- **周期实信号：正交三角函数$\{\cos k\omega_0 t, \sin k\omega_0 t\}$展开**

exponential	triangular
$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\omega_0 t}$	$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega_0 t)+b_k\sin(k\omega_0 t)]$
$C_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t$ $(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$	$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t$ $a_k=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega_0 t)\mathrm{d}t$ $b_k=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega_0 t)\mathrm{d}t$ $(k=1,2,3,\cdots)$

- **周期实信号**

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,e^{jk\omega_0 t}\quad\Rightarrow\quad x^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k^*\,e^{-jk\omega_0 t}$$

以-*k*代替*k*： $x^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{-k}^*e^{jk\omega_0 t}$

对实信号： $x(t)=x^*(t)\quad\Rightarrow\quad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{-k}^*e^{jk\omega_0 t}$

比较 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\omega_0 t}\quad\Rightarrow\quad C_k=C_{-k}^*\ \text{or}\ C_{-k}=C_k^*$

$$\therefore\quad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{-1}C_k e^{jk\omega_0 t}+C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}C_{-k}^*e^{jk\omega_0 t}+C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=1}^{\infty}C_k^*e^{-jk\omega_0 t}+C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}(C_k e^{jk\omega_0 t}+C_k^*e^{-jk\omega_0 t})$$

令： $C_k=|C_k|e^{j\theta_k}$

$$x(t)=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}(C_k e^{jk\omega_0 t}+C_k^*e^{-jk\omega_0 t})$$

$$=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}(|C_k|e^{j\theta_k}e^{jk\omega_0 t}+|C_k|e^{-j\theta_k}e^{-jk\omega_0 t})$$

$$=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|[e^{j(k\omega_0 t+\theta_k)}+e^{-j(k\omega_0 t+\theta_k)}]$$

$$=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}2|C_k|\cos(k\omega_0 t+\theta_k)$$

C_0是信号的直流分量

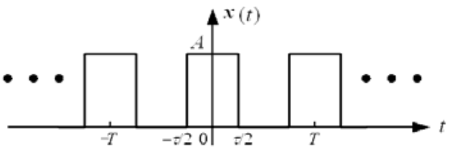
$2|C_k|$是信号第*k*次谐波的振幅， θ_k是信号第*k*次谐波的相位

- **任意周期实信号可由其直流分量和各次谐波分量合成**

二、 离散频谱

$C_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t\qquad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,e^{jk\omega_0 t},\quad |t|\le T/2$

例1 计算图示周期矩形脉冲信号的傅里叶级数



解：

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Ae^{-jk\omega_0 t}dt\qquad \text{其中}\ \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

当*k*=0时，

$$C_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Ae^0dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Adt=\frac{A\tau}{T}$$

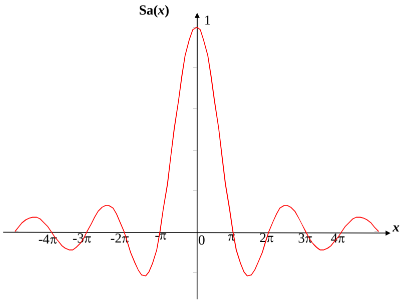
当*k*≠0时，

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Ae^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{A}{T}\frac{1}{-jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{A}{T}\frac{1}{-jk\omega_0}\left(e^{-jk\omega_0\frac{\tau}{2}}-e^{jk\omega_0\frac{\tau}{2}}\right)$$

$$=\frac{A}{T}\frac{1}{-jk\omega_0}\left[-2j\sin\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right)\right]=\frac{A}{T}\frac{2\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0}=\frac{A\tau}{T}\frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2}$$

定义：抽样函数

$$Sa(x)=\frac{\sin x}{x}$$



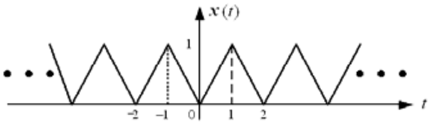
$$C_0=\frac{A\tau}{T};\quad C_k=\frac{A\tau}{T}\frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2}=\frac{A\tau}{T}Sa(k\omega_0\tau/2),\quad k\neq0$$

$$\Rightarrow\quad C_k=\frac{A\tau}{T}Sa(k\omega_0\tau/2)$$

周期方波信号的傅里叶级数展开式为：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,e^{jk\omega_0 t}=\frac{A\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}Sa(k\omega_0\tau/2)e^{jk\omega_0 t},\quad |t|\le\frac{T}{2}$$

例2 计算图示周期三角脉冲信号的傅里叶级数



解：

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}-te^{-jk\omega_0 t}dt+\int_{0}^{1}te^{-jk\omega_0 t}dt\right)$$

当k=0时，

$$C_0=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}-te^{0}dt+\int_{0}^{1}te^{0}dt\right)=\frac{1}{4}\left(-t^2\Big|_{-1}^{0}+t^2\Big|_{0}^{1}\right)=\frac{1}{2}$$

