《数学物理方法》第五章作业参考解答

- 求下列各函数在各奇点的留数：

1． $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)(z-2)^2}$ 在 $z=1$， $z=2$， $z=\infty$ 的留数。

解:

$$\mathrm{Res}f(1)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{z}{(1-z)(z-2)^2}=-1$$

$$\mathrm{Res}f(2)=\lim_{z\to2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-2)^2\frac{z}{(1-z)(z-2)^2}\right]=\lim_{z\to2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z}{(1-z)}\right]=\lim_{z\to2}\frac{1}{(1-z)^2}=1$$

$$\mathrm{Res}f(1)+\mathrm{Res}f(2)+\mathrm{Res}f(\infty)=0\text{，}$$

$$\mathrm{Res}f(\infty)=-[\mathrm{Res}f(1)+\mathrm{Res}f(2)]=-[(-1)+1]=0$$

- 计算下列积分：

1． $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{(1+\varepsilon\cos x)^2}\mathrm{d}x \qquad (0<\varepsilon<1)$

解：

作变换 $z=e^{ix}$，并利用 $\sin x=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}$， $\cos x=\dfrac{z+z^{-1}}{2}$， $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{iz}\mathrm{d}z$，得

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\left(\dfrac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2}{\left(1+\varepsilon\dfrac{z+z^{-1}}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z=-\frac{1}{i\varepsilon^2}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z\left(z^2+\dfrac{2}{\varepsilon}z+1\right)^2}\mathrm{d}z$$

令 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)^2}{z\left(z^2+\dfrac{2}{\varepsilon}z+1\right)^2}$， $f(z)$ 有三个奇点 $z=0$，

$z=z_1=\dfrac{1}{\varepsilon}\left(-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)$， $z=z_2=\dfrac{1}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)$，可以判断，

在单位圆内有一阶极点 $z=0$，和二阶极点 $z=z_2=\dfrac{1}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)$

$$\mathrm{Res}f(0)=\lim_{z\to0}z\cdot\frac{(z^2-1)^2}{z\left(z^2+\dfrac{2}{\varepsilon}z+1\right)^2}=1$$

$$\operatorname{Res}f(z_2)=\lim_{z\to z_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-z_2)^2\cdot\frac{(z^2-1)^2}{z\left(z^2+\dfrac{2}{\varepsilon}z+1\right)^2}\right]=\lim_{z\to z_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{(z^2-1)^2}{z(z-z_1)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_2}\left[\frac{4(z^2-1)}{(z-z_1)^2}-\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-z_1)^2}-\frac{2(z^2-1)^2}{z(z-z_1)^3}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_2}\left[\frac{z^2-1}{z(z-z_1)}\cdot\frac{4z}{z-z_1}-\left(\frac{z^2-1}{z(z-z_1)}\right)^2-\left(\frac{z^2-1}{z(z-z_1)}\right)^2\frac{2z}{z-z_1}\right]$$

$$=\left[\frac{4z_2}{z_2-z_1}-1-\frac{2z_2}{z_2-z_1}\right]=\frac{z_2+z_1}{z_2-z_1}=-\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

其中，用了 $\lim_{z\to z_2}\dfrac{z^2-1}{z(z-z_1)}=\dfrac{z_2^2-z_1\cdot z_2}{z_2(z_2-z_1)}=\dfrac{z_2(z_2-z_1)}{z_2(z_2-z_1)}=1\quad(\because z_1\cdot z_2=1)$

$$I=\left(-\frac{1}{i\varepsilon^2}\right)2\pi i\cdot\left[\operatorname{Res}f(0)+\operatorname{Res}f(z_2)\right]=\left(-\frac{1}{i\varepsilon^2}\right)2\pi i\cdot\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right]$$

$$=\frac{2\pi}{\varepsilon^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-1\right]$$

2． $I=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+4)(2-x)}$

解:

令 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)(2-z)}$，$f(z)$ 在上半平面内有奇点 $z=2i$，在实轴上有一阶极点 $z=2$。取积分闭曲线如图所示。

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{-R}^{2-r}f(x)\mathrm{d}x+\int_{2+r}^{R}f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_r}f(z)\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}f(2)=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4i(2-2i)}\right)=\frac{\pi}{8}(1+i)$$

当取极限 $R\to\infty, r\to 0$ 时，我们有，

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\left[\int_{-R}^{2-r}f(x)\mathrm{d}x+\int_{2+r}^{R}f(x)\mathrm{d}x\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+4)(2-x)}\mathrm{d}x,$$

$\because\ \lim_{z\to\infty}zf(z)=\lim_{z\to\infty}z\cdot\dfrac{1}{(z^2+4)(2-z)}=0$，由引理 1，$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0$，

$\because \lim\limits_{z\to 2}(z-2)\dfrac{1}{(z^2+4)(2-z)}=-\dfrac{1}{8}$，由引理 2，我们得到

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = i\left(-\frac{1}{8}\right)(0-\pi)=\frac{i\pi}{8},$$

因此，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}(1+i)-\frac{i\pi}{8}=\frac{\pi}{8}$.

