第7章 生成函数与递推关系

- 7.1　幂级数型生成函数
- （多重集的组合）
- 7.2　指数型生成函数
- （多重集的排列）
- 7.3　递推关系

引言

- 1. 生成函数(母函数)
- 生成函数(称为母函数)是组合数学中的一个重要内容，可用来***求解组合计数***问题。

- 1)例:
- $(1+a_1x)(1+a_2x)\ldots\ldots(1+a_nx)$

$=1+(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)x+(a_1a_2+a_1a_3+\ldots\ldots+a_{n-1}a_n)x^2+\ldots\ldots+a_1a_2\ldots\ldots a_nx^n$

- x的系数为$a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n$;

/* 包含从$\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$中取一个组合的全体 */

- x^2的系数为$a_1a_2+a_1a_3+\ldots\ldots+a_{n-1}a_n$;

/*包含从$\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$中取两个组合的全体 */

- x^3的系数为$a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\ldots\ldots+a_{n-2}a_{n-1}a_n$;

/*包含从$\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$中取三个组合的全体 */

- …………

- x^n的系数为$a_1a_2\ldots\ldots a_n$;

/*包含从$\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$中取n个组合的全体 */

- 若令$a_1=a_2=\ldots\ldots=a_n=1$, 则$(1+x)^n=1+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\ldots\ldots+C(n,n)x^n$
- $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$
- $C(n,k)$：从$\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$中取$k$个的组合数。

- 2)例：
- $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$
- 左式$=[C(m, 0)+C(m, 1)x+\ldots\ldots+C(m, m)x^m]\times[C(n, 0)+C(n, 1)x+\ldots\ldots+C(n, n)x^n]$
- 右式$= [C(m+n, 0)+C(m+n, 1)x+\ldots\ldots+ C(m+n, m+n)x^{m+n}]$
- 展开左式，得：

$C(m, 0)\times C(n, 0)+[C(m, 1)\times C(n, 0)+ C(m, 0)\times C(n, 1)]x+ [C(m, 2)\times C(n, 0)+ C(m, 1)\times C(n, 1)+C(m, 0)\times C(n, 2)]x^2+\ldots\ldots+C(m, m)\times C(n, n)x^{m+n}$

- 比较对应项的系数，得：

$C(m+n, 1)=C(m, 1)\times C(n, 0)+ C(m, 0)\times C(n, 1)$

$C(m+n, 2)= C(m, 2)\times C(n, 0)+ C(m, 1)\times C(n, 1)+ C(m, 0)\times C(n, 2)$

……………

- 一般有：
- $C(m+n, r)=C(m, 0)C(n, r)+C(m, 1)C(n, r-1)+\ldots\ldots+C(m, r)C(n, 0)$
- ***/*Vandermonde恒等式*/***

- 2. 生成函数(母函数)的定义
- 对于序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$，定义$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots$为序列$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$的生成函数(母函数)。
- 例如：$(1+x)^n$是$C(n, 0), C(n, 1), C(n, 2), \ldots\ldots, C(n, n)$的生成函数(母函数)。

- 3. 生成函数(母函数)的实例
- 有红球两只，白球、黄球各一只，有多少种不同的组合方案？设r, w, y分别代表红球，白球和黄球。

- 解题思想：

红球不取（$r^0=1$），取1只（$r^1=r$），取2只（r^2）；

黄球不取（$y^0=1$），取1只（$y^1=y$），

白球不取（$w^0=1$），取1只（$w^1=w$），

- 根据乘法原理：

$$(1+r+r^2)(1+w)(1+y)$$

$$=1+(r+w+y)+(r^2+ry+rw+yw)+(r^2y+r^2w+rwy)+r^2yw$$

- *取一个球的组合数为3：* r，w，y
- *取两个球的组合数为4：* r^2，ry，rw，yw
- *取三个球的组合数为3：* r^2y，r^2w，rwy
- *取四个球的组合数为1：* r^2yw

- 许多组合学计数问题依赖于一个整数参数n。这个参数n常常表示问题中某个基本集或多重集的大小、组合的大小、排列中的位置等。因此一个计数问题常常不是一个孤立的问题而是一系列的单个问题。
- 例：令h_n表示$\{1, 2, ..., n\}$的排列数。$h_n=n!$，于是得到数列$h_0, h_1, h_2, ..., h_n, ...$。对于这个数列，一般项$h_n=n!$，通过选择$n$为一个特定的整数可以得到这个问题的一个实例。如：$h_5=5!$。

- 一个整数参数的某些计数问题的代数求解方法，或者导致一个显式公式，或者归结为一个函数，即生成函数，它的幂级数的系数给出计数问题的解。

7.1　幂级数型生成函数

- 一、实例
- 二、生成函数的定义
- 三、形式幂级数的运算性质
- 四、用生成函数来求多重集的r-组合数

一、实例

- ***6章提到：***
- 求多重集$S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\ldots,n_k\cdot a_k\}$ $(n=n_1+n_2+\ldots+n_k)$的r-组合数时，当对一切$i=1,2,\ldots,k$有$n_i\geq r$时，有计算公式$N=C(k+r-1, r)$；而当$r<n$，且存在某个$n_i<r$, 利用容斥原理予以解决。

