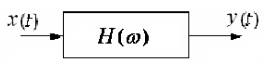
三、随机信号的相干函数

- **两个随机信号$y(t)$和$x(t)$的相干函数定义为：**

$$r_{yx}(\omega)=\frac{|S_{yx}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}$$

- **若$x(t)$和$y(t)$为一线性系统的输入与输出，则有：**



$$S_y(\omega)=S_x(\omega)|H(\omega)|^2$$

$$S_{yx}(\omega)=S_x(\omega)H(\omega)$$

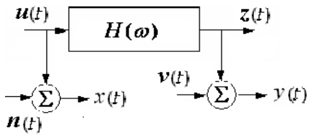
$$\therefore\quad r_{yx}(\omega)=\frac{|S_{yx}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}=\frac{|S_x(\omega)|^2|H(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_x(\omega)|H(\omega)|^2}=1$$

- **若$y(t)$和$x(t)$不相关 $\Rightarrow R_{yx}(\tau)=0 \ \Rightarrow S_{yx}(\omega)=0$**

$$\therefore\quad r_{yx}(\omega)=\frac{|S_{yx}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}=0$$

相干函数在频率域表征两个随机信号各频率成份的互相关联程度

- **相干函数大于0而小于1，存在两种情况：**
  - **连续$y(t)$和$x(t)$的系统是非线性的**
  - **测量值中含有噪声，即$y(t)$和$x(t)$是信号和噪声的叠加**



$$x(t)=u(t)+n(t),\quad 信号u(t)与噪声n(t)不相关$$

$$y(t)=z(t)+v(t),\quad 信号z(t)与噪声v(t)不相关$$

$$R_x(\tau)=E[x(t)x^*(t-\tau)]=E\{[u(t)+n(t)][u^*(t-\tau)+n^*(t-\tau)]\}$$
$$=E[u(t)u^*(t-\tau)]+E[u(t)n^*(t-\tau)]+E[n(t)u^*(t-\tau)]$$
$$+E[n(t)n^*(t-\tau)]=R_u(\tau)+0+0+R_n(\tau)=R_u(\tau)+R_n(\tau)$$

$$\therefore\quad S_x(\omega)=S_u(\omega)+S_n(\omega)$$

类似地可得到： $S_y(\omega)=S_z(\omega)+S_v(\omega)$

$n(t)$和$v(t)$不相关，还可得到：

$$R_{yx}(\tau)=E[y(t)x^*(t-\tau)]=E\{[z(t)+v(t)][u^*(t-\tau)+n^*(t-\tau)]\}$$
$$=E[z(t)u^*(t-\tau)]+E[z(t)n^*(t-\tau)]+E[v(t)u^*(t-\tau)]$$
$$+E[v(t)n^*(t-\tau)]=R_{zu}(\tau)+0+0+0=R_{zu}(\tau)$$

$$\therefore\quad S_{yx}(\omega)=S_{zu}(\omega)$$

理想的相干函数为：

$$r_{zu}(\omega)=\frac{|S_{zu}(\omega)|^2}{S_z(\omega)S_u(\omega)}=1$$

$$\therefore\quad r_{yx}(\omega)=\frac{|S_{yx}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}=\frac{|S_{zu}(\omega)|^2}{[S_u(\omega)+S_n(\omega)][S_z(\omega)+S_v(\omega)]}$$

$$=\frac{|S_{zu}(\omega)|^2}{S_u(\omega)S_z(\omega)\left[1+\frac{S_n(\omega)}{S_u(\omega)}\right]\left[1+\frac{S_v(\omega)}{S_z(\omega)}\right]}$$

$$=\frac{1}{\left[1+\frac{S_n(\omega)}{S_u(\omega)}\right]\left[1+\frac{S_v(\omega)}{S_z(\omega)}\right]}<1$$

第三章 数字通信系统

§ 3.1 模拟信号的数字化原理

连续时间信号(Continuous Time Signals)：
观测中的任意时间值上信号均有确定的值

离散信号(Discrete Time Signals)：
信号仅在规定的离散时刻有定义

模拟信号(Analogue Signals)：
连续时间信号或幅度取值连续的信号的总称

数字信号(Digital Signals)：
幅度取值为某个量值整数倍的离散时间信号

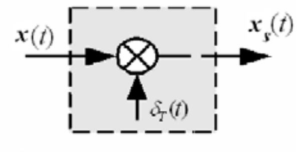
- 模拟信号 → 数字信号的步骤：

抽样　量化　编码

一、抽样定理(Sampling Theorem)

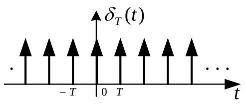
若带限信号$x(t)$的最高频率为f_m，则信号$x(t)$可以用等间隔T的抽样值$x(nT)$唯一地表示。而抽样间隔T需不大于$1/2f_m$，或最低抽样频率f_s不小于$2f_m$