当$k\neq0$时， $C_k=\dfrac{1}{2jk\omega_0}\left(te^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{-jk\omega_0 t}dt-te^{-jk\omega_0 t}\Big|_{0}^{1}+\int_{0}^{1}e^{-jk\omega_0 t}dt\right)$

$$\because\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$\therefore\quad C_k=\frac{1}{2jk\pi}\left(0+e^{jk\pi}-\int_{-1}^{0}e^{-jk\pi t}dt-e^{-jk\pi}+0+\int_{0}^{1}e^{-jk\pi t}dt\right)$$

$$=\frac{1}{2jk\pi}\left(2j\sin k\pi-\frac{1}{-jk\pi}e^{-jk\pi t}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{-jk\pi}e^{-jk\pi t}\Big|_{0}^{1}\right)$$

$$=\frac{1}{2jk\pi}\left(-\frac{1}{-jk\pi}+\frac{1}{-jk\pi}e^{jk\pi}+\frac{1}{-jk\pi}e^{-jk\pi}-\frac{1}{-jk\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2(k\pi)^2}(-1+e^{jk\pi}+e^{-jk\pi}-1)=\frac{1}{2(k\pi)^2}(2\cos k\pi-2)$$

$$=\frac{1}{(k\pi)^2}(\cos k\pi-1)=\begin{cases}0 & k\text{为偶数}\\ -\dfrac{2}{(k\pi)^2} & k\text{为奇数}\end{cases}$$

$$\therefore\quad C_k=\begin{cases}-2/(k\pi)^2 & k\text{为奇数}\\ 1/2 & k=0\\ 0 & k\text{为非0偶数}\end{cases}$$

周期三角脉冲信号的傅里叶级数展开式为：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,e^{jk\omega_0 t}=\frac{1}{2}-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{2}{[(2m-1)\pi]^2}e^{j(2m-1)\pi t},\quad |t|\le T/2=1$$

- **周期信号$x(t)$可以分解为不同频率虚指数信号之和**

$$\boxed{x_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,e^{jk\omega_0 t}}$$

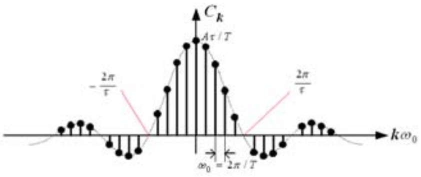
C_k是频率的函数，反映了组成信号各谐波的幅度和相位随频率变化的规律，称为**频谱函数**

$$C_k=\left|C_k\right|e^{j\theta_k}$$

振幅谱

相位谱

- 周期信号的频谱图：**信号各次谐波对应的C_k线状分布图**
- **周期矩形脉冲信号的频谱图** $C_k=\dfrac{A\tau}{T}Sa(k\omega_0\tau/2)$

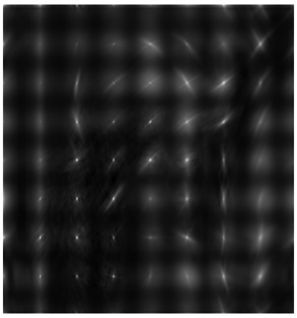


相位谱为0

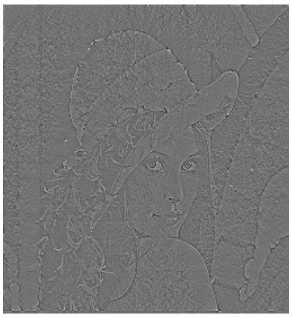
- 相位谱的作用

两维傅里叶级数

幅频不变，零相位



幅频为常数，相位不变



- 周期信号频谱的三个特点：离散性、谐波性、收敛性
  - ◆ 频谱由不连续的线条组成，每一条线代表一个谐波分量，称为不连续频谱或离散频谱
  - ◆ 每条线谱只出现在基波频率ω_0的整数倍的频率上，频谱中不可能存在任何具有频率为基波频率非整数倍的分量
  - ◆ 各条线谱的高度(即各次谐波的幅值)，随着谐波次数k的增大而逐渐减少的，直至零

信号周期T越大，ω_0就越小，则谱线越密

信号周期T越小，ω_0就越大，则谱线越疏

信号时域波形变化越平缓，高次谐波成分就越少，幅度频谱衰减越快

信号时域波形跳变越多，高次谐波成分就越多，幅度频谱衰减越慢

三、 离散频谱的基本性质

1. 线性特性

若 $x_1(t)\to C_{1k}$， $x_2(t)\to C_{2k}$

$$\boxed{\text{则有}\quad a_1\cdot x_1(t)+a_2\cdot x_2(t)\to a_1\cdot C_{1k}+a_2\cdot C_{2k}}$$

证：
$$C_k=\frac{1}{T}\int_T[a_1\cdot x_1(t)+a_2\cdot x_2(t)]e^{-jk\omega_0 t}dt$$
$$=a_1\frac{1}{T}\int_T x_1(t)e^{-jk\omega_0 t}dt+a_2\frac{1}{T}\int_T x_2(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$
$$=a_1\cdot C_{1k}+a_2\cdot C_{2k}$$

2. 对称特性

(1)若$x(t)$为实信号，则 $\boxed{|C_k|=|C_{-k}|,\quad \theta_k=-\theta_{-k}}$

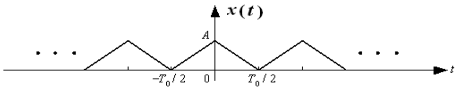
证：$C_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t,\quad C_{-k}=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{jk\omega_0 t}\mathrm{d}t$

