Chapter 11 积分变换法

一、无界空间的有源导热问题—Fourier 变换法

定解问题: $\begin{cases} u_t(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t), & (-\infty<x<\infty) \\ u\big|_{t=0}=\phi(x). \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_t-a^2w_{xx}=0, & (-\infty<x<\infty) \\ w\big|_{t=0}=\phi(x). \end{cases} + \begin{cases} v_t-a^2v_{xx}=f(x,t), & (-\infty<x<\infty) \\ v\big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t)=w(x,t)+v(x,t).$$

1．一维无源导热问题

$$\begin{cases} w_t(x,t)-a^2w_{xx}(x,t)=0, & (-\infty<x<\infty) \\ w\big|_{t=0}=\phi(x). \end{cases}$$

解：把 t 看作参数，应用 Fourier 变换:

$$\begin{cases} \tilde{w}(k,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}w(x,t)e^{-ikx}\mathrm{d}x; \\ w(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{w}(k,t)e^{ikx}\mathrm{d}k. \end{cases}$$

$$w(x,t)\leftrightarrow\tilde{w}(k,t),$$

$$w_{xx}(x,t)\leftrightarrow(ik)^2\,\tilde{w}(k,t)=-k^2\tilde{w}(k,t).$$

$$\begin{cases} \tilde{w}_t(k,t)+a^2k^2\tilde{w}(k,t)=0, \\ \tilde{w}\big|_{t=0}=\tilde{\phi}(k). \end{cases}$$

解得 $\tilde{w}(k,t)=\tilde{\phi}(k)e^{-a^2k^2t}$.

因为 $\tilde{\varphi}(k)\leftrightarrow\varphi(x)$，

$e^{-a^2k^2t}\leftrightarrow\dfrac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ (利用 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$)，

利用卷积定理，得

$$w(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)G(x,t;\xi,0)\mathrm{d}\xi,$$

其中 $G(x,t;\xi,0)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$.

容易验证，$G(x,t;\xi,0)$ 是问题

$$\begin{cases}u_t(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=0 & (-\infty<x<\infty)\\ u\big|_{t=0}=\delta(x-\xi)\end{cases}$$ 的解。

$G(x,t;\xi,0)$ 称为一维无源导热问题的基本解（或 Green Function）。

显然，只要找到了 Green Function， 则任意初始分布的解均可通过一个积分表示出来。

物理意义：

在方程为齐次的情况下，在 $t=0$ 时刻，在 $x=\xi$ 处放置一个热量为 Q 的点热源，相当于给定初始温度分布 $\dfrac{Q}{c\rho}\delta(x-\xi)$. 因此，$G(x,t;\xi,0)$ 就是在时刻 $t=0$，在 $x=\xi$ 处放置了一个热量为 $c\rho$ 的点热源的情况下，在时刻 t 杆上的温度分布。因而，它是点源的“影响函数”或作用的“传播函数”。

随着时间的增长，$G(x,t;\xi,0)$ 曲线渐趋平坦，即热量从点源处逐渐向温度较低的两侧流动。但是，在任一时刻 t，杆上的总热量保持不变。即

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,t;\xi,0)c\rho d\xi=\frac{c\rho}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\frac{c\rho}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=c\rho.$$

另外，Green Function 具有性质：$G(x,t;\xi,0)=G(\xi,t;x,0).$

在 $t<0$ 时，$G(x,t;\xi,0)$ 无意义，这反映了热传导的不可逆性。

推广：

$G(x,t;\xi,\tau)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$ 是

$$\begin{cases}u_t(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=0 & (-\infty<x<\infty,t>\tau)\\ u\big|_{t=\tau}=\delta(x-\xi)\end{cases}$$ 的解。

性质：$G(x,t;\xi,\tau)=G(\xi,t;x,\tau),$

$G(x,t;\xi,\tau)=G(x,t-\tau;x,0)$.