3．$\displaystyle I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\omega x}{x^2+\alpha x+\beta}\mathrm{d}x$　（α,β,ω 为实常数，且 $\alpha^2-4\beta\neq 0$，$\omega>0$）

解：

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\omega x}{x^2+\alpha x+\beta}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\omega x}}{x^2+\alpha x+\beta}\mathrm{d}x$$

令 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+\alpha z+\beta}$，

$f(z)$ 有一阶极点 $z=z_1=-\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$，$z=z_2=-\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$。

(1) 当 $\alpha^2-4\beta>0$ 时，z_1,z_2 为实数，即它们在实轴上，

取积分闭曲线如图所示，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\left[\int_{l_1}+\int_{C_{r_1}}+\int_{l_2}+\int_{C_{r_2}}+\int_{l_3}+\int_{C_R}\right]f(z)e^{i\omega z}\mathrm{d}z=0$$

当取极限 $R\to\infty, r_1\to 0, r_2\to 0$ 时，我们有，

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r_1\to 0\\ r_2\to 0}}\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\omega x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\omega x}}{x^2+\alpha x+\beta}\mathrm{d}x,$$

$\because \lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z}{z^2+\alpha z+\beta}=0$，由 Jordan lemma，$\lim\limits_{R\to\infty}\displaystyle\int_{C_R} f(z)e^{i\omega z}\mathrm{d}z=0$，

$\because \lim\limits_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)e^{i\omega z}=\lim\limits_{z\to z_1}\dfrac{ze^{i\omega z}}{z-z_2}=\dfrac{z_1e^{i\omega z_1}}{z_1-z_2}$，由 lemma 2，

$$\lim_{r_1\to 0}\int_{C_{r_1}} f(z)e^{i\omega z}\mathrm{d}z=-i\pi\frac{z_1e^{i\omega z_1}}{z_1-z_2},$$

$\because \lim\limits_{z\to z_2}(z-z_2)f(z)e^{i\omega z}=\lim\limits_{z\to z_2}\dfrac{ze^{i\omega z}}{z-z_1}=\dfrac{z_2e^{i\omega z_2}}{z_2-z_1}$，由 lemma 2，

$$\lim_{r_2\to 0}\int_{C_{r_2}} f(z)e^{i\omega z}\mathrm{d}z = -i\pi\frac{z_2 e^{i\omega z_2}}{z_2 - z_1}$$，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\omega x}}{x^2+\alpha x+\beta}\mathrm{d}x = i\pi\left(\frac{z_1 e^{i\omega z_1}}{z_1 - z_2}+\frac{z_2 e^{i\omega z_2}}{z_2 - z_1}\right) = i\pi\cdot\frac{z_1 e^{i\omega z_1} - z_2 e^{i\omega z_2}}{z_1 - z_2}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}\left[i(z_1\cos\omega z_1 - z_2\cos\omega z_2) - (z_1\sin\omega z_1 - z_2\sin\omega z_2)\right]$$

$$I = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\omega x}}{x^2+\alpha x+\beta}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}\left[-(z_1\sin\omega z_1 - z_2\sin\omega z_2)\right]$$

(2) 当$\alpha^2 - 4\beta < 0$时，z_1, z_2为复数：

$z = z_1 = -\frac{\alpha}{2}+\frac{i\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}$，$z = z_2 = -\frac{\alpha}{2}-\frac{i\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}$，在上半平面内仅有奇点$z = z_1$。取积分闭曲线如图所示，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)e^{i\omega x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)e^{i\omega z}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{i\omega z}}{z^2+\alpha z+\beta}\right]_{z=z_1} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{z_1 e^{i\omega z_1}}{z_1 - z_2} = \pi\cdot\frac{\left(-\alpha + i\sqrt{4\beta-\alpha^2}\right)e^{i\omega\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{i\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}\right)}}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}e^{-\frac{\omega\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}}\left[\left(\sqrt{4\beta-\alpha^2}\sin\frac{\alpha\omega}{2} - \alpha\cos\frac{\alpha\omega}{2}\right) + i\alpha\sin\frac{\alpha\omega}{2} + \sqrt{4\beta-\alpha^2}\cos\frac{\alpha\omega}{2}\right]$$