- 利用组合模型来模拟多重集的r-组合数。
- ***例：***设有n个标志为$1,2,\ldots,n$的网袋，第i个$(i=1,2,\ldots n)$网袋里放有n_i个球。不同网袋里的球是不同的，而同一网袋里的球则是没有差别的，认为是相同的。

- 多重集S的一个6-组合$a_1a_1a_3a_3a_3a_4$就相应于从第1个网袋里取2个球，第3个网袋里取3个球，第4个网袋里取1个球。
- 从第1个网袋里取2个球，第3个网袋里取3个球，第4个网袋里取1个球。就对应了S的一个6-组合$a_1a_1a_3a_3a_3a_4$。

- 多重集S的r–组合数就等于从n个网袋里取r个球的取法数。用x代表球，x^{i1}代表从第1个网袋里取i_1个球，x^{i2}代表从第2个网袋里取i_2个球，…，x^{ik}代表从第k个网袋里取i_k个球。$i_1,i_2,\ldots,i_k$个满足条件$i_1+i_2+\ldots+i_k=r(i_j\le n_j,j=1,2,\ \ldots,\ k)$。故$x^{i1}x^{i2}\cdots x^{ik}=x^{i1+i2+\ldots+ik}=x^r$就对应了多重集$S$的一个$r$–组合。因为给出1个$x^r$的构成就等于给出了多重集$S$的一个$r$–组合，所以$x^r$的系数就是多重集$S$的$r$–组合数。
- 利用上述方法就得到了求组合数的方法，就称为***生成函数法***。

二、生成函数的定义

- 定义7.1：设$a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$是一个数列，构造形式幂级数$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$，称$f(x)$是数列$a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$的***生成函数***，且两个形式幂级数$\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$和$\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i$相等当且仅当对每个$i$，有$a_i=b_i$。

- 对于有限序列，可看成自某项后全为 0 的无穷序列。

为什么称为形式幂级数？

- 根据高等数学，作为幂级数要讨论它们的收敛范围，即当x在收敛范围内取值时，幂级数才会收敛于某个函数$f(x)$。而这里，x仅是记号，并不需要赋值，从而也不需要考虑收敛范围，故称为形式幂级数，而x也称为形式变元。

三、形式幂级数的运算性质

- 定理7.1：设数列$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$的生成函数分别是 $f(x), g(x)$和$h(x)$，r为常数。
- (1) 如果$b_n=ra_n$，则$g(x)=rf(x)$。
- (2) 如果$c_n=a_n+b_n$，则$h(x)=f(x)+g(x)$。
- **(3)** 如果 $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$，

则$h(x)=f(x)*g(x)$。

(4)如果

$$b_n = \begin{cases} 0 & n < l \\ a_{n-l} & n \geq l \end{cases}$$

则 $g(x) = x^l \cdot f(x)$。

(5) 如 果 $b_n = a_{n+1}$， 则

$$g(x) = \frac{f(x) - \sum_{n=0}^{l-1} a_n x^n}{x^l}$$

- (6) 如果

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i,$$

- 则

$$g(x) = \frac{f(x)}{1-x}$$

(7)如果$b_n=\sum_{i=n}^{\infty} a_i$，且$f(1)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$收敛，则

$$g(x)=\frac{f(1)-xf(x)}{1-x}$$

- (8) 如果$b_n=r^n a_n$，则$g(x)=f(rx)$。
- (9) 如果$b_n=na_n$，则$g(x)=xf'(x)$。

(10)如果$b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$，则$g(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx$。

- */*证明思想：定义7.1*/*

- 例7.1
- (1)设有质量分别为n_1克，n_2克，…，n_k克的k个砝码。现要用天平称i克的物体，物体放在左边，砝码放在右边，共有多少种不同称法?

- (2)用质量分别为1克，2克，4克，8克，16克的5个砝码，在天平上能称几种质量的物体？每种质量的物体有几种不同的称法?

- (3)用2个质量为1克，3个质量为2克，2个质量为5克的砝码在天平上能称几种质量的物体?且每种质量的物体有几种不同的称法?