(一)、信号抽样的理论分析



信号理想抽样模型

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

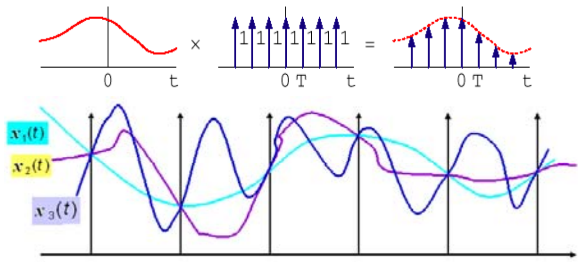


$$x_s(t)=x(t)\cdot\delta_T(t)=x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

52 7

$$x_s(t)=x(t)\cdot\delta_T(t)$$



$$x_{s1}(nT)=x_{s2}(nT)=x_{s3}(nT)\quad\Rightarrow\quad x_{s1}(t)=x_{s2}(t)=x_{s3}(t)?$$

52 8

若从抽样信号$x_s(t)$中恢复原信号$x(t)$，需满足两个条件：

(1) $x(t)$是带限信号，即其频谱函数在$|\omega|>\omega_m$各处为零

(2) 抽样间隔T需满足 $\boxed{T\le\pi/\omega_m=1/(2f_m)}$ ，

或抽样频率f_s需满足 $f_s\ge 2f_m$ (或$\omega_s\ge 2\omega_m$)

$f_s=2f_m$ 为最小抽样频率

称为奈奎斯特频率(Nyquist Rate)

(二)、理想抽样信号的频谱分析

抽样角频率 $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}$　　信号频谱 $x(t)\xleftrightarrow{F}X(\omega)$

52 9

- 抽样脉冲的频谱：

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\xleftrightarrow{F}\delta_T(\omega)=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$$

- 傅里叶变换的频率域卷积性质：时域相乘→频域卷积

$$x_s(t)=x(t)\cdot\delta_T(t)\quad\Rightarrow\quad X_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}[X(\omega)*\delta_T(\omega)]$$

- 抽样信号的频谱：

$$X_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}[X(\omega)*\delta_T(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\left[X(\omega)*\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)\right]$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega)*\delta(\omega-n\omega_s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$$

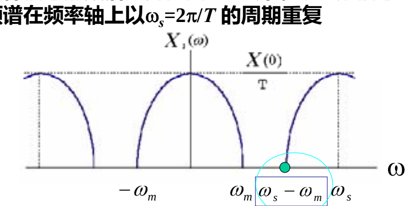
f_s

52 10

- 抽样信号的频谱：

$$X_s(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(\omega-\frac{2n\pi}{T}\right)$$

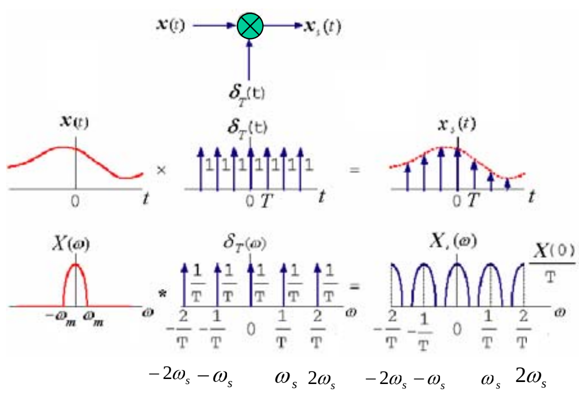
抽样信号的频谱除比例因子$1/T$外，等于原信号频谱在频率轴上以$\omega_s=2\pi/T$的周期重复



- 抽样信号的频谱不混叠的条件：

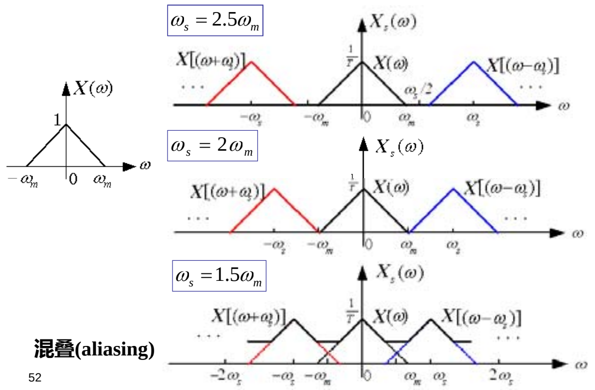
$$\omega_s-\omega_m>\omega_m\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{T}=f_s\ge 2f_m$$

