《数学物理方法》第十章作业参考解答

10.1 一无限长的弦，弦上 $x = x_0$ 点受到突然的冲击（冲量为 I）。求此后弦的振动情况。

解：定解问题：$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u\big|_{t=0} = 0; \qquad u_t\big|_{t=0} = \dfrac{I}{\rho}\delta(x - x_0); \end{cases}$

根据 d’Alembent 公式，

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \frac{I}{\rho}\delta(\xi - x_0)d\xi = \frac{I}{2a\rho}[H(x - x_0 + at) - H(x - x_0 - at)]$$

10.6 长为 $2l$ 的均匀杆，两端受压而使长度缩为 $l(2-2\varepsilon)$，放手后任其自由振动，求杆的振动情况。

[解一]：设杆的中点为坐标原点，显然杆的振动是关于坐标原点 $x = 0$ 对称的，因此只需求解 $0 \le x \le l$ 段。定解问题是

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 \le x \le l) \\ u\big|_{t=0} = -\varepsilon x; & u_t\big|_{t=0} = 0; \\ u\big|_{x=0} = 0, & u_x\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

设 $u(x,t) = X(x)T(t)$ （1）

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda$$

可得，$X'' + \lambda X = 0$， （2）

$T'' + \lambda a^2 T = 0$， （3）

把①代入边界条件可得

$X(0) = 0 \qquad X'(l) = 0$ （4）

方程（2）和边界条件（4）构成本征值问题，当 $\lambda \le 0$ 时，方程无非零解，当 $\lambda > 0$ 时，方程（2）的解为

$X = A_1 \cos\sqrt{\lambda}x + A_2 \sin\sqrt{\lambda}x$ （5）

由（4）可得 $A_1 = 0$

$$X'(l)=\sqrt{\lambda}A_2\cos\sqrt{\lambda}l=0 \quad \Rightarrow \quad \cos\sqrt{\lambda}l=0$$

所以 本征值为 $\lambda=\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2$ （n=0, 1, 2, 3⋯）

相应的本征函数为 $X=X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$ （6）

$$T''+[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}]^2 T=0$$

$$T(t)=T_n(t)=C_n\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+D_n\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t$$

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(C_n\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+D_n\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t)\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

代入初始条件可得，$\begin{cases}-\varepsilon x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\\ 0=\sum\limits_{n=0}^{\infty}D_n\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\end{cases}$

系数 C_n, D_n 分别为

$$C_n=\frac{1}{\int_0^l\left[\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right]^2dx}\int_0^l-\varepsilon x\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx=(-1)^{n+1}\frac{8\varepsilon l}{(2n+1)^2\pi^2}$$

$$B_n=0$$

$$u(x,t)=\frac{8\varepsilon l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

按定解问题，此解仅适用于 $0\le x\le l$。根据对称性上式在 $-l\le x\le l$ 也成立。

［解二］

将坐标原点取在杆的左端，则解定解问题为

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx} & (0\le x\le 2l)\\ u\big|_{t=0}=\varepsilon(l-x); & u_t\big|_{t=0}=0;\\ u_x\big|_{x=0}=0, & u_x\big|_{x=2l}=0\end{cases}$$

其解为

$$u(x,t)=\frac{8\varepsilon l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

[解三]

将坐标原点取在杆的中点，直接写出杆的解定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (-l \le x \le l) \\ u\big|_{t=0} = -\varepsilon x; & u_t\big|_{t=0} = 0; \\ u_x\big|_{x=-l} = 0, & u_x\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

设$u(x,t) = X(x)T(t)$， 可得，

$$T'' + \lambda a^2 T = 0, \tag{1}$$

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{2}$$

$$X'(-l) = 0 \qquad X'(l) = 0 \tag{3}$$

方程（2）和边界条件（3）构成本征值问题，当$\lambda < 0$时，方程无非零解，当$\lambda = 0$时，得$X = X_0 = A$（常数），当$\lambda > 0$时，方程（2）的解为

$$X = A_1 \cos\sqrt{\lambda}x + A_2 \sin\sqrt{\lambda}x \tag{4}$$

由边界条件（3）可得

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}A_1 \sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}A_2 \cos\sqrt{\lambda}l = 0 \\ -\sqrt{\lambda}A_1 \sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}A_2 \cos\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases} \tag{5}$$

为使A_1, A_2不同时为零，必须

$\begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda}l & \cos\sqrt{\lambda}l \\ -\sin\sqrt{\lambda}l & \cos\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0$，即， $2\sin\sqrt{\lambda}l\cos\sqrt{\lambda}l = 0$，由此得到，

$$\lambda = \lambda_n = \left[\frac{n\pi}{2l}\right]^2 \qquad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{6}$$