- 解：（1）
- 设有a_i种方法称i克物体。K个形式幂集数的积为$(1+x^{n1})(1+x^{n2})\ldots\ldots(1+x^{nk})$。该展开式中的$x^i$幂来源于$x^{m1}x^{m2}\ldots x^{mk}=x^i$，$m_1+m_2+\ldots+m_k=i$, $m_j\in\{0, n_j\}$。
- 其中第一个括弧提供m_1次幂，第二个括弧提供m_2次幂，…，第k个括弧提供m_k次幂，$m_j=0(x^0=1)$表示n_j克砝码没有用上，$m_j=n_j$表示n_j克砝码用上了，因此展开式中x^i的系数恰好是称i克物体的方法数，故有：

$$(1+x^{n_1})(1+x^{n_2})\ldots\ldots(1+x^{n_k})=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$$

- (2) 设质量r克物体有a_r种称法，则数列$\{a_r\}$的生成函数是$f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$,
- /*1+x表示砝码为1克的或者不取或者取，取了就是1克，$1+x^{16}$表示砝码为16克的或者不取或者取，取了就是16克*/
- $(1-x)f(x)$

$=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$

$=1-x^{32}$。

- 所以$f(x)=(1-x^{32})/(1-x)=1+x+x^2+\ldots+x^{31}$。
- 因为x^i前面系数都是1，这表明凡是不超过 31 克的物体都能用给定的 5 个砝码称出，且每个恰有一种称法。

- (3) 设质量r克物体有a_r种称法，则数列$\{a_r\}$的生成函数是$f(x)$

$=(1+x+x^2)(1+x^2+(x^2)^2+(x^2)^3)(1+x^5+(x^5)^2)$

/* $1+x+x^2$表示2个质量为1克的砝码或者不用$(x^0=1)$，或者用1个$(x^1=x)$，或者用2个(x^2) */

$=1+x+2x^2+x^3+2x^4+2x^5+3x^6+3x^7+2x^8+2x^9+2x^{10}+3x^{11}+3x^{12}+2x^{13}+2x^{14}+x^{15}+2x^{16}+x^{17}+x^{18}$。

- /*表明凡是质量不超过 18 克的物体都能用给定的砝码称出。其中质量为 1, 3, 15, 17, 18克的只有一种称法，质量为 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 16克的物体有2种称法，而质量为 6, 7, 11, 12克的物体有3种称法。*/

四、用生成函数来求多重集的r-组合数

- 例7.2：设多重集$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$，$S$的$r$-组合数是$a_r=C(r+k-1, r)$，它也是方程$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$的非负整数解的个数。现用生成函数的方法求$a_r$。

- 设$\{a_r\}$的生成函数为$f(y)$，构造幂级数$(1+y+y^2+\ldots)^k$
- /* $(1+y+y^2+\ldots)$表示a_i可以不取, 取1个, 2个… */
- 展开该式，y^r幂来源于$y^{x1}y^{x2}\ldots y^{xk}= y^{x1+x2+\ldots+xk}$，$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$，其中$y^{x1}$来自第一个因式$(1+y+y^2+\ldots)$，$y^{x2}$来自第二个因式$(1+y+y^2+\ldots)$，…，$y^{xk}$来自第$k$个因式$(1+y+y^2+\ldots)$，且$x_1$, x_2, …, x_k为非负整数。因此展开式中y^r的系数对应了不定方程$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$的非负整数解的个数。故所构造的幂级数就是$\{a_r\}$的生成函数$f(y)$。由推论6.4可得：

$$f(y)=\frac{1}{(1-y)^k}=\sum_{r=0}^{\infty}C(k+r-1,r)y^r$$

- 所以$a_r=C(k+r-1, r)$

- 设多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$，$S$的$r-$组合数$a_r$就相当于方程$x_1+x_2+\ldots+x_k= r$ $(x_1\le n_1, x_2\le n_2, \ldots, x_k\le n_k)$的非负整数解的组数。设$\{a_r\}$的生成函数为$f(y)$，类似可以得到：
- $f(y)=(1+y+y^2+\ldots+y^{n1})(1+y+y^2+\ldots+y^{n2})\ldots(1+y+y^2+\ldots+y^{nk})$，则$f(y)$的展开式中$y^r$的系数$a_r$就是所求的$S$的$r$-组合数。

- 例7.3： 设$S=\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_k\}$，求$S$的每个元素只出现偶数次的$r$-组合数$a_r$。
- 解：令$\{a_r\}$的生成函数是$f(y)$，因为要求S的每个元素只出现偶数次，则对a_1来讲，或者不出现，或者是2，4，6，…其他也类似。故生成函数为：

$$f(y)=(1+y^2+y^4+\ldots)^k=1/(1-y^2)^k$$
$$=1+ky^2+C(k+1,2)y^4+\ldots+C(k+n-1,n)y^{2n}+\ldots$$

所以有

$$a_r=\begin{cases} C(k+r/2-1, r/2) & r=2n(n=0,1,\ldots) \\ 0 & r=2n+1(n=0,1,\ldots) \end{cases}$$