52 11



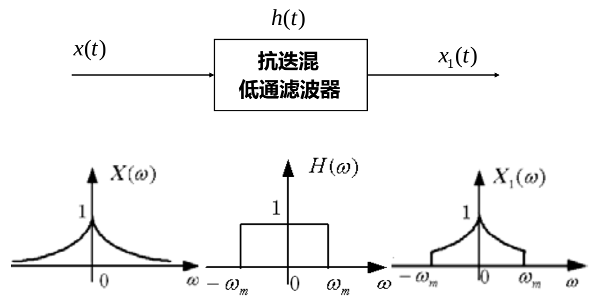
52 12

抽样信号$x_s(t)$频谱与抽样间隔T关系：

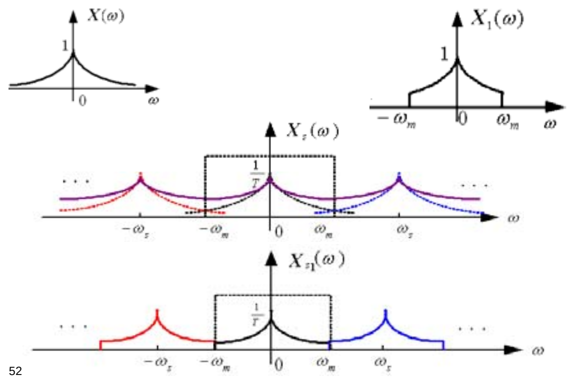


混叠(aliasing)

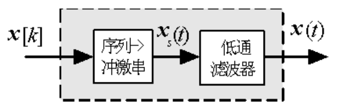
实际信号不满足带限条件时



混叠误差与截断误差比较



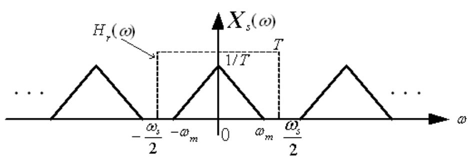
(三)、信号的重建



信号重建模型

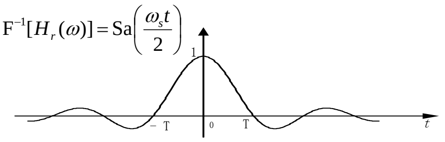
$$H_r(\omega)=\begin{cases}T & |\omega|<\omega_s/2\\ 0 & |\omega|>\omega_s/2\end{cases}$$

$$X(\omega)=H_r(\omega)X_s(\omega)$$



由抽样信号$x_s(t)$恢复连续信号$x(t)$

$$h_r(t)=\mathrm{F}^{-1}[H_r(\omega)]=\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)$$



$$x(t)=x_s(t)*h_r(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT)\cdot h_r(t-kT)$$

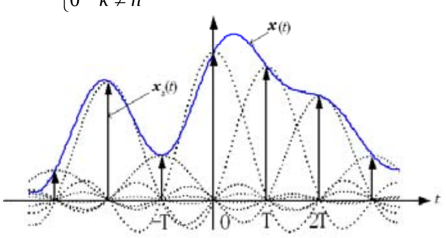
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT)\cdot Sa\left[\frac{\omega_s(t-kT)}{2}\right]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT)\cdot Sa\left[\frac{\omega_s t}{2}-\frac{2\pi}{T}\frac{kT}{2}\right]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT)\cdot Sa\left[\frac{\omega_s t}{2}-k\pi\right]$$

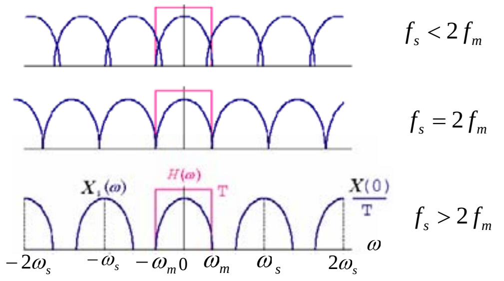
$$t=nT\quad\Rightarrow\quad x(t)\big|_{t=nT}=x(nT)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT)\cdot Sa\left(\frac{\omega_s nT}{2}-k\pi\right)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT)\cdot Sa\left(\frac{2\pi}{T}\frac{nT}{2}-k\pi\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT)\cdot Sa[(n-k)\pi]$$

$$Sa[(n-k)\pi]=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$



不同情况下信号恢复的比较

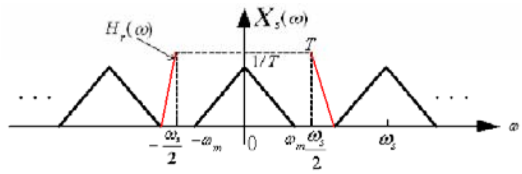


$$H(\omega)=\begin{cases}T & |\omega|<\omega_m\\ 0 & |\omega|>\omega_m\end{cases}$$

- **信号重建的理想低通滤波器：**

$$H(\omega)=\begin{cases}T & |\omega|<\omega_m\\ 0 & |\omega|>\omega_m\end{cases} \qquad H_r(\omega)=\begin{cases}T & |\omega|<\omega_s/2\\ 0 & |\omega|>\omega_s/2\end{cases}$$

- **抽样信号的频谱不混叠的条件：** $\omega_m \le \dfrac{\omega_s}{2}$



- **实际低通滤波器的通带：0 ~ ω_m**
  过渡带：ω_m~$(\omega_s-\omega_m)$
  阻带：>$(\omega_s-\omega_m)$