当取极限$R\to\infty$时，我们有，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\omega x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\omega x}}{x^2+\alpha x+\beta}\mathrm{d}x,$$

$\because \lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{z^2+\alpha z+\beta} = 0$，由 Jordan lemma，$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{i\omega z}\mathrm{d}z = 0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\omega x}}{x^2+\alpha x+\beta}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}e^{-\frac{\omega\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}}\left[\left(\sqrt{4\beta-\alpha^2}\sin\frac{\alpha\omega}{2} - \alpha\cos\frac{\alpha\omega}{2}\right) + i\alpha\sin\frac{\alpha\omega}{2} + \sqrt{4\beta-\alpha^2}\cos\frac{\alpha\omega}{2}\right]$$

$$I = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\omega x}}{x^2+\alpha x+\beta}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}e^{-\frac{\omega\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}}\left(\sqrt{4\beta-\alpha^2}\sin\frac{\alpha\omega}{2} - \alpha\cos\frac{\alpha\omega}{2}\right)$$

4．$I = \int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2 - 7x - 8}\mathrm{d}x$

解：

令 $f(z)=\dfrac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2-7z-8}$，

沿正实轴从 $z=0$ 到 $z=\infty$ 作割线，取单值分支 $0\le \arg z\le 2\pi$ ，并规定上岸 (l_1) 有 $\arg z=0$，则在下岸 (l_2) 有 $\arg z=2\pi$ 。

$$\oint_C f(\mathrm{z})\mathrm{d}z=\left[\int_{l_1}+\int_{C_\varepsilon}+\int_{l_2}+\int_{C_R}+\int_{l_3}+\int_{C'_\varepsilon}+\int_{l_4}\int_{C_\delta}\right]f(\mathrm{z})\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left[\frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2-7z-8}\right]_{z=e^{i\pi}}=2\pi i\cdot\left(-\frac{e^{i\pi/3}}{9}\right)$$

当取极限 $R\to\infty,\delta\to 0,\varepsilon\to\infty$ 时,

$\because$ 在 l_1 上 $\arg z=0$，$\therefore \int_{l_1} f(\mathrm{z})\mathrm{d}z=\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x$,

$\because$ 在 l_2 上 $\arg z=0$，$\therefore \int_{l_2} f(\mathrm{z})\mathrm{d}z=\int_8^\infty f(x)\mathrm{d}x$,

$\because$ 在 l_3,l_4 上 $\arg z=2\pi$，

$$\therefore \int_{l_3} f(\mathrm{z})\mathrm{d}z=\int_\infty^8\left(xe^{i2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^2-7x-8}\mathrm{d}x=-e^{i2\pi/3}\int_8^\infty\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2-7x-8}\mathrm{d}x,$$

$$\therefore \int_{l_4} f(\mathrm{z})\mathrm{d}z=\int_8^0\left(xe^{i2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^2-7x-8}\mathrm{d}x=-e^{i2\pi/3}\int_0^8\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2-7x-8}\mathrm{d}x,$$

$\because \lim\limits_{z\to 0} z\cdot\left[\dfrac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2-7z-8}\right]=0$，$\lim\limits_{z\to\infty} z\cdot\left[\dfrac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2-7z-8}\right]=0$，由引理 2，1，

$$\therefore \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2-7z-8}\mathrm{d}z=0,\ \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2-7z-8}\mathrm{d}z=0,$$

现在考察沿 C_ε， C_ε' 的积分，因为割线将实轴上单极点分为

$z_+=8e^{i0}$（上岸）， $z_-=8e^{i2\pi}$（下岸），

$$\lim_{z\to z_+}\left(z-z_+\right)\frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2-7z-8}=\frac{2}{9}$$

$$\lim_{z\to z_-}(z-z_-)\frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2-7z-8}=\frac{2e^{i2\pi/3}}{9}$$

根据引理 2，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2-7z-8}\mathrm{d}z=i(\frac{2}{9})(0-\pi)=-\frac{i2\pi}{9}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C'_\varepsilon}\frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2-7z-8}\mathrm{d}z=i\left(\frac{2e^{i2\pi/3}}{9}\right)(\pi-2\pi)=-\frac{i2\pi e^{i2\pi/3}}{9}$$