- 例7.4： 求$x_1+x_2+x_3=5(0\le x_1,0\le x_2,1\le x_3)$的整数解组数。
- 解： 令$x_3'=x_3-1$，则原问题即为求在约束条件$0\le x_1$，$0\le x_2$，$0\le x_3'$下$x_1+x_2+x_3'=4$的非负整数解组数。解的组数为a_4，$\{a_r\}$的生成函数是

$$f(y)=\frac{1}{(1-y)^3}=\sum_{r=0}^{\infty}C(r+2,r)y^r$$

- 所以有$a_4=C(4+2, 4)=15$。

7.2 指数型生成函数

- 1. 问题提出：用生成函数解决排列问题

$a_1, \ldots, a_n$互不相同，n个元素$a_1, \ldots, a_n$的全排列：$n!$ 。

如果其中a_1重复n_1次，全排列：$n!/n_1!$。

如果其中a_1重复n_1次，a_2重复n_2次，……，如果其中a_h重复n_h次，$n_1+n_2+\ldots\ldots+n_h=n$;全排列：

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots\ldots n_h!}$$

- 例：8个元素中a_1重复3次，a_2重复2次， a_3重复3次，从中取r个组合。
- 解：$(1+x_1+x_1^2+x_1^3)(1+x_2+x_2^2)(1+x_3+x_3^2+x_3^3)$

$$=[1+(x_1+x_2)+(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+(x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2)+(x_1^3x_2+x_1^2x_2^2)+x_1^3x_2^2](1+x_3+x_3^2+x_3^3)$$

展开式中4次方项为:

$x_1x_3^3 + x_2x_3^3 + x_1^2x_3^2 + x_1x_2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + x_1^3x_3 + x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2$

$x_1x_3^3$项表示1个a_1, 3个a_3; $x_1x_2^2x_3$项表示1个a_1, 2个a_2, 1个a_3;

$x_1x_3^3$对应的排列数为4!/1!3!, $x_1x_2^2x_3$对应的排列数为4!/1!2!1!.

◆取4个元素的排列数为:

$$4!\left(\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{1!1!2!}+\frac{1}{2!2!}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3!1!}+\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{1!2!1!}+\frac{1}{3!1!}+\frac{1}{2!2!}\right)$$

$$=4!\left(\frac{4}{3!}+\frac{3}{2!2!}+\frac{3}{2!}\right)=16+18+36=70$$

◆指数型生成函数:

$$f(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)$$

$$=1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{14}{3}x^3+\frac{35}{12}x^4+\frac{17}{12}x^5+\frac{35}{72}x^6+\frac{8}{72}x^7+\frac{1}{72}x^8$$

$$=1+3\frac{x}{1!}+9\frac{x^2}{2!}+28\frac{x^3}{3!}+70\frac{x^4}{4!}+170\frac{x^5}{5!}+350\frac{x^6}{6!}+560\frac{x^7}{7!}+560\frac{x^8}{8!}$$

取4个的排列数为

$$4!\frac{35}{12}=4\times3\times2\times\frac{35}{12}=70$$

取5个的排列数为

$$5!\frac{17}{12}=10\times17=170$$

- 2. 定义7.2:设$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$是一个数列，构造形式幂级数

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{a_r}{r!}x^r=a_0+a_1x+\frac{a_2}{2!}x^2+\ldots\ldots+\frac{a_n}{n!}x^n+\ldots$$

称$f(x)$是数列$a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$的指数型生成函数。

- 定理7. 2：设a_n, b_n的指数生成函数分别为$f_e(x)$和$g_e(x)$，则：

$$f_e(x)\cdot g_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\frac{x^n}{n!}$$

- 其中 $C_n=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)a_kb_{n-k}$

- 例：数列1, 1, ……, 1, ……的指数型生成函数为:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

- 3. 指数型生成函数来解决多重集的排列问题
- 定理7.3：
- 设有限多重集$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$，且$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$，对任意的非负整数$r$，$\alpha_r$为$S$的$r$-排列数，则数列$\alpha_r$的指数型生成函数为：$g(x)=g_{n1}(x)\cdot g_{n2}(x)\cdot\ldots\cdot g_{nk}(x)$，其中$g_{ni}(x)=1+x+x^2/2!+\ldots+x^{ni}/n_i!$, $i=1,2,\ldots,k$。

- 证明思想：要证明α_r的指数型生成函数为$g_{n1}(x)\cdot g_{n2}(x)\cdot\ldots\cdot g_{nk}(x)$，关键是证明$g_{n1}(x)\cdot g_{n2}(x)\cdot\ldots\cdot g_{nk}(x)$的展开式中项$x^r/r!$的系数就是$\alpha_r$。

- 证明：
- /*考察$g_{n1}(x)\cdot g_{n2}(x)\cdot\ldots\cdot g_{nk}(x)$的展开式中项$x^r/r!$的情况。*/
- x^r的项为下述项之和

$$\frac{x^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{x^{m_2}}{m_2!}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{x^{m_k}}{m_k!}$$

其中$m_1+m_2+\ldots\ldots+m_k=r$, $0\le m_i\le n_i$, $i=1, 2, \ldots, k$.