$x(t)$为实信号 $\Rightarrow\quad x(t)=x^*(t)$

$$C_{-k}=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{jk\omega_0 t}\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{T}\int_T x^*(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t\right]^*=\left[\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t\right]^*=C_k^*$$

$$\therefore\quad |C_{-k}|=|C_k^*|=|C_k|,\quad \theta_{-k}=\arctan\frac{\mathrm{Im}C_{-k}}{\mathrm{Re}C_{-k}}=\arctan\frac{\mathrm{Im}C_k^*}{\mathrm{Re}C_k^*}==\arctan\frac{-\mathrm{Im}C_k}{\mathrm{Re}C_k}=-\theta_k$$

(2)若$x(t)$为实偶信号：$x(t)=x(-t)$



C_k是$k\omega_0$的实偶函数 $\Rightarrow$ 振幅谱偶对称；相位谱为0

证：**$x(t)$为实信号，则** $C_k^*=C_{-k}$

$x(t)$为偶信号 $\Rightarrow$ $x(t)=x(-t)$

$$C_{-k}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-j(-k)\omega_0 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0(-t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{T/2}^{-T/2}x(-t')e^{-jk\omega_0 t'}(-dt')$$
$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(-t')e^{-jk\omega_0 t'}\mathrm{d}t'=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t')e^{-jk\omega_0 t'}\mathrm{d}t'=C_k$$

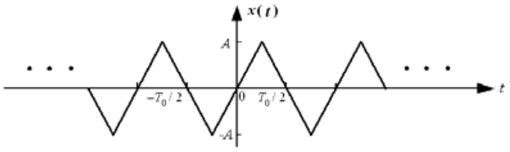
令： $C_k=\alpha_k+j\beta_k$

$$\alpha_{-k}+j\beta_{-k}=C_{-k}=C_k=\alpha_k+j\beta_k\Rightarrow\alpha_k=\alpha_{-k},\beta_k=\beta_{-k}$$
$$\alpha_{-k}+j\beta_{-k}=C_{-k}=C_k^*=\alpha_k-j\beta_k\Rightarrow\alpha_k=\alpha_{-k},\beta_k=-\beta_{-k}$$
$$\beta_k=\beta_{-k}=-\beta_{-k}\quad\Rightarrow\quad\beta_{-k}=0\quad\Rightarrow\quad\beta_k=0$$
$$\therefore\quad C_k=\alpha_k=\alpha_{-k}=C_{-k}$$

C_k是$k\omega_0$的实偶函数

---

(3)若$x(t)$为实奇信号：$x(t)=-x(-t)$



C_k是$k\omega_0$的纯虚奇函数$\Rightarrow$振幅谱偶对称；相位谱奇对称

证：**$x(t)$为实信号，则** $C_k^*=C_{-k}$

$x(t)$为奇信号 $\Rightarrow$ $x(t)=-x(-t)$ 类似$\Rightarrow$ $C_{-k}=-C_k$

$$\alpha_{-k}+j\beta_{-k}=C_{-k}=-C_k=-\alpha_k-j\beta_k\Rightarrow\alpha_k=-\alpha_{-k},\beta_k=-\beta_{-k}$$
$$\alpha_{-k}+j\beta_{-k}=C_{-k}=C_k^*=\alpha_k-j\beta_k\qquad\Rightarrow\alpha_k=\alpha_{-k},\beta_k=-\beta_{-k}$$

$$\alpha_k=\alpha_{-k}=-\alpha_{-k}\quad\Rightarrow\quad\alpha_{-k}=0\quad\Rightarrow\quad\alpha_k=0$$
$$\therefore\quad C_k=j\beta_k=-j\beta_{-k}=-C_{-k}$$

C_k是$k\omega_0$的纯虚奇函数

$$\Rightarrow\quad |C_k|=|j\beta_k|=|-j\beta_{-k}|=|j\beta_{-k}|=|C_{-k}|$$

$\text{if}\ \beta_k>0,\text{then}\ \beta_{-k}<0$

$$\Rightarrow C_k=j\beta_k=\beta_k e^{j\frac{\pi}{2}},C_{-k}=j\beta_{-k}=-j|\beta_{-k}|=|\beta_{-k}|e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$\text{if}\ \beta_k<0,\text{then}\ \beta_{-k}>0$

$$\Rightarrow C_{-k}=j\beta_{-k}=\beta_{-k}e^{j\frac{\pi}{2}},C_k=j\beta_k=-j|\beta_k|=|\beta_k|e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

3. 周期信号功率与离散频谱的关系

帕塞瓦尔(Parseval)功率守恒定理

$$\boxed{P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k|^2}$$

物理意义：

周期信号平均功率按各谐波成分的振幅大小分配给各分量

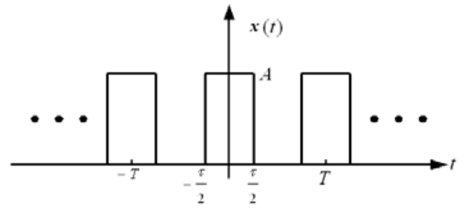
证： $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,e^{jk\omega_0 t},\quad |t|\le T/2$