因此，$\left(1-e^{i2\pi/3}\right)\int_0^\infty\frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2-7z-8}\mathrm{d}x=2\pi i\cdot\left(-\frac{e^{i\pi/3}}{9}\right)+\frac{i2\pi}{9}\left(1+e^{i2\pi/3}\right)$

即 $\int_0^\infty\frac{z^{\frac{1}{3}}}{z^2-7z-8}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}-\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}=0$

5．$I=\int_0^\infty\frac{\ln^2 x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$

解：

令 $f(z)=\frac{\ln^3 z}{z^2+3z+2}$，

沿正实轴从 $z=0$ 到 $z=\infty$ 作割线，取单值分支 $0\le\arg z\le 2\pi$ ，并规定上岸 (l_1)

有 $\arg z=0$，则在下岸 (l_2) 有 $\arg z=2\pi$ 。

$$\begin{aligned}\oint_C f(\mathrm{z})\mathrm{d}z&=\left[\int_{l_1}+\int_{C_R}+\int_{l_2}+\int_{C_r}\right]f(\mathrm{z})\mathrm{d}z\\&=2\pi i\cdot\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{\ln^3 x}{x^2+3x+2}\right]_{z=e^{i\pi}}+\mathrm{Res}\left[\frac{\ln^3 x}{x^2+3x+2}\right]_{z=2e^{i\pi}}\right\}\\&=2\pi i\cdot\left((i\pi)^3-(\ln 2+i\pi)^3\right)\\&=6\pi^2\ln^2 2+i\left(6\pi^3\ln 2-2\pi\ln^3 2\right)\end{aligned}$$

当取极限 $R\to\infty, r\to 0$ 时,

$\because$ 在 l_1 上 $\arg z=0$，$\therefore\int_{l_1}f(\mathrm{z})\mathrm{d}z=\int_0^\infty\frac{\ln^3 x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$,

$\because$ 在 l_2 上 $\arg z=2\pi$,

$\therefore\int_{l_2}f(\mathrm{z})\mathrm{d}z=\int_\infty^0\frac{\ln^3\left(xe^{i2\pi}\right)}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=-\int_0^\infty\frac{(\ln x+i2\pi)^3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$,

$$\because \lim_{z\to 0} z\cdot\left[\frac{\ln^3 z}{z^2+3z+2}\right]=0,\quad \lim_{z\to\infty} z\cdot\left[\frac{\ln^3 z}{z^2+3z+2}\right]=0$$，由引理 1，2，

$$\therefore \lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{\ln^3 z}{z^2+3z+2}\mathrm{d}z=0,\quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\ln^3 z}{z^2+3z+2}\mathrm{d}z=0,$$

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac{\ln^3 x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x-\int_0^\infty\frac{(\ln x+i2\pi)^3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x\\&=-i6\pi\int_0^\infty\frac{\ln^2 x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x+i8\pi^3\int_0^\infty\frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x+12\pi^2\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x\\&=6\pi^2\ln^2 2+i\left(6\pi^3\ln 2-2\pi\ln^3 2\right)\end{aligned}$$

因此

$$-6\pi\int_0^\infty\frac{\ln^2 x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x+8\pi^3\int_0^\infty\frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\left(6\pi^3\ln 2-2\pi\ln^3 2\right)$$

而对 $\int_0^\infty\frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$，

令 $F(z)=\frac{\ln z}{z^2+3z+2}$，取相同的积分闭曲线，

$$\begin{aligned}\oint_C F(\mathrm{z})\mathrm{d}z&=\left[\int_{l_1}+\int_{C_R}+\int_{l_2}+\int_{C_r}\right]F(\mathrm{z})\mathrm{d}z\\&=2\pi i\cdot\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\right]_{z=e^{i\pi}}+\mathrm{Res}\left[\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\right]_{z=2e^{i\pi}}\right\}\\&=2\pi i\cdot\left((i\pi)-(\ln 2+i\pi)\right)\\&=-i2\pi\ln 2\end{aligned}$$

当取极限 $R\to\infty, r\to 0$ 时,

$\because$ 在 l_1 上 $\arg z=0$，$\therefore \int_{l_1}F(\mathrm{z})\mathrm{d}z=\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$,

