高维微积分的方法化

谢锡麟[*]

第一部分 高维微分学

1. **向量值映照/多元函数极限的计算方法。** （Ⅰ）**正向说明说明极限存在**：① 利用不等式控制；② 利用展开，一元函数复合多元函数（小量），可利用一元函数展开。（Ⅱ）**反向说明极限不存在**：① 基于路径分析说明极限的路径相关性，以此说明极限不存在；② 设有二个投影极限函数存在，如果二个累次积分至少有一个不存在或者二个累次积分存在但不相等，则整体极限一定不存在。处理函数极限时，注意**主部分离**以简化对象。
2. **向量值映照/多元函数导数的计算方法。** （Ⅰ）**充分性方法**：① 向量值映照的可微性、Jacobi矩阵每一列的意义；② 矩阵形式的链式求导。（Ⅱ）**极限分析方法**：分片定义的多元函数在分解点/线上的连续性、可微性、一阶与二阶偏导数的计算，一般需按极限定义。
3. **多元函数的无限小分析方法。** 指获得多元函数的高阶多项式逼近的系统方法，**处理流程**：① 将多元函数分解为一元函数与多元函数（小量）的复合，由此利用一元函数的高阶多项式逼近。② 基于Landau的符号进行简并运算，获得各阶的表达式，可反向确定展开点处各高阶偏导数的值。值得指出，类似于获得一元函数的高阶多项式逼近，获得多元函数的高阶多项式逼近也不是直接套用无限小增量公式，而是基于间接性方法，一般只有代数运算。
4. **事物因果分解的方法。** （Ⅰ）**事物的因果分解**：① 明确事物刻画的二个方面，表征（由有限个数组成）、关系（由有限个多元函数组成）。② 将表征分为二组，一组为因的候选、一组为果的候选（此组的元素个数与关系的个数相同）；引入隐映照定理的映照，检查映照相对于果的Jacobi矩阵非奇异，由此局部存在事物的因果分解。（Ⅱ）**隐映照一阶、二阶等导数/Jacobi矩阵的计算**，涉及Cramer法则、矩阵形式链式求导。（Ⅲ）**曲线与曲面的隐式形式与其几何量的计算**，曲线的切向量与切线表示、曲面的法向量与切平面表示。
5. **多元函数最值问题的处理方法。**（Ⅰ）**区域内部的最值问题**：① 基于目标函数的Jacobi阵求临界点。② 基于目标函数的Hesse阵判定极值类别。（Ⅱ）**区域边界的最值问题**：基于边界面或线的隐式表示构建Lagrange函数，按其Jacobi阵求临界点，就此往往需要基于临界点方程组的自身特点。② 基于Lagrange函数的Hesse阵（相对于空间变量）判定极值类别。注：如果已知边界面或线的显示表示，则边界上的目标函数可对应至参数域的目标函数。（Ⅲ）**利用约束上最值问题获得函数型不等式**。
6. **方程变换的方法。** （Ⅰ）**仅有自变量变换**。（Ⅱ）**仅有因变量变换**。（Ⅲ）**既有自变量变换又有因变量变换**。注：基于因果分解与矩阵形式链式求导，目标为显式获得新因变量相对于新自变量的Jacobi矩阵；二阶导数基于一阶导数的计算。