- **当** $\omega_s = 2\omega_m$ **时**

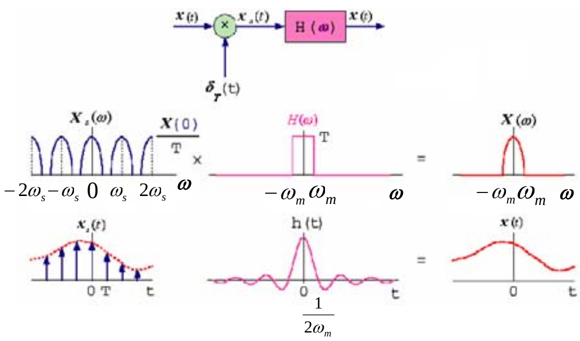
$$H(\omega)=H_r(\omega)=\begin{cases}T & |\omega|<\omega_m=\dfrac{\omega_s}{2}\\ 0 & |\omega|>\omega_m=\dfrac{\omega_s}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ **需采用理想低通滤波器**
实际上无法完全无失真重建信号

- **当ω_s>2ω_m**时，可完全无失真地重建信号
- 抽样频率越高，单位时间的信号抽样值越多
- 一般而言，抽样频率取为：

$$2\omega_m < \omega_s < 4\omega_m$$

信号抽样与恢复的小结



二、幅度量化(Amplitude quantization)

- 抽样后信号在时间上离散，但幅度仍是连续取值的(仍属于模拟信号)
- 为变成数字信号，还需将连续的抽样值离散化：幅度量化
- 量化：对信号的幅度“分级”或“分层”
- 均匀(uniform)量化：将输入信号的幅度取值按等间隔分层，并在每层的取值域中选一个固定的值作为该层输出的量化值
- 均匀量化的间隔是一常数，大小取决于输入信号的幅度变化范围和量化电平数(分层数)
- **设输入信号的幅度最大、最小值分别为b和a，量化电平数为N，则均匀量化的间隔为：**

$$\Delta V=\frac{b-a}{N}$$

- **设x_i和x_{i-1}分别为第i个量化间隔的上、下分界电平，该层输出的量化值为V_i，则有：**

$$x_{i-1} \le V_i \le x_i$$

- **V_i通常有三种取法：**
  - **四舍五入法：** $V_i=(x_{i-1}+x_i)/2$
  - **舍去法：** $V_i=x_{i-1}$
  - **补足法：** $V_i=x_i$

输入信号幅度范围	四舍五入法量化值	舍去法量化值	补足法量化值
0～ΔV	0.5ΔV	0	ΔV
ΔV～2ΔV	1.5ΔV	ΔV	2ΔV
2ΔV～3ΔV	2.5ΔV	2ΔV	3ΔV
3ΔV～4ΔV	3.5ΔV	3ΔV	4ΔV
4ΔV～5ΔV	4.5ΔV	4ΔV	5ΔV

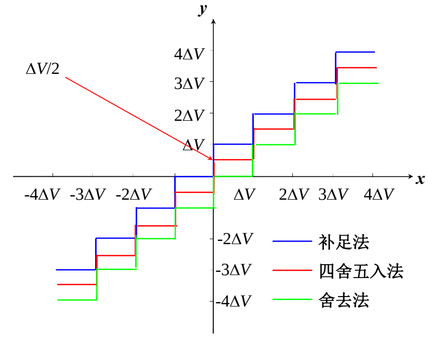
- 设幅度x被量化为V_i，则量化误差e定义为：

$$e = x - V_i$$

四舍五入法量化误差	舍去法量化误差	补足法量化误差
-0.5ΔV~0.5ΔV	0~ΔV	-ΔV~0

- 舍去法的电路比四舍五入法简单
- 对舍去法，若在恢复时对量化的输出加上半个量化间隔，则总的量化误差与四舍五入法完全一致
- 这是常用的一种量化方法
- 量化过程会在重建信号时引入误差，这是不能恢复的
- 量化影响相当于在系统中引入附加的噪声，称为量化噪声
- 量化特性曲线：输入信号幅度x和它的量化值y的关系曲线

三种量化方法下的量化特性曲线



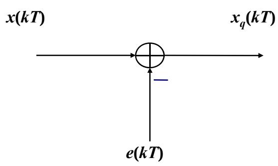
三、量化噪声

- 抽样后离散信号的量化误差为：

$$e(kT) = x(kT) - x_q(kT)$$

其中$x_q(kT)$为抽样后的离散信号$x(kT)$的量化值

- 在四舍五入法中，量化误差$e(kT)$的幅度绝对值不超过0.5ΔV
- 量化误差相当于一个噪声的作用，称为量化噪声



- 设输入双极性信号量化为N级，量化间隔为ΔV，均匀量化的幅度限制在$-N\Delta V/2 \sim N\Delta V/2$范围
- 若输入信号的抽样值超过该范围，称量化器已过载
- 称$\pm N\Delta V/2$为过载电平
- 量化噪声分为：一般量化噪声、过载量化噪声
- 避免过载量化噪声的方法：适当控制输入信号的幅度范围
- 下面主要讨论一般量化噪声的功率
- 取值在第i个量化级($x_{i-1} \le x \le x_i$)的信号，将被量化为V_i，量化噪声为：$e_i = x - V_i$
- 当信号幅度的概率密度为$p(x)$，则第i个量化级的量化噪声的平均功率为：

$$N_{qi} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} e_i^2 p(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - V_i)^2 p(x)dx$$