- 上式可以写成:

$$\frac{x^{m_1+m_2+\ldots\ldots+m_k}}{m_1!m_2!\ldots\ldots m_k!} = \frac{r!}{m_1!m_2!\ldots\ldots m_k!} \cdot \frac{x^r}{r!}$$

- 所以在g(x)的展开式中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数是:

$$a_r = \sum \frac{r!}{m_1!m_2!\ldots\ldots m_k!}$$

- 这里求和是对方程$m_1+m_2+\ldots\ldots+m_k=r,\ 0\le m_i\le n_i$, $(i=1, 2, \ldots, k.)$的一切非负整数解进行求和的。又因为对固定的m_1，m_2，……，m_k，$\frac{r!}{m_1!m_2!\ldots\ldots m_k!}$就是S的r元子集$\{m_1\cdot x_1, m_2\cdot x_2, \ldots, m_k\cdot x_k\}$的全排列数。
- 故a_r就是S的所有r元子集的全排列数之和，即S的r-排列数。所以g(x)的展开式中的$\frac{x^r}{r!}$的系数a_r就是多重集S的r-排列数。

- 例7.5：设有6个数字，其中 3 个数字 1, 2个数字6, 1个数字8，问能组成多少个四位数?
- 解：这实际上是求$S=\{3\cdot x_1, 2\cdot x_2, 1\cdot x_3\}$中取4个的多重集排列数问题。其指数型生成函数为：
- $g(x)$
- $=(1+x+x^2/2!+x^3/3!)(1+x+x^2/2!)(1+x)$
- $=1+3x+8(x^2/2!)+19(x^3/3!)+38(x^4/4!)+60(x^5/5!)+60(x^6/6!)$
- 由此可得$a_4=38$，即可组成38个四位数。

泰勒级数

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots\ldots+\frac{x^{n}}{n!}+\ldots\ldots$$

$$e^{ax}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\frac{x^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ax)^{n}}{n!}$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^{2}}{2!}-\frac{x^{3}}{3!}+\ldots\ldots$$

- 例：求1，3，5，7，9这5个数字组成的n位数个数，要求其中3和7出现的次数为偶数，其他数字出现的次数无限制。
- 解：

$$f(x)=\underbrace{(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+......)^2}_{3,7}\underbrace{(1+x+\frac{x^2}{2!}+......)^3}_{1,5,9}$$

$$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+......=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$$f(x)=\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^{2}e^{3x}=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^{x})$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(5^{n}+2*3^{n}+1)\frac{x^{n}}{n!}$$

$$a_{n}=\frac{1}{4}(5^{n}+2*3^{n}+1)$$

7.3 递推关系

- 1. 递推综述
- 递推关系是离散变量之间变化规律中常见的一种方式，与生成函数一样是解决计数问题的有力工具。
- 对数列$\{u_n\}$, 如从某项后，u_n前k项可推出u_n的普遍规律，就称为***递推关系***。
- 利用递推关系和初值在某些情况下可以求出序列的通项表达式u_n，称为该***递推关系的解***。

- 2. 递推关系实例
- 1) 例7.6：13 世纪初意大利数学家Fibonacci 研究过著名的兔子繁殖数目问题: 设一对一雌一雄小兔刚满2个月时，便可繁殖出一雌一雄一对小兔。以后每隔1个月生一对一雌一雄小兔。由一对刚出生的小兔开始饲养到第n个月，有多少对兔子?

- 解：设第n个月有F_n对兔子，它由两部分组成:
- (1)新生出的小兔，其数目等于能生小兔的大兔对数目，由于小兔满两个月才能繁殖，故数目为第$(n-2)$个月时的兔对数目，即为F_{n-2}。
- (2)原有小兔，其数目等于上月(即第 $n-1$个月)的兔对数目，即为F_{n-1}。
- 因此可建立如下的递推关系:
- $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$，并有初始条件：$F_1=F_2=1$。即这是一个带有初值的递推关系。
- <u>*/*满足这种递推关系的数列称为Fibonacci数列*/*</u>

- 2)　例7.7：设多重集$S=\{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c\}$，求$a$不相邻的$n$-排列数。

- 解: 设a不相邻的n-排列数为a_n。
- 则$a_1=3, a_2=3^2-1=8$　　/*减1是为了减去aa*/
- 当$n\geq3$时，a不相邻的所有n-排列可分为互不相容的两类:
- (1)第一个位置排b或c，剩下的$n-1$个位置a不相邻，由a_n的定义知，a不相邻的$(n-1)$-排列数为a_{n-1}，根据乘法原则，这类排列数为$2a_{n-1}$。
- (2)第一个位置排a，则第二个位置只能排b或c，而剩下的$n-2$个位置a不相邻，由a_n的定义知，a不相邻的$(n-2)$-排列数为a_{n-2}，根据乘法原则，这类排列数为$2a_{n-2}$。由加法原则知，a不相邻的n-排列数为: $a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}$，并有初始条件:$a_1=3$, $a_2=8$, 即这是一个带有初值的递推关系。

