**Chapter 11 积分变换法**

**一、无界空间的有源导热问题**—**Fourier变换法**

**定解问题:** 



1. 一维无源导热问题



解：把看作参数，应用Fourier变换:

****







解得 

因为，

 (利用），

利用卷积定理，得



其中 

容易验证，是问题

的解。

称为一维无源导热问题的基本解（或Green Function）。

显然，只要找到了Green Function， 则任意初始分布的解均可通过一个积分表示出来。

**物理意义：**

在方程为齐次的情况下，在时刻，在处放置一个热量为的点热源，相当于给定初始温度分布 因此，就是在时刻，在处放置了一个热量为的点热源的情况下，在时刻杆上的温度分布。因而，它是点源的“影响函数”或作用的“传播函数”。

随着时间的增长，曲线渐趋平坦，即热量从点源处逐渐向温度较低的两侧流动。但是，在任一时刻，杆上的总热量保持不变。即



另外，Green Function 具有性质：

在时，无意义，这反映了热传导的不可逆性。

推广：

 是

 的解。

性质：

.

1. 一维有源零初始条件的导热问题



解：把看作参数，应用Fourier变换，



此非齐次方程可用Laplace变换，或常数变异法求解。得

 因为 

 (利用）.

利用卷积定理，有





其中 它也是问题

 的解。

因此，一维无界空间的有源导热问题



的解为



称为一维无界空间导热问题的基本解（或Green Function）。

1. **三维无界空间的静电场问题**

静电势满足Poisson方程，即

现在用三重Fourier变换:

求解。

其中****和****



 或 

设





由卷积定理得，

引入函数 

并利用，有



显然，是非齐次方程

  的最简单的特殊问题

  的解。

我们称为方程的基本解 （或 Green Function）.

**的物理意义：**在空间点放置一个电量为的点电荷，此电荷在点产生的电势为 显然，它具有源点与场点的交换对称性：**.**

1. **三维无界空间的受迫振动问题 Poisson公式和推迟势公式**

现在的定解问题是





1. 自由振动问题

解：现在用三重Fourier变换：

求解。

其中****和****

Fourier变换后，方程变为



解之得，

.

下面求解它的原函数，利用

其中，，这是因为，因此

因此，

由卷积定理，



另外，

由卷积定理，

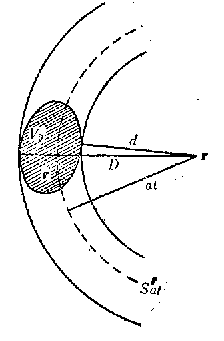




注意到，只有当满足条件时，此式中的被积函数才可能不为零。这条件就是以点为圆心，*at*为半径的球面，记之为。于是，上式可写成简洁的形式：



其中，是球面的面积元。上式称为Poisson公式。

**物理意义：**Possion公式表明，时刻*t*，点的波动情况是由初始条件和在球面上的值决定的。既然此球面的半径是*at*，可见扰动是以速度*a*传播的。为了清楚地看出三维波动问题的特点，我们设初始扰动只局限于某一有限区域[即和仅在区域内取非零值]，并以d和D分别表示点至的最小距离和最大距离，如图所示。当时，与尚不相交，和在球面上都取零值，所以 . 从物理角度看，这是因为扰动的前波阵面尚未到达点，此点仍处于静止状态。当时，与又不相交，同样有。从物理角度看，这是因为扰动的后波阵面已经过去，点又恢复静止状态。只有当时，与相交，和在球面上取非零值，Poisson公式中的积分只才可能不为零，扰动到达点。由此可见，三维波动问题的解是一种“推迟势”解，且具有清晰的前阵面和后阵面，没有后效现象。同时振幅在传播过程中与距离的一次方成反比而减小（那么，能量流以与距离的平方成反比的方式减小，即能量守恒），这种现象也称为Huygens现象。

1. 受迫振动问题



解：Fourier变换后，方程变为



解之得（可以用Laplace变换法求解）



利用，得到，



其中利用了 （）

注意到，式中的被积函数只有当，即时才可能不为零，而且从的积分限看又必须。由此可见，必须满足条件。这是以点为球心、at为半径的球体，记之为。在此条件下，对积分后，得到



这就是受迫振动问题的解。

**物理意义：**在零初始条件下，时刻，点的波动情况由区域上的振源决定，而且就振源内的点的振动来说，其发出扰动的时刻是，时刻*t*比时刻晚了。这又一次说明波的传播速度为*a*。所以，



也称为推迟势公式。

因此，三维无界空间的受迫振动问题



的解为

**四、Laplace变换法**

1. 半无限长均匀细杆的导热问题（侧面绝热）

其中为已知常数。

解：将变量看作参数，对定解问题进行Laplace变换，

****

得到关于像函数的常微分方程



将*p*看作参数，解方程得到，

****

利用，定出；由条件，定出

于是有 **.**

现在将看作参数，对上式进行反演，前面已经讲过

，由相似定理，得

，

利用卷积定理，得

****

进一步，可以作代换，并引入误差函数**，**

并利用积分，可以写成



1. 一维无界区域受迫振动问题的一般形式是



解：将变量看作参数，对定解问题进行Laplace变换，



解得（可用常数变异法、求解公式），

，



其中，是两个固定常数，而是任意常数。这是方程的通解。

这是一个无界问题，无直接的边界条件来确定但可利用()。因为当充分大时应当是有界的，因此也是有界的。为此，应为0，而且，因而 

为求它的原函数，可以逐项进行反演（将和看作参数），先求右端第一个积分的三项，由延迟定理，得

 由卷积定理，得

 因此





相似地，有 

注意到，利用原函数求导定理，得



右端第二个积分的原函数可相似求得，由









最后可得，



这就是一维无界区域受迫振动问题



的解。特别是，当时，它就是D’Alembert公式。