- 为保证信号量化后失真很小，量化级N>>1，间隔ΔV足够小
→ 同一量化级中，$p(x)$近似为常数$p(V_i)$

$$\therefore \quad N_{qi} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - V_i)^2 p(V_i)dx$$

$$N_{qi} = p(V_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - V_i)^2 dx = \frac{1}{3}p(V_i)[(x_i - V_i)^3 - (x_{i-1} - V_i)^3]$$

- 第i级量化噪声的平均功率与量化电平V_i有关

$$\frac{dN_{qi}}{dV_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{qi} \to \min \qquad \therefore \quad V_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$$

再加上 $\Delta V = x_i - x_{i-1}$ $\qquad \therefore \quad N_{qi} = \frac{1}{12}p(V_i)(\Delta V)^3$

- 信号幅度落在第i个量化级的概率为：$p(V_i)\Delta V = P_i$

$$\Rightarrow \quad N_{qi} = \frac{1}{12}P_i(\Delta V)^2$$

- 总的量化噪声功率N_q为各量化级量化噪声功率之和：

$$N_q = \sum_i N_{qi} = \frac{1}{12}\sum_i P_i(\Delta V)^2 = \frac{1}{12}(\Delta V)^2\sum_i P_i = \frac{1}{12}(\Delta V)^2$$

- 均匀量化时，只要N足够大，量化噪声功率仅与量化间隔ΔV有关，与信号幅度的概率密度分布无关
- 若不是均匀量化，$\Delta V_i = x_i - x_{i-1}$
- 量化噪声功率为：

$$N_{qi} = \frac{1}{12}P_i(\Delta V)^2 \quad \Rightarrow \quad N_q = \sum_i N_{qi} = \frac{1}{12}E[(\Delta V_i)^2]$$

- 信号功率与信号幅度的分布有关
- 当信号在$\pm\Delta NV/2$内均匀分布时，其功率为：

$$S_q = \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} V_i^2 P_i = \sum_{i=-N/2+1}^{N/2}\left\{\frac{1}{2}[i\Delta V + (i-1)\Delta V]\right\}^2 \cdot \frac{1}{N}$$

$$= \frac{\Delta V^2}{4N}\cdot\frac{N}{3}(N^2 - 1) = \frac{\Delta V^2}{12}(N^2 - 1) \approx \frac{N^2\Delta V^2}{12}$$

- 信号的量化信噪比：信号功率与量化噪声功率的比值

$$\frac{S_q}{N_q} \approx \frac{\frac{N^2\Delta V^2}{12}}{\frac{1}{12}(\Delta V)^2} = N^2$$

- 信噪比常以dB来度量：SNR(Signal-to-Noise Ratio)

$$SNR_q = 10\lg\frac{S_q}{N_q} \approx 10\lg N^2 = 20\lg N$$

- 当用m个二进制码(m bit)来表示量化值，即$N=2^m$，则有：

$$SNR_q = 20\lg 2^m = 20m\lg 2 \approx 20m \times 0.30 = 6m \quad (dB)$$

每增加一个bit(分层数增加一倍)，可增加6 dB的量化信噪比

- 高斯分布的信号：

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\max[p(s)] = p(s)|_{s=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$s = \pm 4\sigma \quad \rightarrow \quad p(s)|_{s=\pm 4\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{16\sigma^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\approx \frac{0.000335}{\sqrt{2\pi}\sigma} << \max[p(s)]$$

- 量化过载电平$N\Delta V/2$取为4σ：

$$4\sigma = N\Delta V/2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = N\Delta V/8$$

- 当N>16时，高斯分布的信号的平均功率为：

$$S_q = \sum_{i=-N/2+1}^{N/2} V_i^2 P_i \approx \sigma^2 = \frac{N^2\Delta V^2}{64}$$

- 信号的量化信噪比为：

$$\frac{S_q}{N_q} \approx \frac{\frac{N^2\Delta V^2}{64}}{\frac{1}{12}(\Delta V)^2} = \frac{3}{16}N^2$$

$$\therefore \quad SNR_q = 10\lg\frac{S_q}{N_q} \approx 10\lg\left(\frac{3}{16}N^2\right) = 20\lg N + 10\lg 3 - 20\lg 4$$