- 思想总结：分而治之

- 3.　两种求解递推关系的方法
- 1)　　求解常系数线性递推关系的特征根方法
-

◆（1）定义7.3

数列$\{a_n\}$满足递推关系$a_n=h_1a_{n-1}+h_2a_{n-2}+\ \ldots+h_ka_{n-k}$，$h_i$为常数，$i=1, 2, \ldots, k$，$n\geq k$，$h_k\neq 0$，称该递推关系为$a_n$的***k阶常系数线性齐次递推关系***。

形如$a_n=h_1a_{n-1}+h_2a_{n-2}+\ldots+h_ka_{n-k}+f(n)$，$h_i$为常数，$i=1, 2, \ldots, k$，$n\geq k$，$h_k\neq 0$，称该递推关系为$a_n$的***k阶常系数线性非齐次递推关系***。

- k阶常系数线性齐次递推关系与微分方程$y^{(k)}=h_1y^{(k-1)}+h_2y^{(k-2)}+\ldots+h_ky$，$h_i$为常数（$i=1, 2, \ldots, k,$）在结构上类似；
- k阶常系数线性非齐次递推关系与微分方程$y^{(k)}=h_1y^{(k-1)}+h_2y^{(k-2)}+\ldots+h_ky+f(n)$，$h_i$为常数, ($i=1,2,\ldots,k$)在结构上也类似；
- 求解方法也与相应的微分方程类似。

- （2）求解方法
- 求解常系数线性递推关系的基本方法是寻找形如$a_n=r^n$的解。
- $a_n=r^n$是$a_n=h_1a_{n-1}+h_2a_{n-2}+\ldots+h_ka_{n-k}$的解，$r^n=h_1r^{n-1}+h_2r^{n-2}+\ldots\ldots+h_kr^{n-k}$的等价方程$r^k-h_1r^{k-1}-h_2r^{k-2}-\ldots\ldots-h_k=0$。
- 这个方程称为该递推关系的***特征方程***，方程的解称为该递推关系的***特征根***。

- （3）定义7. 4:
- 方程$x^k-h_1x^{k-1}-h_2x^{k-2}-\ldots-h_k=0$称为$k$阶常系数线性齐次递推关系的***特征方程***, 它的k个根 $q_1,q_2,\ldots,q_k$称为该递推关系的***特征根***。其中$q_i(i=1,2,\ldots,k)$是复数。

- 定理7.4.
- $a_n=q^n$, $q\neq 0$是常系数线性齐次递推关系的解的充要条件是: q是该递推关系的特征根。

- 定理7.5:
- 若k阶常系数线性齐次递推关系的特征方程有k个互异的特征根: $q_1, q_2, \ldots, q_k$, 则该递推关系的通解为: $a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_k q_k^n$, 其中$c_1, c_2, \ldots c_k$为任意常数。

- 例7.8　求例7.7的带初值递推关系的解。
- 解：例7.7的递推关系的特征方程为：x^2-2x-2=0, 其根为：

$$q_1 = 1+\sqrt{3}, q_2 = 1-\sqrt{3}$$

由定理7.5，递推关系的通解为：

$$a_n = (1+\sqrt{3})^n c_1 + (1-\sqrt{3})^n c_2$$

◆ 要满足初值条件，故有：

$$\begin{cases}(1+\sqrt{3})c_1+(1-\sqrt{3})c_2=3\\(1+\sqrt{3})^2c_1+(1-\sqrt{3})^2c_2=8\end{cases}$$

$$c_1=\frac{5\sqrt{3}-1}{6\sqrt{3}},c_2=\frac{5\sqrt{3}+1}{6\sqrt{3}}$$

- 所以，a不相邻的n-排列数为:

$$a_n=\frac{5\sqrt{3}-1}{6\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n+\frac{5\sqrt{3}+1}{6\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n$$

- 定理7.6:若k阶常系数线性齐次递推关系的特征方程有t个互异的特征根: $q_1, q_2, \ldots, q_t$，$m_1, m_2, \ldots, m_t$为相应根的重数，且$m_1+m_2+\ldots+m_t=k$, 则该递推关系的通解为:

$$u_n=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{m_i}c_{ij}n^{j-1}q_i^n$$

