+1|e^{i2\pi}=(x+1)e^{i2\pi}$，$z-1=|z-1|e^{i\pi}=(1-x)e^{i\pi}$，因此，

$$f_0(z)=x+\sqrt{(x+1)e^{i2\pi}(1-x)e^{i\pi}}=x+\sqrt{1-x^2}e^{i\frac{3\pi}{2}}=x-i\sqrt{1-x^2}$$ （下岸 II）

（当然，我们也可以从 I 上的 x 点绕过割线的右端点 $z=1$ 回到 II 上的对应点，这时，$\theta=\arg z=0$，$\varphi=\arg(1-z)=-\pi$，即有，

$z+1=|z+1|e^{i0}=(x+1)e^{i0}$，$z-1=|z-1|e^{-i\pi}=(1-x)e^{-i\pi}$，因此，

$f_0(z)=x+\sqrt{(x+1)e^{i0}(1-x)e^{-i\pi}}=x+\sqrt{1-x^2}e^{-i\frac{\pi}{2}}=x-i\sqrt{1-x^2}$（下岸 II）。

现在来求 $f_0(-i)$ 的值。在点 $z=-i$ 处，$\theta=\arg(z+1)=\frac{7\pi}{4}$，$\varphi=\arg(z-1)=\frac{5\pi}{4}$（从上岸绕过点 $z=-1$ 到 $z=-i$），因此，$z+1=|z+1|\cdot e^{i\frac{7\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$，$z-1=|z-1|e^{i\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$，因此，

$$f_0(-i)=z+\sqrt{(z+1)(z-1)}=-i+\sqrt{\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}\cdot\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}=-i+\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i-\sqrt{2}i$$

（如果从上岸绕过点 $z=1$ 到 $z=-i$，则有 $\theta=\arg(z+1)=-\frac{\pi}{4}$，$\varphi=\arg(z-1)=-\frac{3\pi}{4}$，因此，$z+1=|z+1|\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$，$z-1=|z-1|e^{-i\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$，因此，

$f_0(-i)=z+\sqrt{(z+1)(z-1)}=-i+\sqrt{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}=-i-\sqrt{2}i$).