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)x^*(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,e^{jk\omega_0 t}\right]\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,e^{jk\omega_0 t}\right]^*dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,e^{jk\omega_0 t}\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n^*\,e^{-jn\omega_0 t}\right]dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n^*\,C_k\,\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n^*\,C_k\,\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}e^{j(k-n)\omega_0 t}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k^*\,C_k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k|^2$$

例3 求周期矩形脉冲信号在其有效带宽(0~2π/τ)内谐波分量所具有的平均功率占整个信号平均功率的百分比(其中A=1，T=1/4，τ=1/20)



解：周期矩形脉冲的傅里叶级数为：

$$C_k=\frac{A\tau}{T}Sa(k\omega_0\tau/2)=\frac{1\times 1/20}{1/4}Sa\left(k\frac{2\pi}{1/4}\bullet\frac{1}{20}\bullet\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}Sa\left(\frac{k\pi}{5}\right)$$

信号的平均功率为：

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{T}A^2\tau=\frac{1/20}{1/4}=\frac{1}{5}$$

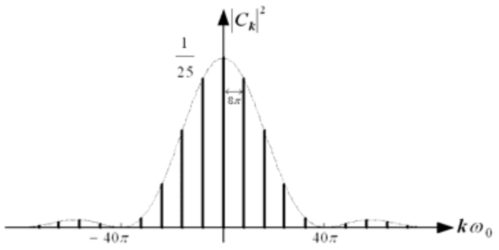
$$k\omega_0=k\frac{2\pi}{T}\le\frac{2\pi}{\tau}\quad\Rightarrow\quad k\le\frac{T}{\tau}=\frac{1/4}{1/20}=5$$

包含在有效带宽(0~2π/τ)内的各谐波平均功率为：

$$P_1=\sum_{k=-5}^{5}|C_k|^2=\sum_{k=-5}^{5}\left|\frac{1}{5}Sa\left(\frac{k\pi}{5}\right)\right|^2\approx 0.1806$$

$$\therefore\quad\frac{P_1}{P}=\frac{0.1806}{0.2000}=90\%$$

$$|C_k|^2=\frac{1}{25}[Sa(k\pi/5)]^2,\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{1/4}=8\pi$$



4. 截断离散频谱的高频成分对x(t)引入的失真

(1)有限项截断后，傅里叶级数于最小均方误差意义逼近原信号

均方误差

$$E=\int_T|e(t)|^2\mathrm{d}t=\int_T[x(t)-x_1(t)][x^*(t)-x_1^*(t)]\mathrm{d}t=\int_T x(t)x^*(t)\mathrm{d}t-\int_T x^*(t)\sum_{k=-N}^{N}C_k e^{jk\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$-\int_T x(t)\sum_{k=-N}^{N}C_k^*e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t+\int_T\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N}C_k^*C_n e^{j(n-k)\omega_0 t}\mathrm{d}t=\int_T|x(t)|^2\,\mathrm{d}t-\sum_{k=-N}^{N}C_k\int_T x^*(t)e^{jk\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$-\sum_{k=-N}^{N}C_k^*\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t+\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N}C_k^*C_n\int_T e^{j(n-k)\omega_0 t}\mathrm{d}t=\int_T|x(t)|^2\,\mathrm{d}t-\sum_{k=-N}^{N}C_k\left[\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t\right]^*$$

$$-\sum_{k=-N}^{N}C_k^*C_kT+\sum_{k=-N}^{N}C_k^*C_kT=\int_T|x(t)|^2\,\mathrm{d}t-\sum_{k=-N}^{N}C_kC_k^*T=\int_T|x(t)|^2\,\mathrm{d}t-T\sum_{k=-N}^{N}|C_k|^2$$

$$=T\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k|^2-T\sum_{k=-N}^{N}|C_k|^2=T\sum_{k=-\infty}^{-(N+1)}|C_k|^2+T\sum_{k=N+1}^{\infty}|C_k|^2$$

当$N\to\infty$，E单调趋于0

(2)吉伯斯现象

用有限次谐波分量来近似原信号，在x(t)的不连续点将出现过冲，过冲峰值不随N增加而减少，约为跳变值的9%

以方波为例： $A=1,\quad T=2,\quad \tau=T/2=1$

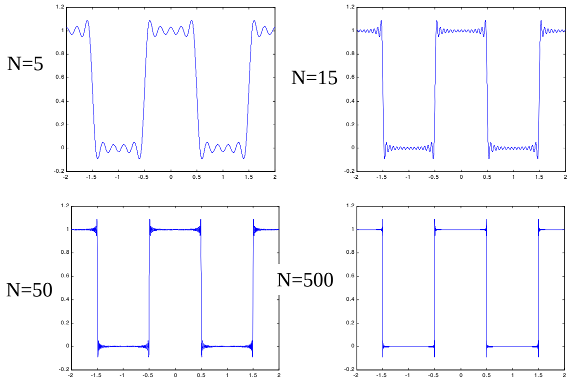
$$C_k=\frac{A\tau}{T}Sa(k\omega_0\tau/2)=\frac{1\times1}{2}Sa\left(k\frac{2\pi}{2}\times1/2\right)=\frac{1}{2}Sa(k\pi/2)$$