$\because$ 在 l_2 上 $\arg z=2\pi$，

$$\therefore \int_{l_2}F(\mathrm{z})\mathrm{d}z=\int_\infty^0\frac{\ln\left(xe^{i2\pi}\right)}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=-\int_0^\infty\frac{\ln x+i2\pi}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x,$$

$$\because \lim_{z\to 0} z\cdot\left[\frac{\ln z}{z^2+3z+2}\right]=0,\quad \lim_{z\to\infty} z\cdot\left[\frac{\ln z}{z^2+3z+2}\right]=0$$，由引理 1，2，

$$\therefore \lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{\ln z}{z^2+3z+2}\mathrm{d}z=0,\quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\ln z}{z^2+3z+2}\mathrm{d}z=0,$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x-\int_0^{\infty}\frac{\ln x+i2\pi}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=-i2\pi\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=-i2\pi\ln 2$$

因此

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\ln 2$$

所以，由

$$-6\pi\int_0^{\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x+8\pi^3\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\left(6\pi^3\ln 2-2\pi\ln^3 2\right)$$

得

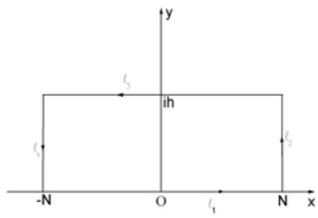
$$\int_0^{\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2\ln 2+\ln^3 2}{3}$$

6． $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}\mathrm{d}x \quad (0<\alpha<1)$，（提示：取闭合路径为矩形，上底 $h=2\pi i$）

解：

令 $f(z)=\dfrac{e^{\alpha z}}{e^z+1}$，取如图所是积分闭曲线，

其中 $h=2\pi i$。因此



$$\oint_C\frac{e^{\alpha z}}{e^z+1}\mathrm{d}z=\left[\int_{l_1}+\int_{l_2}+\int_{l_3}+\int_{l_4}\right]\frac{e^{\alpha z}}{e^z+1}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{e^{\alpha z}}{e^z+1}\right]_{z=i\pi}=2\pi i\cdot\left(-e^{i\alpha\pi}\right)$$

取极限 $N\to\infty$，有，

在 l_1 上， $z=x$， $\int_{l_1}\frac{e^{\alpha z}}{e^z+1}\mathrm{d}z=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}\mathrm{d}x$

在 l_3 上， $z=x+i2\pi$， $\int_{l_3}\frac{e^{\alpha z}}{e^z+1}\mathrm{d}z=\lim_{N\to\infty}\int_{N}^{-N}\frac{e^{\alpha(x+i2\pi)}}{e^{(x+i2\pi)}+1}\mathrm{d}x=-e^{i2\alpha\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}\mathrm{d}x$

在 l_2 上， $z=N+iy$， $\int_{l_2}\frac{e^{\alpha z}}{e^z+1}\mathrm{d}z=\int_0^h\frac{e^{\alpha(N+iy)}}{e^{(N+iy)}+1}\mathrm{d(iy)}$

在 l_4 上， $z=-N+iy$， $\int_{l_4}\frac{e^{\alpha z}}{e^z+1}\mathrm{d}z=\int_h^0\frac{e^{\alpha(-N+iy)}}{e^{(-N+iy)}+1}\mathrm{d(iy)}$

当 $N \to \infty$ 时，$\int_0^h \frac{e^{\alpha(N+iy)}}{e^{(N+iy)}+1}\mathrm{d(iy)} = 0$，$\int_h^0 \frac{e^{\alpha(-N+iy)}}{e^{(-N+iy)}+1}\mathrm{d(iy)} = 0$，证明如下：

$$\left|\int_0^h \frac{e^{\alpha(N+iy)}}{e^{(N+iy)}+1}\mathrm{d(iy)}\right| \le \int_0^h \left|\frac{e^{\alpha(N+iy)}}{e^{(N+iy)}+1}\right| \left|\mathrm{d}(iy)\right| \le \int_0^h \frac{e^{\alpha N}}{e^N-1}\mathrm{d}y = \frac{e^{\alpha N}}{e^N-1}h \to 0 \quad (N \to \infty)$$

即 $\int_0^h \frac{e^{\alpha(N+iy)}}{e^{(N+iy)}+1}\mathrm{d(iy)} = 0$

同理可证，$\int_h^0 \frac{e^{\alpha(-N+iy)}}{e^{(-N+iy)}+1}\mathrm{d(iy)} = 0$

因此，$\left(1-e^{i2\alpha\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}\mathrm{d}x = 2\pi i \cdot \left(-e^{i\alpha\pi}\right)$，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}\mathrm{d}x = 2\pi i \cdot \frac{-e^{i\alpha\pi}}{1-e^{i2\alpha\pi}} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$

另解：

令 $t = e^x$，有

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}\mathrm{Res}\left[\frac{(-z)^{\alpha-1}}{z+1}\right]_{-z=e^{i0}} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$