《数学物理方法》第七章作业参考解答

1. 求 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<\pi \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$ 的 Fourier 变换象函数,并写出 $f(x)$ 的 Fourier 积分。

解：

由定义，

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\pi}\sin xe^{-ikx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\pi}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}e^{-ikx}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+e^{-ik\pi}}{1-k^2}$$

其 Fourier 积分为，

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+e^{-ik\pi}}{1-k^2}e^{ikx}\mathrm{d}k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+e^{-ik\pi}}{1-k^2}e^{ikx}\mathrm{d}k$$

2. 求 $f(x)=e^{ix^2/2}$ 的 Fourier 变换象函数,并写出 $f(x)$ 的 Fourier 积分。

解：

由定义，

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix^2/2}e^{-ikx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{i}{2}k^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i}{2}(x-k)^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{i}{2}k^2}\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{i}{2}k^2}2\int_{0}^{\infty}e^{iu^2}\mathrm{d}u=e^{-\frac{i}{2}k^2}e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{k^2}{2}\right)}$$

其中用到了 $\int_0^{\infty}e^{iu^2}\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}\left(\cos u^2+\mathrm{i}\sin u^2\right)\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

其 Fourier 积分为，

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{k^2}{2}\right)}e^{ikx}\mathrm{d}k$$

3. 用 Fourier 变换求解微分方程 $\ddot{x}(t)+2\gamma\dot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=\delta(t-\tau)$（$-\infty<t<\infty$），其中，$\gamma,\omega_0,\tau$ 为实常数，且 $\omega_0>\gamma>0$。

（提示：先用 Laplace 变换求 $\ddot{x}(t)+2\gamma\dot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=0$ 的通解，然后用 Fourier 变换求方程 $\ddot{x}(t)+2\gamma\dot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=\delta(t-\tau)$ 的特解）

解：

先求相应的齐次方程的通解 $x_0(t)$，即 $\ddot{x}_0(t)+2\gamma\dot{x}_0(t)+\omega_0^2 x_0(t)=0$，可以用 Laplace 变换或《高等数学》中解二阶常系数微分方程的方法。（下面以 Laplace 变换法解此方程）

设 $x_0(t)\leftrightarrow \bar{x}_0(p)$，且 $x_0(0)=A,\dot{x}_0(0)=B$，则，

$$\dot{x}_0(t)\leftrightarrow p\bar{x}_0(p)-x_0(0)=p\bar{x}_0(p)-A$$

$$\ddot{x}_0(t)\leftrightarrow p^2\bar{x}_0(p)-px_0(0)-\dot{x}_0(0)=p^2\bar{x}_0(p)-pA-B,$$

由此可以得到 $\bar{x}_0(p)$ 的方程，

$$\left(p^2+2\gamma p+\omega_0^2\right)\bar{x}_0(p)=pA+B+2\gamma A,$$ 即

$$\bar{x}_0(p)=\frac{pA+B+2\gamma A}{p^2+2\gamma p+\omega_0^2}=\frac{pA+B+2\gamma A}{\left(p+\gamma+i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)\left(p+\gamma-i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)}$$
$$=\frac{pA+B+2\gamma A}{(p+\gamma)^2+\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)^2}$$

利用 $\sin\omega t\leftrightarrow\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$，$\cos\omega t\leftrightarrow\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ 和位移定理，得

$$x_0(t)=Ae^{-\gamma t}\cos\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t+\frac{B+2\gamma A}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}e^{-\gamma t}\sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t$$
$$=C_1e^{-\gamma t}\cos\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t+C_2e^{-\gamma t}\sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t$$

其中 C_1,C_2 为任意常数。

现用 Fourier 变换求方程 $\ddot{x}(t)+2\gamma\dot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=\delta(t)$ 的一个特解 $x_1(t)$。由于此方程是具有阻尼的振动方程，显然 $x_1(t)$ 满足条件 $x_1(t)\big|_{t\to\pm\infty}=0,\dot{x}_1(t)\big|_{t\to\pm\infty}=0$。

设 $x_1(t)\leftrightarrow\tilde{x}_1(\omega)$，利 Fourier 变换 $\begin{cases} f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega \\ \tilde{f}(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t\end{cases}$ 的性质，有，

$$\dot{x}_1(t)\leftrightarrow(-i\omega)\tilde{x}_1(\omega)$$

$$\ddot{x}_1(t)\leftrightarrow(-i\omega)^2\tilde{x}_1(p),$$

$\delta(t-\tau) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega\tau}$，

由此得到关于$\widetilde{x}_1(\omega)$的方程，$-\omega^2\widetilde{x}_1(\omega) - i2\gamma\omega\widetilde{x}_1(\omega) + \omega_0^2\widetilde{x}_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega\tau}$，即

$$\widetilde{x}_1(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2 + i2\gamma\omega - \omega_0^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)},$$

其中，$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} - i\gamma$，$\omega_1 = -\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} - i\gamma$，由逆变换，得

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)} e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)} e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega$$
$$= \begin{cases} 0 & t < \tau \\ \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma(t-\tau)} \sin\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-\tau) & t > \tau \end{cases}$$

上面的积分由留数定理求得，当$t-\tau<0$时，补充上半圆周，取上半平面。当$t-\tau>0$时，补充下半圆周，取下半平面。

因此，方程的通解为

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + x_1(t) \\ &= e^{-\gamma t}\left(C_1 \cos\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t + C_2 e^{-\gamma t} \sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} e^{-\gamma(t-\tau)} \sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-\tau) \\ &= e^{-\gamma t}\left(C_1' \cos\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t + C_2' e^{-\gamma t} \sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right) \end{aligned}$$

4. 用 Fourier 变换求解积分方程$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2 + a^2} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{x^2+b^2}$，$(0 < a \le b)$。

解：

方程两边同乘以$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，变为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2 + a^2} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x^2+b^2}$$

对方程作 Fourier 变换，左边是卷积积分形式，因此是$\frac{1}{x^2+a^2}$的象函数与$f(x)$的象函数的乘积，

$f(x) \leftrightarrow \widetilde{f}(k)$

$$\frac{1}{x^2+a^2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+a^2}e^{-ikx}\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-2\pi i)\mathrm{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{a^2+z^2}\right]_{z=-ai}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-ak} & (k>0)\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2\pi i)\mathrm{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{a^2+z^2}\right]_{z=ai}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{ak} & (k<0)\end{cases}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-a|k|}$$

同样，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x^2+b^2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{b}e^{-b|k|}=\frac{1}{2b}e^{-b|k|}$$

因此，我们有，

$\tilde{f}(k)\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-a|k|}=\frac{1}{2b}e^{-b|k|}$，即

$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a}{b}e^{-(b-a)|k|}$，所以，

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a}{b}e^{-(b-a)|k|}e^{ikx}\mathrm{d}k=\frac{1}{\pi}\frac{a}{b}\int_0^{\infty}e^{-(b-a)k}\cos kx\mathrm{d}k$$

$$=\begin{cases}\frac{a(b-a)}{\pi b\left[(b-a)^2+x^2\right]}, & b=a\\ \delta(x), & b=a\end{cases}$$

其中用到了积分$\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+b^2}$