$$C_0=1/2;\quad C_{2n}=0,n\ne0;\quad C_{2n+1}=\frac{\sin[(2n+1)\pi/2]}{(2n+1)\pi},C_{2n+1}=C_{-(2n+1)}$$

$$\therefore\quad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_ke^{jk\omega_0 t}=C_0+\sum_{n=0}^{\infty}[C_{2n+1}e^{j(2n+1)\pi t}+C_{-(2n+1)}e^{-j(2n+1)\pi t}]$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n+1}[e^{j(2n+1)\pi t}+e^{-j(2n+1)\pi t}]=\frac{1}{2}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)\pi/2]}{(2n+1)\pi}\cos[(2n+1)\pi t]$$

$$=\frac{1}{2}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi}\cos[(2n+1)\pi t]=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos(\pi t)-\frac{2}{3\pi}\cos(3\pi t)+\cdots$$



---

§ 1.2 能量信号的频谱分析

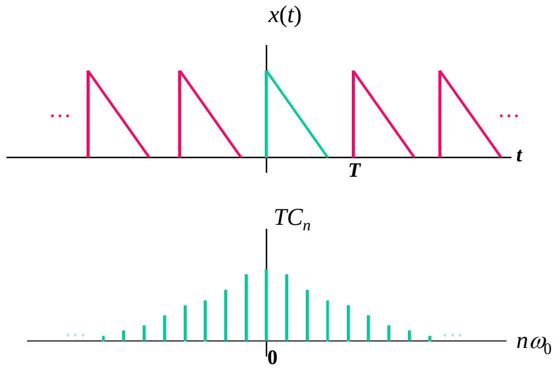
一、 傅里叶变换(Fourier transform)

1．从傅里叶级数到傅里叶变换

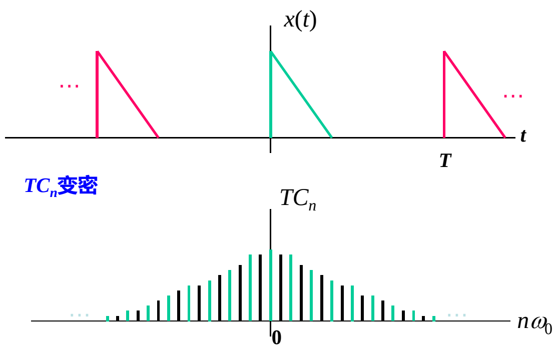
- **讨论周期T增加对离散频谱的影响**

周期为T 宽度为τ的周期矩形脉冲的Fourier级数为：

$$C_n = \frac{A\tau}{T}\mathrm{Sa}(n\omega_0\tau/2) \Rightarrow TC_n = A\tau\,\mathrm{Sa}(n\omega_0\tau/2)$$

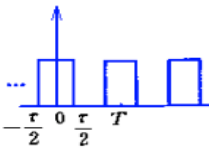


周期T增大



TC_n变密

- 周期矩形脉冲信号的频谱



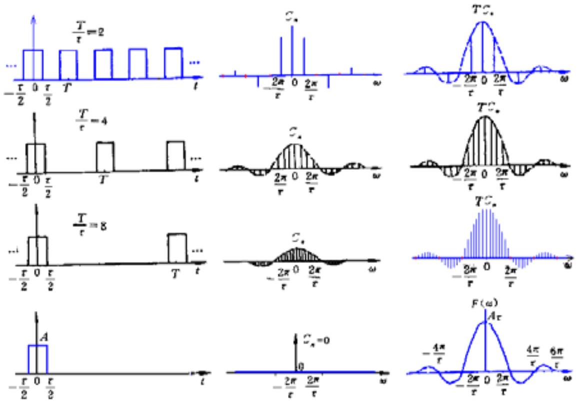
$$x(t) = \begin{cases} A & |t| \le \dfrac{\tau}{2} \\ 0 & \dfrac{\tau}{2} < |t| \le \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

傅里叶级数展开式为：

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, |t| \le T/2}$$

傅里叶级数为：

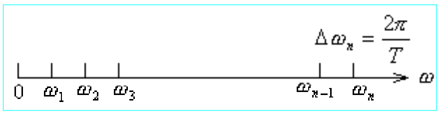
$$C_n = \frac{A\tau}{T}\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{(n\omega_0\tau/2)} = \frac{A\tau}{T}Sa(n\omega_0\tau/2), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$



当 $T \to +\infty, \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} \to 0$

信号**x(t)**从周期信号变成非周期信号

令 $\omega_n = n\omega_0, \quad \to \quad \Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \omega_0 \quad \therefore \quad T = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega_n}$



周期信号：$C_n = \dfrac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{jn\omega_0 t}, \quad |t| \le T/2$

非周期信号：$x(t) = \lim_{\Delta\omega_n \to 0} \dfrac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (TC_n) e^{j\omega_n t}\Delta\omega_n$ $\quad \dfrac{1}{T} = \dfrac{\Delta\omega_n}{2\pi}$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega} \qquad \lim_{T\to\infty} TC_n = X(\omega)$$

周期信号：$C_n = \dfrac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{jn\omega_0 t}, \quad |t| \le T/2$

非周期信号：

$$X(\omega) = \lim_{\Delta\omega_n \to 0} TC_n = \lim_{\Delta\omega_n \to 0} T \bullet \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \lim_{\Delta\omega_n \to 0}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega_n t}dt$$