---

[*] 联系方法：Email xiexilin@fudan.edu.cn; Tel：021-65643938、13601747708

第二部分 高维积分学

7. **曲线、曲面、体积上积分的直接计算方法。**（Ⅰ）**曲线、曲面、体积上积分的意义**：① 计算累积效应的基本流程：整体细分、局部近似、引入极限。② 基于局部近似获得各种累积效应的计算式。（Ⅱ）**直接计算的方法：**① 利用Fubini定理，累次积分与整体积分之间的转换。② 利用体积分换元公式，需综合考虑被积函数与积分区域的简化。具体变换涉及：广义极坐标与球坐标；将由若干对曲面/曲线族围成的区域变换至方块；角区变换；旋转变换。（Ⅲ）**广义积分的意义与计算。**
8. **曲线、曲面、体积上积分的间接计算方法。**（Ⅰ）**曲面与体积上积分之间的关系**：① 基于Gauss-Ostrogradskii公式，可建立多连通区域的边界面上的通量与所围区域上散度的积分之间的关系，条件为积分区域内部与边界上都无奇性。② 将指定曲面上的通量转换为适定曲面上的通量，就此需要散度的体积分易于进行甚至散度为零，注意补面、奇性去除。③ 通过通量计算体积。（Ⅱ）**曲线与曲面上积分之间的关系：**① 基于Stokes公式，可将封闭曲线上的环量/做功转换至对应曲面上的旋度的通量。② 将指定曲线上的做功转换至适定曲线上的做功，一般基于旋度为零情形积分路径的无关性。③ 获得无旋场的势函数。（Ⅲ）**平面区域的边界与区域上积分之间的关系：**① 通量形式的Green公式可以理解为Gauss-Ostrogradskii公式在平面上的特殊形式；环量形式的Green公式可以理解为Stokes公式在平面上的特殊形式。② 基于Green公式，可建立平面上多连通区域的边界上的环量或者通量与所围区域上旋度或者散度的积分之间的转换关系。③ 将平面上指定曲线上的做功转换至适定曲线上的做功，就此需要旋度的面积分易于进行甚至旋度为零，需要积分区域内部与边界上都无奇性。④ 通过环量或者通量计算面积。

第三部分 级数

9. **数项级数敛散性的分析方法。**（Ⅰ）**正项级数的敛散性**：基于比较的思想，具体方法有：① 基于通项的展开；② 基于比值的形式；③ 基于上下极限的形式，包括比值、根式、Raabe形式。（Ⅱ）**交叉级数的敛散性**：基于比值的形式。（Ⅲ）**一般数项级数的敛散性**，可归纳的判定流程：绝对收敛性；自身收敛性，基于Abel-Dirichlet判别法；绝对发散性；发散性。此流程类同于广义积分的处理。
10. **函数项级数敛散性的分析方法。**（Ⅰ）**函数序列/函数项级数的收敛形式：**① 点点收敛，由此可定义极限函数/和函数；② 一致收敛，步调一致地收敛形式。函数项级数为部分和函数序列的极限。（Ⅱ）**一致收敛性的分析性质**：功能上可归纳为二点：① 求积分与求极限可以交换次序；② 求导数与求极限可以交换次序。（Ⅲ）**函数序列一致收敛性的分析方法（流程）**：① 首先，按点收敛的意义获得极限函数。② 然后，利用最值问题的方法估计误差函数在定义域上的上确界。③ 正向判定，主要基于控制无穷小量；反向判定，找出定义域上的数列，误差函数对应此数列不趋于零。（Ⅳ）**函数项级数一致收敛性的分析方法（流程）**：① 首先，按点收敛的意义获得和函数。② 然后，利用最值问题的方法估计通项函数在定义域上的上确界。③ 正向判定，主要基于控制收敛级数；

反向判定，主要基于函数项级数一致收敛的Cauchy收敛原理，找出不能控制为小量的某点上的片段和。

11. **幂级数的相关方法。**（Ⅰ）**幂级数的收敛域**：① 对称区间、内部绝对收敛（端点可以绝对、条件收敛或者发散）。② 确定收敛域的方法：比值分析；上极限形式的根式分析。（Ⅱ）**幂级数的分析性质**：① 内部一致收敛性，由此幂级数的和函数在收敛域上连续；幂级数与其逐项求导、逐项求积获得的幂级数具有相同的收敛半径（端点情况可以各异），由此收敛半径之内的任意点处，幂级数和函数的求导、求积分与求极限可以交换次序，而且可以多次进行。② 函数与幂级数之间的相关转换，主要基于基本初等函数的幂级数表示；共同收敛半径内部和函数的求导、求积分与求极限可以交换次序；处理流程上，首先建立收敛半径内部区域上的函数与幂级数之间的关系，然后再修正端点情况。
12. **Fourier级数展开形式。**主要基于点收敛意义的展开定理获得函数的三角级数展开，包括正弦或者余弦展开。

在线资源：课程体系网站 微积分的一流化进程
http://fdjpkc.fudan.edu.cn/d201353/
课程讲座的视频会发布与：教学视频栏目；如果系统维护，将通过百度云盘传递视频，信息发布于“数理研习-2018级微积分”课程微信群