2．一维有源零初始条件的导热问题

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = f(x,t), & (-\infty < x < \infty) \\ v\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

解：把 t 看作参数，应用 Fourier 变换，

$$\begin{cases} \tilde{v}_t(k,t) + a^2 k^2 \tilde{v}(k,t) = \tilde{f}(k,t), \\ \tilde{v}\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

此非齐次方程可用 Laplace 变换，或常数变异法求解。得

$$\tilde{v}(k,t) = \int_0^t \tilde{f}(k,\tau) e^{-a^2k^2(t-\tau)} d\tau. \qquad \text{因为} \quad \tilde{f}(k,\tau) \leftrightarrow f(x,\tau),$$

$$e^{-a^2k^2(t-\tau)} \leftrightarrow \frac{1}{a\sqrt{2(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \quad (\text{利用} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}) .$$

利用卷积定理，有

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k,\tau) e^{-a^2k^2(t-\tau)} &\leftrightarrow \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau) G(x, t-\tau; \xi, 0) \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau) G(x,t;\xi,\tau) \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

$$v(x,t) = \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau) G(x,t;\xi,\tau) \mathrm{d}\xi \right] \mathrm{d}\tau,$$

其中 $G(x,t;\xi,\tau) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$. 它也是问题

$$\begin{cases} u_t(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau) & (-\infty < x < \infty, t > \tau) \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解。

因此，一维无界空间的有源导热问题

$$\begin{cases} u_t(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t) & (-\infty < x < \infty) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= w(x,t) + v(x,t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) G(x,t;\xi,0) \mathrm{d}\xi + \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau) G(x,t;\xi,\tau) \mathrm{d}\xi \right] \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

$G(x,t;\xi,\tau)$ 称为一维无界空间导热问题的基本解（或 Green Function）。

二、 三维无界空间的静电场问题

静电势 $u(\vec{r})$ 满足 Poisson 方程，即

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}. \quad (-\infty < x, y, z < \infty)$$

现在用三重 Fourier 变换:

$$\begin{cases} u(\vec{r}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint \tilde{u}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}\vec{k} \\ \tilde{u}(\vec{k}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint u(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} \end{cases}$$ 求解。

其中 $\vec{r} = x\hat{i}_1 + y\hat{i}_2 + z\hat{i}_3$ 和 $\vec{k} = k_1\hat{i}_1 + k_2\hat{i}_2 + k_3\hat{i}_3$.

$u(\vec{r}) \leftrightarrow \tilde{u}(\vec{k}),$

$$\begin{aligned} &u_{xx}(\vec{r}) \leftrightarrow (ik_1)^2 \tilde{u}(\vec{k}) = -k_1^2 \tilde{u}(\vec{k}), \\ &u_{yy}(\vec{r}) \leftrightarrow (ik_2)^2 \tilde{u}(\vec{k}) = -k_2^2 \tilde{u}(\vec{k}), \quad \text{或} \quad \nabla^2 u(\vec{r}) \leftrightarrow -k^2 \tilde{u}(\vec{k}). \\ &u_{zz}(\vec{r}) \leftrightarrow (ik_3)^2 \tilde{u}(\vec{k}) = -k_3^2 \tilde{u}(\vec{k}), \end{aligned}$$

设 $f(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \tilde{f}(\vec{k}),$

$$\tilde{u}(\vec{k}) = \frac{1}{k^2}\tilde{f}(\vec{k}).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint \frac{1}{k^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}\vec{k} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{k^2} e^{ikr\cos\theta} k^2 \sin\theta \mathrm{d}k\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi e^{ikr\cos\theta} \sin\theta \mathrm{d}k\mathrm{d}\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sin rk}{rk} \mathrm{d}k \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

由卷积定理得，$u(\vec{r}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint f(\vec{r}') \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}\vec{r}' = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}\vec{r}'.$

引入函数 $G(\vec{r}; \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$

并利用 $f(\vec{r})=\dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$，有

$$u(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}\vec{r}'=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\rho(\vec{r}')G(\vec{r};\vec{r}')\mathrm{d}\vec{r}'.$$

显然，$G(\vec{r};\vec{r}')=\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ 是非齐次方程

$\nabla^2u(\vec{r})=-f(\vec{r})\quad(-\infty<x,y,z<\infty)$ 的最简单的特殊问题

$\nabla^2u(\vec{r})=-\delta(\vec{r}-\vec{r}')\quad(-\infty<x,y,z<\infty)$ 的解。

我们称 $G(\vec{r};\vec{r}')=\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ 为方程 $\nabla^2u(\vec{r})=-f(\vec{r})\ (-\infty<x,y,z<\infty)$ 的基本解 （或 Green Function）.