$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt}$$

2．傅里叶变换对

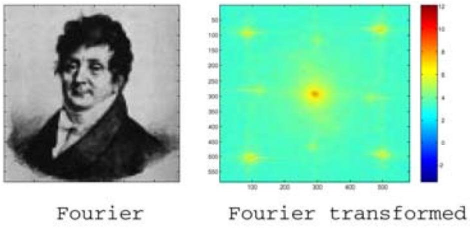
傅里叶正变换：

$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt}$ 或 $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$

傅里叶反变换：

$\boxed{x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega}$ 或 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df$

两维Fourier transform



582 by 582 pixels
Fourier像

图像两维傅里叶变换
幅度的对数

- **符号表示：**

$$X(\omega) = \mathrm{F}[x(t)], \quad x(t) = \mathrm{F}^{-1}[X(\omega)]$$

$$或 \quad x(t) \overset{\mathrm{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

- **傅里叶反变换：**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

物理意义：非周期信号可以分解为无数个频率为ω、复振幅为$[X(\omega)/2\pi]d\omega$ 的复指数信号$e^{j\omega t}$的线性组合

- **称信号$x(t)$的傅里叶变换$X(\omega)$为其连续频谱**
- **一个信号满足狄里赫利条件，其傅里叶变换存在**

狄里赫利条件

（1）非周期信号在无限区间上绝对可积

$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty}$ **充分不必要条件**

（2）在任意有限区间内，信号只有有限个最大值和最小值 必要不充分条件

（3）在任意有限区间内，信号仅有有限个不连续点，且这些点必须是有限值

必要不充分条件

一个连续信号$x(t)$的傅里叶变换$X(\omega)$是唯一的

二、 连续频谱

- **周期信号的频谱为离散频谱**
  非周期信号的频谱为连续频谱
- **周期信号的频谱为C_n的分布，**表示每个谐波分量的复振幅
  非周期信号的频谱为TC_n的分布，表示每单位带宽内所有谐波分量合成的复振幅(即频谱密度函数**)**

两者关系： $\boxed{X(\omega) = \lim_{T\to\infty} TC_n}$ $\boxed{C_n = \dfrac{X(\omega)}{T}\Big|_{\omega = n\omega_0}}$

- **连续频谱密度函数(简称连续频谱)：**

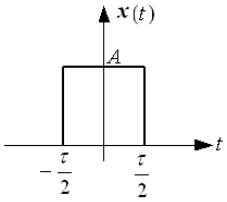
$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt}$$

$$X(\omega)=|X(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}=R(\omega)+jI(\omega)$$

振幅密度谱
简称振幅谱

相位密度谱
简称相位谱

例1 计算图示非周期矩形脉冲信号的频谱函数



解： $x(t)=\begin{cases}A, & |t|\le\tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases}$

可记作： $x(t)=A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$

类似，幅度A、中心t_0、宽度τ的矩形脉冲可记作：

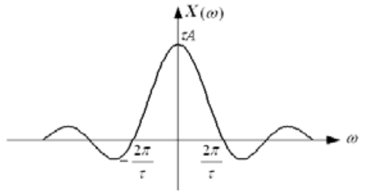
$$x(t)=A\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

由傅里叶正变换定义式，可得：

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}A\cdot e^{-j\omega t}dt=\frac{A}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$=\frac{A}{-j\omega}(e^{-j\omega\tau/2}-e^{j\omega\tau/2})=\frac{A}{-j\omega}[-2j\sin(\omega\tau/2)]$$

$$=\frac{2A\sin(\omega\tau/2)}{\omega}=A\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}=A\tau\cdot Sa(\omega\tau/2)$$



分析：

1. **非周期矩形脉冲信号的频谱是连续频谱，其形状与周期矩形脉冲信号离散频谱的包络线相似**
2. **周期信号的离散频谱可通过对非周期信号的连续频谱等间隔取样求得**
3. **信号在时域有限，则在频域将无限延续**
4. **信号的频谱分量主要集中在零频到第一个过零点之间，工程中往往将此宽度作为有效带宽**
5. **脉冲宽度τ越窄，有限带宽越宽，高频分量越多即信号信息量大、传输速度快，传送信号所占用的频带越宽**

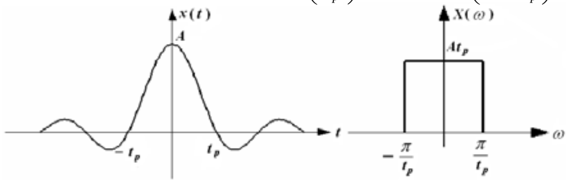
- **时域抽样函数：主瓣幅度A、中心t_0、第一零点和中心距离t_p**

$$x(t)=ASa\left[\frac{\pi(t-t_0)}{t_p}\right]$$

若t_0=0：

$$x(t)=ASa\left(\frac{\pi t}{t_p}\right)$$

- **利用傅里叶反变换可证明：** $ASa\left(\frac{\pi t}{t_p}\right)\overset{F}{\longleftrightarrow}At_p\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/t_p}\right)$



