《数学物理方法》第二章作业参考解答

- 计算下列路径积分：

1. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^n} dz$ （n 为整数）

［解：］

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^n} dz = -\oint_{|z|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^{n-2}} d\frac{1}{z}，\text{积分都是沿正方向}$$

令 $\xi = \frac{1}{z}$，则上述积分为：
$$-\oint_{|\xi|=1} e^{\xi}\xi^{n-2} d\xi \quad \text{积分沿负方向}$$
$$= \oint_{|\xi|=1} e^{\xi}\xi^{n-2} d\xi \quad \text{积分沿正方向}$$

$n \geq 2$ 时，$|\xi| = 1$ 所围区域对被积函数是单通区域，由科希定理一可知，积分为 0

$n < 2$ 时，原积分 $= \oint_{|\xi|=1} \frac{e^{\xi}}{\xi^{2-n}} d\xi = \frac{2\pi i}{(1-n)!}(e^{\xi})^{(1-n)}|_{\xi=0} = \frac{2\pi i}{(1-n)!}$

2. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z + e^{-z} - 2}{z^2} dz$

[解：]

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z + e^{-z} - 2}{z^2} dz = 2\pi i (e^z + e^{-z} - 2)'|_{z=0} = 0$$

3. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{2z-1}{z^2(z-1)} dz$

[解：]

$$\oint_{|z|=2} \frac{2z-1}{z^2(z-1)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{z^2-(z-1)^2}{z^2(z-1)^2} dz = \oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} dz - \oint_{|z|=2} \frac{z-1}{z^2} dz$$
$$= 2\pi i - 2\pi i (z-1)'|_{z=0} = 0$$

- 设 $P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]$ 是 Legendre 多项式，证明：

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\xi^2-1)^n}{2^n(\xi-z)^{n+1}} d\xi$$

且问 γ 是什么样的曲线？

[证明：]

令 $f(z)=(z^2-1)^n$ ，由科希公式推论可得:

$$f^{(n)}(z)=\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^n}d\xi=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{(\xi^2-1)^n}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$$

$$\therefore\quad P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{(\xi^2-1)^n}{(\xi-z)^n}d\xi$$

ɣ 可为复平面上任一包含 z 的闭合曲线。

- 证明：

$$\int_0^{2\pi}e^{\rho\cos\varphi}\cos(\rho\sin\varphi-n\varphi)d\varphi=2\pi\frac{\rho^n}{n!}$$

（提示：取 $f(z)=e^z$，闭路径为 $|z|=\rho$，并利用高阶导数的柯西公式。）

[证明:]

令 $f(z)=e^z$，由科希公式推论可得:

$$\begin{aligned}f^{(n)}(0)&=(e^z)^{(n)}|_{z=0}=1\\&=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho}\frac{e^z}{z^{n+1}}dz=\frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\rho e^{i\varphi}}}{\rho^{n+1}e^{i(n+1)\varphi}}\rho e^{i\varphi}d\varphi\\&=\frac{n!}{2\pi}\frac{1}{\rho^n}\int_0^{2\pi}e^{\rho\cos\varphi}e^{i(\rho\sin\varphi-n\varphi)}d\varphi\\&=\frac{n!}{2\pi}\frac{1}{\rho^n}\int_0^{2\pi}e^{\rho\cos\varphi}(\cos(\rho\sin\varphi-n\varphi)+i\sin(\rho\sin\varphi-n\varphi))d\varphi\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\frac{n!}{2\pi}\frac{1}{\rho^n}\int_0^{2\pi}e^{\rho\cos\varphi}\cos(\rho\sin\varphi-n\varphi)d\varphi=1$$

$$\Rightarrow\int_0^{2\pi}e^{\rho\cos\varphi}\cos(\rho\sin\varphi-n\varphi)d\varphi=2\pi\frac{\rho^n}{n!}$$