$G(\vec{r};\vec{r}')=\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ **的物理意义：**在空间 $\vec{r}'$ 点放置一个电量为 ε_0 的点电荷，此电荷在 $\vec{r}$ 点产生的电势为 $G(\vec{r};\vec{r}')$. 显然，它具有源点 $\vec{r}'$ 与场点 $\vec{r}$ 的交换对称性：$G(\vec{r};\vec{r}')=G(\vec{r}';\vec{r})$.

三、 三维无界空间的受迫振动问题 Poisson 公式和推迟势公式

现在的定解问题是

$$\begin{cases}u_{tt}(\vec{r},t)-a^2\nabla^2u(\vec{r},t)=f(\vec{r},t),\quad(-\infty<x,y,z<\infty)\\ u\big|_{t=0}=\phi(\vec{r}),u_t\big|_{t=0}=\psi(\vec{r}).\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}w_{tt}(\vec{r},t)-a^2\nabla^2w(\vec{r},t)=0,\\ w\big|_{t=0}=\phi(\vec{r}),w_t\big|_{t=0}=\psi(\vec{r}).\end{cases}+\begin{cases}v_{tt}(\vec{r},t)-a^2\nabla^2v(\vec{r},t)=f(\vec{r},t),\\ v\big|_{t=0}=0,v_t\big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad u(\vec{r},t)=w(\vec{r},t)+v(\vec{r},t).$$

1. 自由振动问题

$$\begin{cases}w_{tt}(\vec{r},t)-a^2\nabla^2w(\vec{r},t)=0,\\ w\big|_{t=0}=\phi(\vec{r}),w_t\big|_{t=0}=\psi(\vec{r}).\end{cases}\quad(-\infty<x,y,z<\infty)$$

解：现在用三重 Fourier 变换：

$$\begin{cases} w(\vec{r}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint \tilde{w}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}\vec{k} \\ \tilde{w}(\vec{k}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint w(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} \end{cases}$$ 求解。

其中 $\vec{r} = x\hat{i}_1 + y\hat{i}_2 + z\hat{i}_3$ 和 $\vec{k} = k_1\hat{i}_1 + k_2\hat{i}_2 + k_3\hat{i}_3$.

Fourier 变换后，方程变为

$$\begin{cases} \tilde{w}_{tt}(\vec{k},t) + a^2k^2\tilde{w}(\vec{k},t) = 0, \\ \tilde{w}\big|_{t=0} = \tilde{\phi}(\vec{k}), \tilde{w}_t\big|_{t=0} = \tilde{\psi}(\vec{k}). \end{cases}$$

解之得，

$$\tilde{w}(\vec{k},t) = \tilde{\varphi}(\vec{k})\cos akt + \frac{\tilde{\psi}(\vec{k})}{ak}\sin akt.$$

下面求解它的原函数，利用

$$\frac{\sin ak}{k} \leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint \frac{\sin ak}{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}\vec{k} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin ak}{k} e^{ikr\cos\theta} k^2 \sin\theta \mathrm{d}k\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi k \sin ake^{ikr\cos\theta} \sin\theta \mathrm{d}k\mathrm{d}\theta = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{2}{r} \int_0^\infty \sin ak \sin rk\mathrm{d}k$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^\infty \sin ak \sin rk\mathrm{d}k = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i(r+a)k} + e^{-i(r+a)k} - e^{i(r-a)k} - e^{-i(r-a)k}}{-4} \mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{1}{r} \frac{\pi}{2} \left[-\delta(r+a) - \delta(r+a) + \delta(r-a) + \delta(r-a)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(r-a)}{r},$$