证： $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/t_p}^{\pi/t_p}At_p\cdot e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{At_p}{jt}e^{j\omega t}\Big|_{-\pi/t_p}^{\pi/t_p}$

$$=\frac{At_p}{2\pi jt}(e^{j\pi t/t_p}-e^{-j\pi t/t_p})=\frac{At_p}{2\pi jt}[2j\sin(\pi t/t_p)]$$

$$=\frac{At_p\sin(\pi t/t_p)}{\pi t}=A\frac{\sin(\pi t/t_p)}{\pi t/t_p}=ASa(\pi t/t_p)$$

例2 计算指数信号$e^{-a|t|}$($a>0$)的频谱函数

解：由傅里叶正变换定义式，可得：

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|t|}\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{at}\cdot e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{a-j\omega}e^{(a-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{-(a+j\omega)}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\therefore\quad |X(\omega)|=\frac{2a}{a^2+\omega^2},\quad \varphi(\omega)=0$$

---

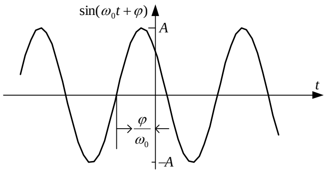
§ 1.3 信号的基本概念

一、 典型信号

1. 正弦信号

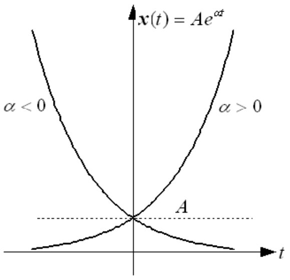
$$x(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

A: 振幅　ω_0:角频率(弧度/秒)　φ:初始相位



2．实指数信号

$x(t) = Ae^{\alpha t}$



3．虚指数信号

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

虚指数信号是周期信号：

$$x(t+kT) = e^{j\omega_0(t+kT)} = e^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 kT} = e^{j\omega_0 t}e^{j\frac{2\pi}{T}kT} = e^{j\omega_0 t}e^{j2k\pi} = e^{j\omega_0 t} = x(t)$$

其中周期为：

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

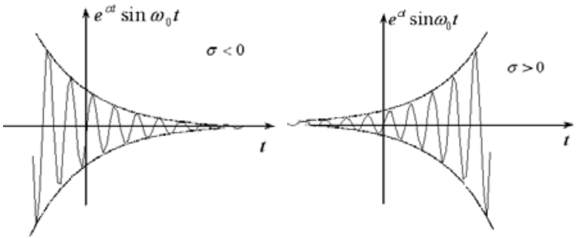
Euler公式：

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \qquad \sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

4．复指数信号

$$\boxed{x(t) = Ae^{st}, \quad s = \sigma + j\omega_0}$$

$$x(t) = Ae^{\sigma t}e^{j\omega_0 t} = Ae^{\sigma t}\cos\omega_0 t + jAe^{\sigma t}\sin\omega_0 t$$



5．抽样信号

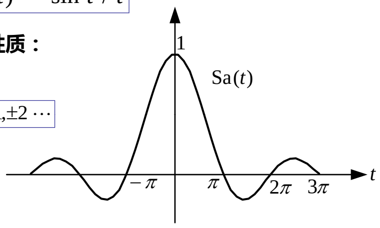
$$\boxed{\mathrm{Sa}(t) = \sin t / t}$$

抽样函数具有以下性质：

$\boxed{\mathrm{Sa}(0) = 1}$

$\boxed{\mathrm{Sa}(k\pi) = 0, k = \pm1, \pm2 \cdots}$

$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(t)dt = \pi}$



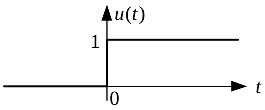
- **与*Sa*(*t*)函数类似的是sinc(*t*) 函数，其定义为：**

$$\mathrm{sinc}(t) = \sin(\pi t)/(\pi t)$$

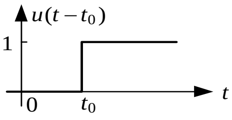
6．阶跃信号

- **定义**:

$$\boxed{x(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = u(t)}$$

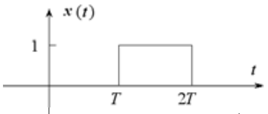


$$\boxed{u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}}$$

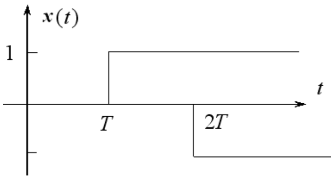


- **作用**:

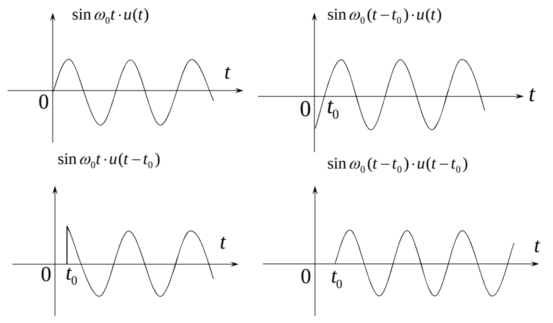
可表示任意的矩形脉冲信号



***x*(*t*)=*u*(*t-T*)-*u*(*t-2T*)**



可表示信号的时间范围

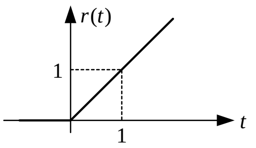


7．斜坡信号

- **定义：**

$$r(t)=\begin{cases} t & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

或 $r(t)=t\cdot u(t)$



- **与阶跃信号之间的关系：**

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\cdot d\tau \qquad \frac{dr(t)}{dt}=u(t)$$