为求出相应的本征函数，将（6）代入（5）中的任意一式，得

$$A_1 \sin\frac{n\pi}{2} + A_2 \cos\frac{n\pi}{2} = 0$$

由此可见，当$n = 2m$（$m = 1,2,3,\cdots$）时，$A_2 = 0$，相应本征函数是

$$X = X_n(x) = X_{2m} = \cos\frac{m\pi}{l}x$$

当$n = 2m+1$（$m = 0,1,2,3,\cdots$）时，$A_1 = 0$，相应本征函数是

$$X = X_n(x) = X_{2m+1} = \sin\frac{(2m+1)\pi}{2l}x$$

对应每一个本征值，解方程（1），可得

$$T_0(t) = C_0 t + D_0 \qquad (\lambda = \lambda_0 = 0)$$

$$T_{2m}(t) = C_m\cos\frac{m\pi a}{l}t + D_m\sin\frac{m\pi a}{l}t \qquad \left(\lambda = \lambda_{2m} = \left[\frac{m\pi}{l}\right]^2\right)$$

$$T_{2m+1}(t) = E_m\cos\frac{(2m+1)\pi a}{2l}t + F_m\sin\frac{(2m+1)\pi a}{2l}t \quad \left(\lambda = \lambda_{2m+1} = \left[\frac{(2m+1)\pi}{2l}\right]^2\right)$$

$$\begin{aligned}u(x,t) = {} & C_0 t + D_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(C_m\cos\frac{m\pi a}{l}t + D_m\sin\frac{m\pi a}{l}t)\cos\frac{m\pi}{l}x \\ & + \sum_{m=0}^{\infty}(E_m\cos\frac{(2m+1)\pi a}{2l}t + F_m\sin\frac{(2m+1)\pi a}{2l}t)\sin\frac{(2m+1)\pi}{2l}x\end{aligned}$$

代入初始条件可得，

$$\begin{cases} -\varepsilon x = D_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m\cos\frac{m\pi}{l}x + \sum_{m=0}^{\infty} E_m\sin\frac{(2m+1)\pi}{2l}x \\ 0 = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} D_m\frac{m\pi a}{l}\cos\frac{m\pi}{l}x + \sum_{m=1}^{\infty} F_m\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x \end{cases}$$

所以系数分别为

$$D_0 = \frac{1}{\int_{-l}^{l}\mathrm{d}x}\int_{-l}^{l} -\varepsilon x\mathrm{d}x = 0$$

$$C_m = \frac{1}{\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{m\pi x}{l}\right]^2\mathrm{d}x}\int_{-l}^{l} -\varepsilon x\cos\frac{m\pi x}{l}\mathrm{d}x = 0$$

$$E_m = \frac{1}{\int_{-l}^{l}\left[\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2l}\right]^2\mathrm{d}x}\int_{-l}^{l} -\varepsilon x\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2l}\mathrm{d}x = (-1)^{m+1}\frac{8\varepsilon l}{(2m+1)^2\pi^2}$$

$C_0 = 0$，$D_m = 0$，$F_m = 0$，因此，

$$u(x,t) = \frac{8\varepsilon l}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos\frac{(2m+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{2l}$$

10.9 求二维无限深势阱的 Schrodinger 方程

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y)\right]=E\psi(x,y) \qquad (0\le x\le a, 0\le y\le a) \\ \psi\big|_{x=0}=0, \psi\big|_{x=a}=0 \\ \psi\big|_{y=0}=0, \psi\big|_{y=a}=0 \end{cases}$$

中能级 E 的最小值和次小值以及相应的归一化波函数。

解：

令 $\psi(x,y)=X(x)Y(y)$ 代入原薛定谔方程

得 $\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\frac{2mE}{\hbar^2}$

可设 $\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$ （1）

$\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\mu$ （2）

其中，$\lambda+\mu=\frac{2mE}{\hbar^2}$， （3）

由边界条件，得

$X(0)=0, X(a)=0$ （4）

$Y(0)=0, Y(a)=0$ （5）

方程（1）和边界条件（4）构成本征值问题，解得

本征值 $\lambda_n=(\frac{n\pi}{a})^2$, （n =1, 2, 3, …）

相应本征函数 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a}$

相似地，由方程（2）和边界条件（5）构成的本征值问题，得

本征值 $\mu_m=(\frac{m\pi}{a})^2$

相应本征函数 $Y_m(y)=\sin\frac{m\pi y}{a}$ （m =1, 2, 3, …）

由（3）式得，

$$E_{nm}=\frac{\hbar^2}{2m}(\lambda_n+\mu_m)=\frac{(n^2+m^2)\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

相应的本征函数 $\psi_{nm}=C\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{a}$，

归一化后$\psi_{nm}=\dfrac{2}{a}\sin\dfrac{n\pi x}{a}\sin\dfrac{m\pi y}{a}$

E 最小值为$E_{11}=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}$, 对应的本征函数为$\psi_{11}=\dfrac{2}{a}\sin\dfrac{\pi x}{a}\sin\dfrac{\pi y}{a}$