其中，$\delta(r+a) = 0$，这是因为 $r \geq 0, a > 0$，因此 $r + a \neq 0.$

因此，$\frac{\sin akt}{ak} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(r-at)}{ar}.$

由卷积定理，

$$\tilde{\psi}(\vec{k}) \frac{\sin akt}{ak} \leftrightarrow \frac{1}{4\pi a} \iiint \frac{\psi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(|\vec{r} - \vec{r}'| - at) \mathrm{d}\vec{r}'.$$

另外，$\cos akt = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin akt}{ak} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta(r-at)}{r},$

由卷积定理，

$$\tilde{\phi}(\vec{k})\cos akt \leftrightarrow \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iiint \frac{\phi(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(|\vec{r}-\vec{r}'|-at)\mathrm{d}\vec{r}'.$$

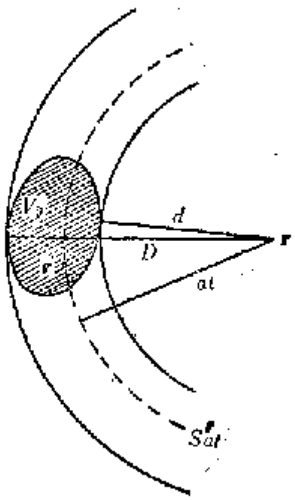
$$w(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iiint \frac{\phi(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(|\vec{r}-\vec{r}'|-at)\mathrm{d}\vec{r}'+\iiint \frac{\psi(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(|\vec{r}-\vec{r}'|-at)\mathrm{d}\vec{r}'\right].$$

注意到，只有当$\vec{r}'$满足条件$|\vec{r}-\vec{r}'|=at$时，此式中的被积函数才可能不为零。这条件就是以$\vec{r}$点为圆心，at为半径的球面，记之为$S_{at}^{\vec{r}}$。于是，上式可写成简洁的形式：

$$w(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^{r}} \frac{\phi(\vec{r}')}{at}\mathrm{d}S'+\iint_{S_{at}^{r}} \frac{\psi(\vec{r}')}{at}\mathrm{d}S'\right],$$

其中，$\mathrm{d}S'$是球面S_{at}^{r}的面积元。上式称为 Poisson 公式。

物理意义：Possion 公式表明，时刻t，$\vec{r}$点的波动情况是由初始条件$\varphi(\vec{r}')$和$\psi(\vec{r}')$在球面$S_{at}^{\vec{r}}$上的值决定的。既然此球面的半径是at，可见扰动是以速度a传播的。为了清楚地看出三维波动问题的特点，我们设初始扰动只局限于某一有限区域V_0[即$\varphi(\vec{r}')$和$\psi(\vec{r}')$仅在V_0区域内取非零值]，并以 d 和 D 分别表示$\vec{r}$点至V_0的最小距离和最大距离，如图所示。当$t<\frac{d}{a}$时，$S_{at}^{\vec{r}}$与V_0尚不相交，$\varphi(\vec{r}')$和$\psi(\vec{r}')$在球面$S_{at}^{\vec{r}}$上都取零值，所以$w(x,t)=0$. 从物理角度看，这是因为扰动的前波阵面尚未到达$\vec{r}$点，此点仍处于静止状态。当$t>\frac{D}{a}$时，$S_{at}^{\vec{r}}$与V_0又不相交，同样有$w(x,t)=0$。从物理角度看，这是因为扰动的后波阵面已经过去，$\vec{r}$点又恢复静止状态。只有当$\frac{d}{a}<t<\frac{D}{a}$时，$S_{at}^{\vec{r}}$与$V_0$相交，$\varphi(\vec{r}')$和$\psi(\vec{r}')$在球面$S_{at}^{\vec{r}}$上取非零值，Poisson 公式中的积分只才可能不为零，扰动到达$\vec{r}$点。由此可见，三维波动问题的解是一种“推迟势”解，且具有清晰的前阵面和后阵面，没有后效现象。