- 当$N=2^m$时，有：

$$SNR_q = 20\lg 2^m + 10\lg 3 - 20\lg 4 \approx 6m - 7.3 \quad (dB)$$

每增加一个bit(分层数增加一倍)，可增加6 dB的量化信噪比

- 对其他概率分布的信号，也类似有：

$$\frac{S_q}{N_q} \approx kN^2$$

每增加一个bit(分层数增加一倍)，可增加6 dB的量化信噪比

例1 对±2 V间变化的信号抽样值进行均匀量化，为使量化误差的均方根小于5 mV，应采用几bit二进制码？

解：根据题意，量化范围的上下电平为：

$$a = -2\,\text{V}; \quad b = 2\,\text{V}$$

量化误差的均方根σ为5 mV，则量化噪声功率为：

$$N_i = \sigma^2 = \frac{1}{12}(\Delta V)^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{N}\right)^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{2^m}\right)^2$$

$$\therefore \quad 2^m = \frac{b-a}{\sqrt{12}\sigma} = \frac{2-(-2)}{\sqrt{12}\times 0.005} \approx 230.9$$

$$\Rightarrow \quad m = \log_2 230.9 \approx 7.85$$

$$\therefore \quad m = 8$$

例2 对余弦信号$x(t)=A\cos(2\pi f t)$，若采用7 bit二进制码的均匀量化，问量化信噪比为多少？

解：根据题意，量化分层数为： $N = 2^7 = 128$

余弦信号的功率为：

$$S_q = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|A\cos(2\pi f t)|^2\,dt$$

$$= \frac{A^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos^2(2\pi f t)dt = \frac{A^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}[1+\cos(4\pi f t)]dt$$

$$= \frac{A^2}{T}\times\left[\frac{1}{2}T + 0\right] = \frac{A^2}{2}$$

余弦信号的动态范围为：$-A$~A

$$\therefore \quad \Delta V = \frac{A-(-A)}{N} = \frac{2A}{128} = \frac{A}{64}$$

量化噪声功率为：

$$N_i = \frac{1}{12}(\Delta V)^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{A}{64}\right)^2 = \frac{A^2}{12\times 2^{12}}$$

量化信噪比为：

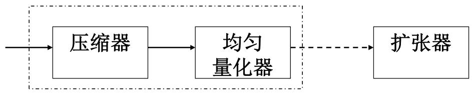
$$\frac{S_q}{N_q} = \frac{\frac{A^2}{2}}{\frac{1}{12}\times\frac{A^2}{2^{12}}} = 3\times 2^{13}$$

$$\therefore\ SNR_q = 10\lg\frac{S_q}{N_q} = 10\lg 3 + 130\lg 2 = 43.9 \quad (dB)$$

四、非均匀量化

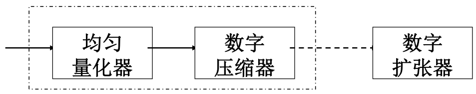
- **输入信号的动态范围(dynamic range)：满足一定信噪比的条件下，容许的最大和最小信号幅度的范围，通常用它们之比的dB数来表示**

- **均匀量化时，为增加输入信号的动态范围，同时保证小信号时有足够的量化信噪比，需增加量化级数，即增加编码bit数**
- **结果：增加系统复杂性，大信号时量化信噪比显得过大**
- **非均匀量化：大信号时，量化间隔取得大一点；小信号时，量化间隔取得小一些**
- **结果：在量化级数不变的条件下，提高小信号的量化信噪比，扩大输入信号的动态范围**
- **任何一种非均匀量化特性均由压缩器、均匀量化器组成**
- **接收端由扩张器恢复信号**
- **压缩器：对小信号有较大的放大倍数，对大信号有较小的放大倍数(对输入信号x作非线性变换$y=f(x)$)**
- **扩张器：与压缩器的性能相反(由逆变换恢复原始信号$f^{-1}(y)$)**
- **非均匀量化的两种实现方案：**
  - **模拟压缩器：压缩过程在抽样、量化前进行**
  - **数字压缩器：在抽样、均匀量化后，进行数字压缩和编码**



非均匀量化器

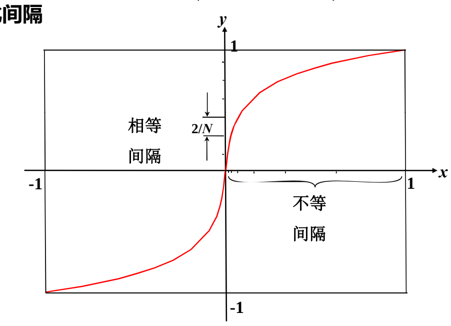
模拟压缩—扩张



非均匀量化器

数字压缩—扩张

- **数字压缩器将在非线性PCM编码部分进行介绍**
- **下面讨论模拟压缩器的非线性压缩特性**
- **设压缩特性为：$y=f(x)$，其中x、y均已归一化到(-1，1)区间**
- **y在该区间内均匀量化为N级(每级间隔为$2/N$) ⇔ x为不均匀的N个量化间隔**