次小值为$E_{12}=E_{21}=\dfrac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$，

分别对应本征函数$\psi_{12}=\dfrac{2}{a}\sin\dfrac{\pi x}{a}\sin\dfrac{2\pi y}{a},\psi_{21}=\dfrac{2}{a}\sin\dfrac{2\pi x}{a}\sin\dfrac{\pi y}{a}$

10.13 求解均匀细杆的导热问题，设杆的侧面是绝热的，初始温度为零，$x=l$端保持为零度，而另一端$x=0$的温度为At（A 为常数）。

解：定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}\\ u\big|_{t=0}=0;\\ u\big|_{x=0}=At; \qquad u\big|_{x=l}=0\end{cases}$$

令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

$v(x,t)=C_1(t)x+C_2(t)$代入边界条件，得

$$\begin{cases}v\big|_{x=0}=C_2(t)=At\\ v\big|_{x=l}=C_1(t)l+C_2(t)=0\end{cases}$$

解得，$C_1(t)=-\dfrac{C_2(t)}{l}=-\dfrac{A}{l}t$， $C_2(t)=At$，因此

$$v(x,t)=\frac{At(l-x)}{l}$$

关于w得定解问题为

$$\begin{cases}w_t-a^2w_{xx}=-\dfrac{A(l-x)}{l}\\ w\big|_{t=0}=0\\ w\big|_{x=0}=0; \qquad w\big|_{x=l}=0\end{cases}$$

现在用本征函数法求解此定解问题。相应齐次方程经分离变量后得到的本征值问题是，

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=0,X(l)=0\end{cases}$$

其本征值 $\lambda_n=(\frac{n\pi}{a})^2$,　　（n =1, 2, 3, …）

相应本征函数　$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a}$

将 w 和非齐次项按本征函数系展成 Fourier 级数，为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$-\frac{A(l-x)}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中系数 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l(-\frac{A(l-x)}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}dx=-\frac{2A}{n\pi}$，

将它们代入方程，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(T_n'+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n)\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

比较两边系数，得

$$\begin{cases}T_n'+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n=-\frac{2A}{n\pi}\\ T_n\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

用常数变异法可解得 $T_n=\frac{2Al^2}{n^3\pi^3a^2}(e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}}-1)$，因此

$$w=\frac{2Al^2}{\pi^3a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}}-1)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

所以 $u(x,t)=\frac{At(l-x)}{l}+\frac{2Al^2}{\pi^3a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}}-1)\sin\frac{n\pi x}{l}$

10.14 求解定解问题（b 为常数）

$$\begin{cases}u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=b\sinh x \qquad (0\le x\le l)\\ u\big|_{x=0}=0,\qquad u\big|_{x=l}=0\\ u\big|_{t=0}=0,\qquad u_t\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

解：（用本征函数法求解）

先将相应的齐次方程分离变量，得到本征值问题

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=0\qquad X(l)=0\end{cases}, \tag{1}$$

其本征值为 $\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ (n=0, 1, 2, 3⋯)

相应的本征函数为 $X=X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$

将 u 和非齐次项按本征函数系展成 Fourier 级数，为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$b\mathrm{sinh}x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中，展开系数 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l b\sinh x\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2n\pi b(-1)^{n-1}\sinh l}{l^2+n^2\pi^2}$

将它们代入方程，得

$$\begin{cases}T_n''+(\frac{n\pi a}{l})^2T_n=\frac{2n\pi b(-1)^{n-1}\sinh l}{l^2+n^2\pi^2}=c\\ T_n|_{t=0}=0;T_n'|_{t=0}=0\end{cases}$$

用 Laplace 变换求解，

设 $T_n\leftrightarrow\overline{T}_n$，则 $T_n''\leftrightarrow p^2\overline{T}_n-pT_n(0)-T_n'(0)=p^2\overline{T}$，因此得像函数方程，

$p^2\overline{T}_n+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\overline{T}_n=c\frac{1}{p}$，解之得

$\overline{T}_n=c\frac{1}{p}\frac{1}{p^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}$，因为 $\sin\omega t\leftrightarrow\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$，利用卷积定理，得

$$\begin{aligned}T_n&=c\frac{l}{n\pi a}\int_0^t H(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau\\&=\frac{2n\pi b(-1)^{n-1}\sinh l}{l^2+n^2\pi^2}\cdot\frac{l}{n\pi a}\int_0^t H(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau\\&=\frac{2bl^2(-1)^{n-1}\sinh l}{(l^2+n^2\pi^2)n\pi a^2}(1-\cos\frac{n\pi at}{l})\end{aligned}$$

因此，$u(x,t)=\frac{2bl^2\sinh l}{\pi a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(l^2+n^2\pi^2)}\cdot(1-\cos\frac{n\pi at}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}$