同时振幅在传播过程中与距离的一次方成反比而减小（那么，能量流以与距离的平方成反比的方式减小，即能量守恒），这种现象也称为 Huygens 现象。

2. 受迫振动问题

$$\begin{cases} v_{tt}(\vec{r},t)-a^2\nabla^2 v(\vec{r},t)=f(\vec{r},t), \\ v\big|_{t=0}=0, v_t\big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

解：Fourier 变换后，方程变为

$$\begin{cases} \tilde{v}_{tt}(\vec{k},t)+a^2k^2\tilde{v}(\vec{k},t)=\tilde{f}(k,t), \\ \tilde{v}\big|_{t=0}=0, \tilde{v}_t\big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

解之得（可以用 Laplace 变换法求解）

$$\tilde{v}(\vec{k},t)=\int_0^t \frac{\tilde{f}(\vec{k},\tau)}{ak}\sin ak\left(t-\tau\right)\mathrm{d}\tau,$$

利用 $\tilde{\psi}(\vec{k})\dfrac{\sin akt}{ak}\leftrightarrow\dfrac{1}{4\pi a}\iiint\dfrac{\psi(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(|\vec{r}-\vec{r}'|-at)\mathrm{d}\vec{r}'$，得到，

$$\begin{aligned} v(\vec{r},t)&=\frac{1}{4\pi a}\int_0^t\left\{\iiint\frac{f(\vec{r}',\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left[|\vec{r}-\vec{r}'|-a\left(t-\tau\right)\right]\mathrm{d}\vec{r}'\right\}\mathrm{d}\tau \\ &=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\left[\int_0^t\frac{f(\vec{r}',\tau)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left(\tau-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}\right)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\vec{r}', \end{aligned}$$

其中利用了 $\delta(ax)=\dfrac{\delta(x)}{|a|}.$ （$a\neq 0$）

注意到，式中的被积函数只有当 $\tau-t+\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}=0$，即 $\tau=t-\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}$ 时才可能不为零，而且从 τ 的积分限看又必须 $\tau\geq 0$。由此可见，$\vec{r}'$ 必须满足条件 $|\vec{r}-\vec{r}'|\leq at$。这是以 $\vec{r}$ 点为球心、at 为半径的球体，记之为 $T_{at}^{\vec{r}}$。在此条件下，对 τ 积分后，得到

$$v(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T_{at}^{\vec{r}}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}f(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a})\mathrm{d}\vec{r}'.$$

这就是受迫振动问题的解。

物理意义：在零初始条件下，时刻t，$\vec{r}$ 点的波动情况由区域$T_{at}^{\vec{r}}$上的振源决定，而且就振源$T_{at}^{\vec{r}}$内的$\vec{r}'$点的振动来说，其发出扰动的时刻是$t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}$，时刻 t 比时刻$t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}$晚了$\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}$。这又一次说明波的传播速度为 a。所以，

$$v(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T_{at}^{\vec{r}}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}f(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a})\mathrm{d}\vec{r}'$$

也称为推迟势公式。

因此，三维无界空间的受迫振动问题

$$\begin{cases}u_{tt}(\vec{r},t)-a^2\nabla^2u(\vec{r},t)=f(\vec{r},t) & (-\infty<x,y,z<\infty)\\ u\big|_{t=0}=\varphi(\vec{r}),u_t\big|_{t=0}=\psi(\vec{r})\end{cases}$$

的解为

$$\begin{aligned}u(\vec{r},t)&=w(\vec{r},t)+v(\vec{r},t)\\&=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^r}\frac{\varphi(\vec{r}')}{at}\mathrm{d}S'+\iint_{S_{at}^r}\frac{\psi(\vec{r}')}{at}\mathrm{d}S'\right]+\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T_{at}^{\vec{r}}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}f(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a})\mathrm{d}\vec{r}'.\end{aligned}$$

四、Laplace 变换法

例1. 半无限长均匀细杆的导热问题（侧面绝热）

$$\begin{cases}u_t(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=0, & (x>0)\\ u\big|_{x=0}=u_0,u\big|_{t=0}=0.\end{cases}$$ 其中u_0为已知常数。

解：将变量 x 看作参数，对定解问题进行 Laplace 变换，

$$\bar{u}(x,p)=\int_0^{\infty}u(x,t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