- **将x不均匀量化的第i个量化间隔的中点记为x_i**
- **当N>>1时，可近似认为：第i个量化间隔所截的压缩曲线为一直线(折线)，其斜率为：**

$$f'(x_i) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i}$$

- **输出信号的量化间隔为$2/N$，输入信号第i个量化间隔为：**

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y}{f'(x_i)} = \frac{2/N}{f'(x_i)} = \frac{2}{Nf'(x_i)}$$

- **设输入信号的幅度分布是对称的：$p(-x)=p(x)$，非均匀量化的归一化量化噪声功率为：**

$$N_q = \frac{1}{12}E[(\Delta V_i)^2] = \frac{1}{12}\sum_{i=-N/2+1}^{N/2}(\Delta V_i)^2 P_i = \frac{1}{12}\times 2\sum_{i=1}^{N/2}(\Delta V_i)^2 P_i$$

$$= \frac{1}{12}\times 2\sum_{i=1}^{N/2}\left[\frac{2}{Nf'(x_i)}\right]^2 p(x_i)\Delta x_i = \frac{2}{3N^2}\sum_{i=1}^{N/2}\frac{p(x_i)}{[f'(x_i)]^2}\Delta x_i$$

- **当N>>1时，**

$$N_q = \frac{2}{3N^2}\sum_{i=1}^{N/2}\frac{p(x_i)}{[f'(x_i)]^2}\Delta x_i \quad\Rightarrow\quad N_q = \frac{2}{3N^2}\int_0^1\frac{p(x)}{[f'(x)]^2}dx$$

在量化级数和信号幅度概率密度一定的情况下，
量化噪声的功率由压缩特性曲线的斜率决定

$$\frac{\text{均匀量化第}i\text{级量化间隔}}{\text{非均匀量化第}i\text{级量化间隔}} = \frac{\frac{2}{N}}{\frac{2}{Nf'(x_i)}} = f'(x_i)$$

- 对$f'(x_i)$>1的区域，输入信号的量化间隔缩小，量化噪声功率减小，量化信噪比提高，可设计在小信号的范围
- 对$f'(x_i)$<1的区域，输入信号的量化间隔扩大，量化噪声功率增大，量化信噪比降低，可设计在大信号的范围

- 非均匀量化以大信号时的信噪比下降为代价来换取小信号时的信噪比提高，从而扩大输入信号的动态范围
- 因大信号时本来的信噪比很高，虽然非均匀量化会引起信噪比的下降，但往往信噪比仍能满足通信的需求
- 目前最典型的两种近似对数的压缩特性:
  - 北美、日本使用的μ律
  - 西欧等地使用的A律
- μ律的压缩特性为:

$$y=f(x)=\frac{\ln(1+\mu|x|)}{\ln(1+\mu)}Sgn(x),\quad x\in(-1,1)\quad y\in(-1,1)$$

其中$\mu>0$为压缩参数，表示压缩程度

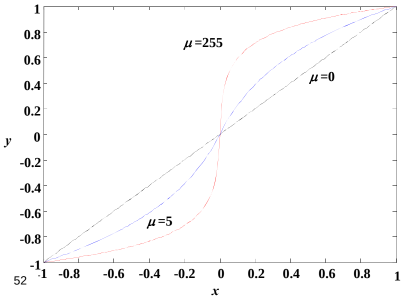
- $f(x)$的导数为:

$$f'(x)=\frac{1}{\ln(1+\mu)}\cdot\frac{\mu}{1+\mu|x|}$$

- 要得到非均匀量化的效果，需使：

$$f'(0)=\frac{1}{\ln(1+\mu)}\cdot\frac{\mu}{1+\mu|0|}=\frac{\mu}{\ln(1+\mu)}>1$$

$$\therefore\quad \mu>0$$



μ=0：均匀量化

μ越大，压缩效果越好

通常μ取255

- A律的压缩特性为:

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{A|x|}{1+\ln A}Sgn(x) & 0\le|x|\le\dfrac{1}{A}\\[2mm] \dfrac{1+\ln A|x|}{1+\ln A}Sgn(x) & \dfrac{1}{A}\le|x|\le 1\end{cases}$$

其中$A>1$为压缩参数，表示压缩程度

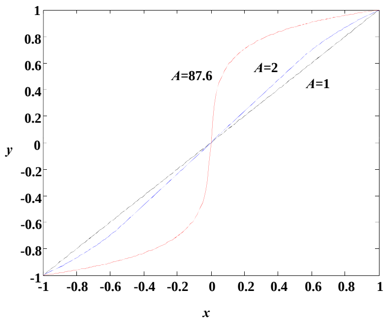
- $f(x)$的导数为:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{1+\ln A} & 0\le|x|\le\dfrac{1}{A}\\[2mm] \dfrac{1}{(1+\ln A)|x|} & \dfrac{1}{A}\le|x|\le 1\end{cases}$$