其中c_{ij}为任意常数$(1\le j\le m_i, 1\le i\le t)$为任意常数。

例7.9 求解递推关系

$a_n+a_{n-1}-3a_{n-2}-5a_{n-3}-2a_{n-4}=0,\ n\geq 4$

$a_0=1,\ a_1=a_2=0,\ a_3=2$

- 解：该递推关系的特征方程是$x^4+x^3-3x^2-5x-2=0$，其特征根是-1,-1,-1,2。由定理7.6得：
- $a_n=c_{11}(-1)^n+c_{12}n(-1)^n+c_{13}n^2(-1)^n+c_{21}2^n$
- 代入初值得到以下方程组：
- $c_{11}+c_{21}=1$
- $-c_{11}-c_{12}-c_{13}+c_{21}=0$
- $c_{11}+2c_{12}+4c_{13}+4c_{21}=0$
- $-c_{11}-3c_{12}-9c_{13}+8c_{21}=2$

- 解此方程组得：
- $c_1=7/9,\ c_2=-13/16,\ c_3=1/16,\ c_4=1/8$
- 故递推关系的解是：
- $a_n=7/9(-1)^n-(13/16)n(-1)^n+(1/16)n^2(-1)^n+(1/8)2^n$

- (4) k阶常系数线性非齐次递推关系
- k阶常系数线性非齐次递推关系的通解与k阶常系数线性非齐次微分方程的通解类似，也是齐次通解与特解之和，即：

$$a_n = a'_n + a_n^*$$

其中a'_n是k阶常系数线性非齐次递推关系所对应的k阶常系数线性齐次递推关系$a_n = h_1 a_{n-1} + h_2 a_{n-2} + \ldots + h_k a_{n-k} = 0$的通解，而$a_n^*$是$k$阶常系数线性非齐次递推关系的特解。

- 求解方法
- 对于a'_n由定理7.6即得，故关键是a_n^*的求解。对于一般的$f(n)$没有普遍的解法，在某些简单的情况下可用待定系数法求出a_n^*。

- (1) 当$f(n)$是n的t次多项式时，对应的特解形式为：

$$a_n^* = P_1 n^t + P_2 n^{t-1} + \ldots + P_t n + P_{t+1}$$，其中$P_1, P_2, \ldots, P_t, P_{t+1}$为待定系数。

- (2) 当$f(n)$是β^n的形式时，若β不是对应的齐次递推关系的特征根，则对应的特解是$P \cdot \beta^n$，其中P为待定系数；若β是对应的齐次递推关系的m重特征根，则对应的特解是 $P \cdot n^m \cdot \beta^n$，其中$P$为待定系数。

- 例7.10:
- 求解递推关系$a_n+2a_{n-1}=n+1$, $n\geq 1$, $a_0=2$。

- 解:
- 该递推关系导出的齐次线性递推关系$a_n+2a_{n-1}=0$的特征方程是$x+2=0$，其特征根是-2。由定理7.5知其通解为$a'_n=c(-2)^n$；又因$f(n)=n+1$，故它的特解具有形式$a_n^*=P_1n+P_2$，其中P_1，P_2为待定系数。将其代入原递推关系$P_1n+P_2+2(P_1\cdot(n-1)+P_2)=n+1$，即：$3P_1n+3P_2-2P_1=n+1$，比较上式两端$n$的同次幂的系数，得：$P_1=1/3$, $P_2=5/9$。因此，$a_n^*=(n/3)+5/9$是原递推关系的特解。而它的通解是$a_n=c(-2)^n+(n/3)+5/9$。要它满足初值，只须$2=c+(5/9)$，故$c=13/9$。所以带初值的递推关系的解为：$a_n=(13/9)(-2)^n+(n/3)+5/9$

- 例：求$h(n)=2h(n-1)+1$，并有初始条件:$h(1)=1$的递推关系
- 解：特征根$x=2$，所以$h'(n)=c2^n$，因为$f(n)=1$，所以特解$h^*(n)=P_1$，代入原递推关系$P_1=2P_1+1$，所以$P_1=-1$．因此$h(n)=c2^n-1$．因为$h(1)=1$，所以$c=1$．故$h(n)=2^n-1$．

- 例：求解下面递推关系的特解$a_n=a_{n-1}+7n$, $n\geq 1$.

- 解:该递推关系导出的齐次线性递推关系$a_n-a_{n-1}=0$的特征方程是$x-1=0$，其特征根是1。因为$f(n)=7n$，如果设特解为$a_n^*=P_1n+P_2$, 代入原递推关系$P_1n+P_2-P_1(n-1)-P_2=7n$，即：$P_1=7n$，与P_1为常量矛盾。其原因是当唯一的特征根是1时，若所设特解中n最高次幂与$f(n)$一样时，代入递推关系后，等式左边的n最高次幂比右边的次数低，在此情况上，采用升幂的方法,且可不设常数项.令$a_n^*=P_1n^2+P_2n$, 代入原递推关系化简后得: $2P_1n+P_2-P_1=7n$，比较上式两端n的同次幂的系数，得：$2P_1=7$, $P_2-P_1=0$，所以$P_2=P_1=7/2$。因此，$a_n^*=7n/2+7/2$