得到关于像函数$\bar{u}(x,p)$的常微分方程

$$\begin{cases}p\bar{u}(x,p)-a^2\bar{u}_{xx}(x,p)=0, & (x>0)\\ \bar{u}\big|_{x=0}=\dfrac{u_0}{p}.\end{cases}$$

将 p 看作参数，解方程得到，

$$\bar{u}(x,p)=C_1e^{\frac{\sqrt{p}x}{a}}+C_2e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}.$$

利用 $\lim_{p\to\infty}\bar{u}(x,p)=0$，定出 $C_1=0$；由条件 $\bar{u}\big|_{x=0}=\dfrac{u_0}{p}$，定出 $C_2=\dfrac{u_0}{p}$.

于是有 $\bar{u}(x,p)=\dfrac{u_0}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}$.

现在将 x 看作参数，对上式进行反演，前面已经讲过

$e^{-\sqrt{p}}\leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{4t}}$，由相似定理，得

$$e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}\leftrightarrow\frac{1}{\frac{x^2}{a^2}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}\left(\frac{a^2t}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{4\frac{a^2t}{x^2}}}=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.,$$

利用卷积定理，得

$$u(x,t)=u_0\int_0^t\frac{x}{2a\sqrt{\pi}\tau^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}H(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{xu_0}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\tau^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}\mathrm{d}\tau.$$

进一步，可以作代换 $\alpha=\dfrac{x}{2a\sqrt{\tau}}$，并引入误差函数 $\mathrm{erf}(x)=\int_0^x e^{-\alpha^2}\mathrm{d}\alpha$，

并利用积分 $\int_0^\infty e^{-\alpha^2}\mathrm{d}\alpha=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，$u(x,t)$ 可以写成

$$u(x,t)=u_0\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

例2. 一维无界区域受迫振动问题的一般形式是

$$\begin{cases}u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\ \ (-\infty<x<\infty)\\ u\big|_{t=0}=\phi(x),\ \ u_t\big|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

解：将变量 x 看作参数，对定解问题进行 Laplace 变换，

$$\bar{u}_{xx}(x,p)-\left(\frac{p}{a}\right)^2\bar{u}(x,p)=-\frac{1}{a^2}\left[\,\bar{f}(x,p)+p\phi(x)+\psi(x)\,\right].$$

解得（可用常数变异法、求解公式），

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=-\frac{p}{2a},$$

$$\bar{u}(x,p)=C_1e^{\frac{px}{a}}+C_2e^{-\frac{px}{a}}+\frac{1}{2a}e^{-\frac{px}{a}}\int_{x_1}^{x}\frac{\bar{f}(\xi,p)+p\phi(\xi)+\psi(\xi)}{p}e^{\frac{p\xi}{a}}\mathrm{d}\xi$$
$$-\frac{1}{2a}e^{\frac{px}{a}}\int_{x_2}^{x}\frac{\bar{f}(\xi,p)+p\phi(\xi)+\psi(\xi)}{p}e^{-\frac{p\xi}{a}}\mathrm{d}\xi,$$

其中，x_1, x_2 是两个固定常数，而 C_1, C_2 是任意常数。这是方程的通解。这是一个无界问题，无直接的边界条件来确定 C_1, C_2. 但可利用 $\lim_{p\to\infty}\bar{u}(x,p)=0\,(\mathrm{Re}\,p)$。因为当 $\mathrm{Re}\,p$ 充分大时 $\bar{u}(x,p)$ 应当是有界的，因此 $\lim_{x\to\pm\infty}\bar{u}(x,p)$ 也是有界的。为此，C_1, C_2 应为 0，而且 $x_1=-\infty$， $x_2=\infty$.