- 要得到非均匀量化的效果，需使：

$$f'(0)=\frac{A}{1+\ln A}>1$$

$$\therefore\quad A>1$$



A=1：均匀量化

A越大，压缩效果越好

通常A取87.6

- 对于μ律压缩器，当信号为高斯分布时：

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)\quad x\in(-1,1)$$

其中信号的平均功率为: $S_x=\int_{-1}^{1}x^2p(x)dx=\sigma_x^2$

- μ律压缩的量化噪声的功率为:

$$N_q=\frac{2}{3N^2}\int_0^1\frac{p(x)}{[f'(x)]^2}dx=\frac{2}{3N^2}\int_0^1\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)}{\left[\frac{1}{\ln(1+\mu)}\cdot\frac{\mu}{1+\mu|x|}\right]^2}dx$$

$$=\frac{2}{3N^2}\left[\frac{\ln(1+\mu)}{\mu}\right]^2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)(1+\mu x)^2dx$$

$$\therefore\quad N_q=\frac{2}{3N^2}\left[\frac{\ln(1+\mu)}{\mu}\right]^2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)(1+2\mu x+\mu^2x^2)dx$$

$$=\frac{1}{3N^2}\left[\frac{\ln(1+\mu)}{\mu}\right]^2\left[2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)dx\right]$$

$$+\frac{1}{3N^2}\left[\frac{\ln(1+\mu)}{\mu}\right]^2\left[2\mu\times 2\int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)dx\right]$$

$$+\frac{1}{3N^2}\left[\frac{\ln(1+\mu)}{\mu}\right]^2\left[\mu^2\times 2\int_0^1 x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)dx\right]$$

$$=\frac{1}{3N^2}\left[\frac{\ln(1+\mu)}{\mu}\right]^2\{1+2\mu E[|x|]+\mu^2\sigma_x^2\}$$

其中 $E[|x|]=\int_{-1}^{1}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right]dx$

$$=2\int_{0}^{1}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right]dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_x$$

$$\therefore\quad N_q=\frac{1}{3N^2}\left[\frac{\ln(1+\mu)}{\mu}\right]^2\{1+2\mu E[|x|]+\mu^2\sigma_x^2\}$$

$$=\frac{1}{3N^2}\left[\frac{\ln(1+\mu)}{\mu}\right]^2\left(1+2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mu\sigma_x+\mu^2\sigma_x^2\right)$$

- **μ律压缩的量化信噪比**为：

$$\frac{S_x}{N_q}=\frac{\sigma_x^2}{\frac{1}{3N^2}\left[\frac{\ln(1+\mu)}{\mu}\right]^2\left(1+2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mu\sigma_x+\mu^2\sigma_x^2\right)}$$

$$\therefore\quad \frac{S_x}{N_q}=\frac{3N^2}{[\ln(1+\mu)]^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\mu\sigma_x}+\frac{1}{\mu^2\sigma_x^2}}$$

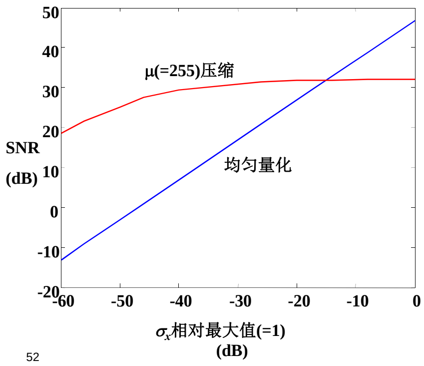
- **当N=128，μ=255时，有：**

$$\frac{S_x}{N_q}=\frac{3\times128^2}{[\ln(1+255)]^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2\sqrt{2}}{255\sqrt{\pi}\sigma_x}+\frac{1}{255^2\cdot\sigma_x^2}}\approx\frac{1598.5}{1+\frac{1}{159.80\sigma_x}+\frac{1}{65025\sigma_x^2}}$$

- **均匀量化的量化信噪比**为：$\frac{S_x}{N_q}=\frac{\sigma_x^2}{\frac{1}{12}\left(\frac{2}{N}\right)^2}=3N^2\sigma_x^2$

- **当N=128时，有：** $\frac{S_x}{N_q}=3\times128^2\cdot\sigma_x^2=49152\sigma_x^2$

σ_x	σ_x相对于最大输入信号幅度(=1)dB数	量化SNR (dB)	
		均匀量化	μ(=255)律压缩
0.001	-60	-13.1	18.5
0.0016	-56	-9.1	21.7
0.003	-50	-3.1	25.2
0.005	-46	0.9	27.5
0.01	-40	6.9	29.5
0.05	-26	20.9	31.5
0.1	-20	26.9	31.8
0.2	-14	32.9	31.9
0.4	-8	38.9	32.0
1.0	0	46.9	32.0



μ律压缩时，量化信噪比在较大的输入信号范围内几乎不变

σ_x相对于最大幅度-40 dB以下，量化信噪比才明显下降

σ_x相对于最大幅度-15 dB以上，量化信噪比小于均匀量化的值