8．冲激信号

1) **冲激信号的引出**

阶跃信号加在电容两端，流过电容的电流

i*(*t*)=*C*d*u*(*t*)/d*t 可用冲激信号表示

2) **冲激信号的定义**

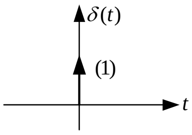
狄拉克定义式：

$$\delta(t)=0\,,\ t\neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$$

---

3) 冲激信号的图形表示

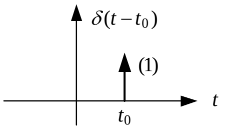


- **说明：**
  - **冲激信号可延时至任意时刻t_0，以符号$\delta(t-t_0)$表示**

定义式为： $\delta(t-t_0)=0 \quad t\neq t_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=\int_{t_0-\Delta}^{t_0+\Delta}\delta(t-t_0)dt=1$$

波形表示



- **冲激信号具有强度，强度就是冲激信号对时间的定积分值**

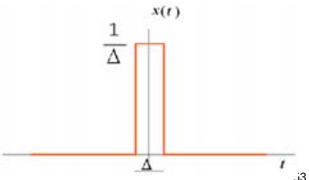
图中用括号注明，以区分信号的幅值

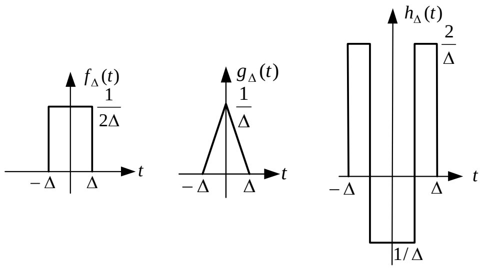
- **物理意义：作用时间极短，作用值很大的物理现象的数学模型**
- **冲激信号的作用：**

表示其他任意信号　　表示信号间断点的导数

4) 冲激信号的极限模型

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}x(t)$$

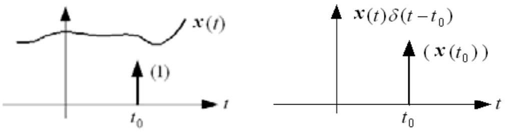




$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}f_\Delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}g_\Delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}h_\Delta(t)$$

5) 冲激信号的性质

- **筛选特性** $\boxed{x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)}$



- **取样特性** $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)}$

证：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t_0)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

- **展缩特性** $\boxed{\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)}$

证： 任取一信号***g*(*t*)**，对于 $\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\delta(at)dt$

令***x*=*at***，若***a*>0**，则有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\delta(at)dt=\int_{-\infty}^{\infty}g\left(\frac{x}{a}\right)\delta(x)\frac{dx}{a}=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(\frac{x}{a}\right)\delta(x)dx$$

若***a*<0**，则有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\delta(at)dt=\int_{\infty}^{-\infty}g\left(\frac{x}{a}\right)\delta(x)\frac{dx}{a}=\int_{-\infty}^{\infty}g\left(\frac{x}{a}\right)\delta(x)\frac{dx}{-a}=\frac{1}{-a}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(\frac{x}{a}\right)\delta(x)dx$$

$$\therefore\quad\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\delta(ax)dx=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(\frac{x}{a}\right)\delta(x)dx=\frac{g(0)}{|a|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\frac{\delta(t)}{|a|}dt=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\delta(t)dt=\frac{g(0)}{|a|}\qquad\Rightarrow\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\boxed{\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)}$$

***a*= –1 ⇒ *δ*(*t*)=*δ*(–*t*)**

推论：冲激信号是偶函数

- **与阶跃信号的关系**

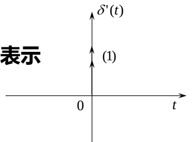
$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}=u(t)\qquad\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$$

6) 其他定义形式：

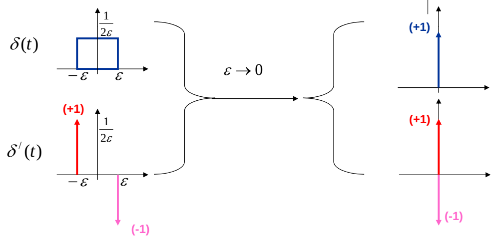
$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\pm j\omega t}d\omega,\quad\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega t d\omega$$

9．冲激偶信号

- **定义：** $\boxed{\frac{d\delta(t)}{dt}=\delta^{'}(t)}$ **冲激偶信号图形表示**



$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}x(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}=\delta^{'}(t)}$



- **性质：**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{'}(t)dt=0$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta^{'}(\tau)d\tau=\delta(t)$$

$$\delta(t)=-t\delta^{'}(t)\qquad\Rightarrow\qquad\delta^{/}(t)=-\delta^{/}(-t)$$

$$x(t)\delta^{'}(t)=x(0)\delta^{'}(t)-x^{'}(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta^{'}(t)dt=-x^{'}(0)$$