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2^n, n \geq 3 \\ a_0 = 4, a_1 = 10, a_2 = 9 \end{cases}$$

- 解：递推关系：$a_n=4a_{n-1}-5a_{n-2}+2a_{n-3}, n\geq 3$ (*), 特征方程$x^3-4x^2+5x-2=0$, 特征根$x_1=x_2=1, x_3=2$, 通解：$a_n=c_1+c_2*n+c_3*2^n$, 因为2是(*)的一重特征根，所以递推关系$a_n=4a_{n-1}-5a_{n-2}+2a_{n-3}+2^n$,(**)($n\geq 3$)有形如$a_n=A*n*2^n$的特解，其中$A$为常数。以$a_n=A*n*2^n$代入(**)，得$A*n*2^n=4*A*(n-1)*2^{n-1}-5*A*(n-2)*2^{n-2}+2*A*(n-3)*2^{n-3}+2^n$, $A=4$

◆所以$a=c_1+c_2*n+c_3*2^n+4*n*2^n$，由初始条件

$$\begin{cases} c_1+c_3=4 \\ c_1+c_2+2c_3+8=10 \\ c_1+2c_2+4c_3+32=19 \end{cases}$$

$$c_1=17, c_2=11, c_3=-13$$

$$a_n=17+11*n-13*2^n+4*n*2^n, n=0,1,2,......$$

- 例：

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} - 2 \times 3^{n-2} \quad n \geq 2 \\ a_0 = 3, a_1 = 4 \end{cases}$$

- 解：递推关系$a_n=7a_{n-1}-10a_{n-2}, n\geq 2$ (*)

特征方程$x^2-7x+10=0$，$x_1=2$，$x_2=5$，则(*)的通解为$a_n=c_1*2^n+c_2*5^n$。因为3不是(*)的特征根，所以递推关系$a_n=7a_{n-1}-10a_{n-2}$，$n\geq 2$ (**)有形如$a_n=A*3^n$特解，A为常数。以$a_n=A*3^n$代入(**)，得 $A*3^n = 7*A*3^{n-1} - 10*A*3^{n-2} - 2*3^{n-3}$，即 $9A=21A-10A-2$，$A=1$。

$a_n= c_1*2^n+c_2*5^n+3^n$。

◆由初始条件

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 3 \\ 2c_1 + 5c_2 + 3 = 4 \end{cases}$$

$$c_1 = 3, c_2 = -1$$

$$a_n = 3*2^n - 5^n + 3^n, n = 0,1,2,\ldots\ldots$$

4. 生成函数方法求解递推关系

- 在求解递推关系时，生成函数法也是一个有力的工具。用生成函数法求解递推关系的关键是用f(x)表示a_n的生成函数，即：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- 然后将$\{a_n\}$的递推关系代入右边，便得到一个关于f(x)的方程，解此方程，并将所得的解展开成幂级数，就可得到 a_n 的表达式。

- 例:用生成函数法求解递推关系:
- $a_n=a_{n-1}+9a_{n-2}-9a_{n-3}, n\geq 3$
- $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2$

- 解:设$\{a_n\}$的生成函数为:
- $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$
- 则:
- $-xf(x)=-a_0x-a_1x^2+-a_2x^3\ldots+a_nx^{n+1}-\ldots$
- $-9x^2f(x)=-9a_0x^2-9a_1x^3-9a_2x^4-\ldots-9a_{n-2}x^n-\ldots$
- $9x^3f(x)=9a_0x^3+9a_1x^4+\ldots+9a_{n-3}x^n+\ldots$

- 以上四式相加得：
- $(1-x-9x^2+9x^3)f(x)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1-9a_0)x^2+(a_3-a_2-9a_1+9a_0)x^3+\ldots+(a_n-a_{n-1}-9a_{n-2}+9a_{n-3})x^n+\ldots$
- 因为$a_0=0,a_1=1$，$a_2=2$，且当$n\geq 3$时，$a_n-a_{n-1}-9a_{n-2}+9a_{n-3}=0$，$(a_n=a_{n-1}+9a_{n-2}-9a_{n-3})$
- 所以有：
- $(1-x-9x^2+9x^3)f(x)=x+x^2$
- 即：$f(x)=(x+x^2)/(1-x-9x^2+9x^3)$
- $=(x+x^2)/((1-x)(1+3x)(1-3x))$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1+3x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-3x}$$

- 而$1/(1-x)=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$;
- $1/(1+3x)=1-3x+3^2x^2-\ldots+(-1)^n3^nx^n+\ldots$;
- $1/(1-3x)=1+3x+3^2x^2+\ldots+3^nx^n+\ldots$;
- 因此有：

$$a_n=-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}(-1)^n\cdot 3^n+\frac{1}{3}\cdot 3^n$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-1)^n\cdot 3^{n-1}+3^{n-1}$$

- 作业: 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 14(1)(3), 15