因而
$$\bar{u}(x,p)=\frac{1}{2a}\int_x^{\infty}\left[\frac{\bar{f}(\xi,p)}{p}+\phi(\xi)+\frac{\psi(\xi)}{p}\right]e^{-\frac{p(\xi-x)}{a}}\mathrm{d}\xi$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\left[\frac{\bar{f}(\xi,p)}{p}+\phi(\xi)+\frac{\psi(\xi)}{p}\right]e^{\frac{p(\xi-x)}{a}}\mathrm{d}\xi.$$

为求它的原函数，可以逐项进行反演（将 x 和 ξ 看作参数），先求右端第一个积分的三项，由延迟定理，得

$\frac{1}{p}e^{-\frac{p(\xi-x)}{a}}\leftrightarrow H\left(t-\frac{\xi-x}{a}\right)$. 由卷积定理，得

$\frac{\bar{f}(\xi,p)}{p}e^{-\frac{p(\xi-x)}{a}}\leftrightarrow\int_0^{t}f(\xi,\tau)H\left(t-\tau-\frac{\xi-x}{a}\right)\mathrm{d}\tau$. 因此

$$\int_x^{\infty}\frac{\bar{f}(\xi,p)}{p}e^{-\frac{p(\xi-x)}{a}}\mathrm{d}\xi\leftrightarrow\int_x^{\infty}\left[\int_0^{t}f(\xi,\tau)H\left(t-\tau-\frac{\xi-x}{a}\right)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\xi$$
$$=\int_0^{t}\left[\int_x^{\infty}f(\xi,\tau)H\left(t-\tau-\frac{\xi-x}{a}\right)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau$$
$$=\int_0^{t}\left[\int_x^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau.$$

$$\int_x^{\infty}\frac{\psi(\xi)}{p}e^{-\frac{p(\xi-x)}{a}}\mathrm{d}\xi\leftrightarrow\int_x^{\infty}\psi(\xi)H\left(t-\frac{\xi-x}{a}\right)\mathrm{d}\xi=\int_x^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

相似地，有 $\int_x^{\infty}\frac{\phi(\xi)}{p}e^{-\frac{p(\xi-x)}{a}}\mathrm{d}\xi\leftrightarrow\int_x^{x+at}\phi(\xi)\mathrm{d}\xi.$

注意到$\left[\int_x^{x+at}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\Big|_{t=0}=0$，利用原函数求导定理，得

$$\int_x^\infty \phi(\xi)e^{-\frac{p(\xi-x)}{a}}\mathrm{d}\xi = p\int_x^\infty \frac{\phi(\xi)}{p}e^{-\frac{p(\xi-x)}{a}}\mathrm{d}\xi \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_x^{x+at}\phi(\xi)\mathrm{d}\xi = a\phi(x+at).$$

右端第二个积分的原函数可相似求得，由

$$\frac{1}{p}e^{\frac{p(\xi-x)}{a}} \leftrightarrow H\left(t+\frac{\xi-x}{a}\right),$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^x \frac{\bar{f}(\xi,p)}{p}e^{\frac{p(\xi-x)}{a}}\mathrm{d}\xi &\leftrightarrow \int_{-\infty}^x\left[\int_0^t f(\xi,\tau)H\left(t-\tau+\frac{\xi-x}{a}\right)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\xi\\ &= \int_0^t\left[\int_{-\infty}^x f(\xi,\tau)H\left(t-\tau+\frac{\xi-x}{a}\right)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau\\ &= \int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^x f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^x \frac{\psi(\xi)}{p}e^{\frac{p(\xi-x)}{a}}\mathrm{d}\xi \leftrightarrow \int_{-\infty}^x \psi(\xi)H\left(t+\frac{\xi-x}{a}\right)\mathrm{d}\xi = \int_{x-at}^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

$$\int_{-\infty}^x \phi(\xi)e^{\frac{p(\xi-x)}{a}}\mathrm{d}\xi = p\int_{-\infty}^x \frac{\phi(\xi)}{p}e^{\frac{p(\xi-x)}{a}}\mathrm{d}\xi \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^x \phi(\xi)\mathrm{d}\xi = a\phi(x-at),$$

最后可得，

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau.$$

这就是一维无界区域受迫振动问题

$$\begin{cases}u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t) = f(x,t) & (-\infty<x<\infty)\\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x)\end{cases}$$

的解。特别是，当 $f(x,t)\equiv 0$ 时，它就是 D'Alembert 公式。