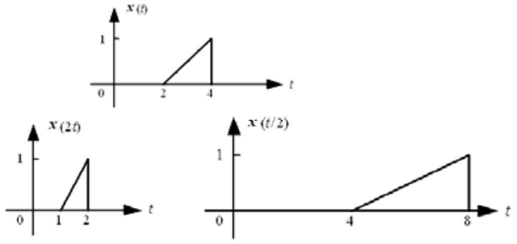
二、 典型基本运算

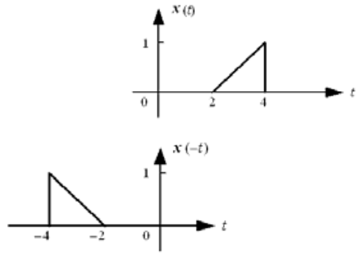
1. 尺度变换 $x(t) \rightarrow x(at)$ $a>0$



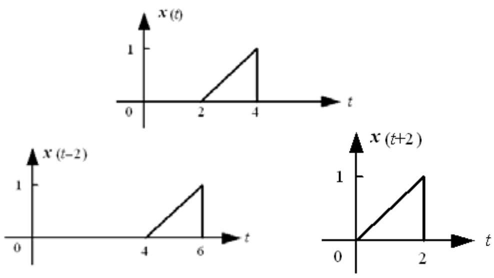
若$0<a<1$，则$x(at)$是$x(t)$的扩展
若$a>1$， 则$x(at)$是$x(t)$的压缩

2. 信号的翻转 $x(t) \rightarrow x(-t)$

将$x(t)$以纵轴为中心作翻转

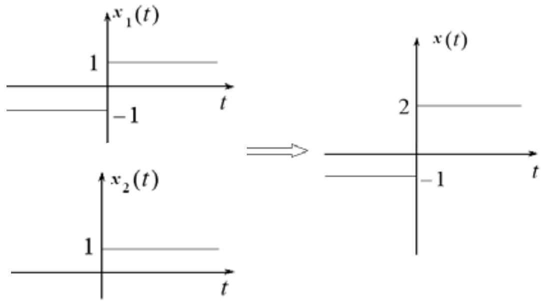


3. 时移（平移） $x(t) \rightarrow x(t-t_0)$ $t_0>0$

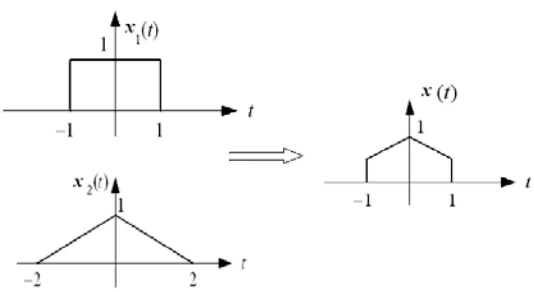


$x(t-t_0)$表示信号右移
$x(t+t_0)$表示信号左移

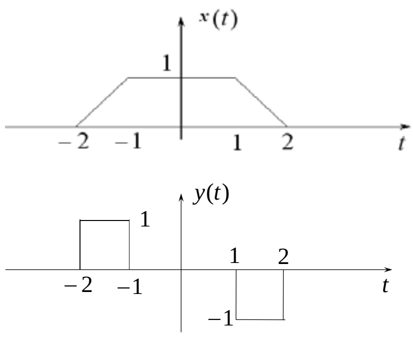
4. 信号的相加 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)+\ldots\ldots x_n(t)$



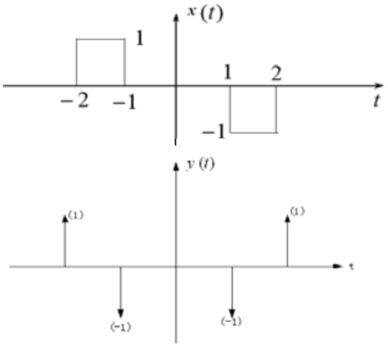
5. 信号的相乘 $x(t)=x_1(t)\,x_2(t)\ldots\ldots x_n(t)$



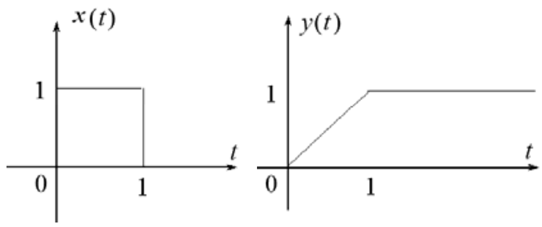
6． 信号的微分 $y(t)=\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t=x'(t)$



- **注意：对不连续点的微分**



7. 信号的积分 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\cdot d\tau$



8. 信号的卷积

- ***x*(*t*)和*y*(*t*)的卷积定义为：**

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- **卷积的计算步骤：**

1）将*x*(*t*)和*y*(*t*)中的自变量由*t*改为*τ*

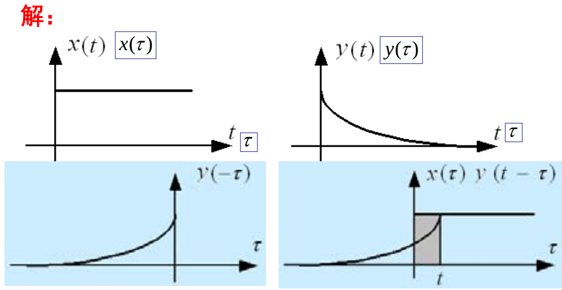
2）把其中一个信号翻转、平移

$$y(\tau)\xrightarrow{\text{翻转}}y(-\tau)\xrightarrow{\text{平移}t}y(-(\tau-t))=y(t-\tau)$$

3）将*x*(*τ*)与*y*(*t*-*τ*)相乘，对乘积以*τ*积分

例1 计算$x(t)*y(t)$，其中$x(t)=u(t),\ y(t)=e^{-t}u(t)$

解：

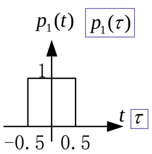


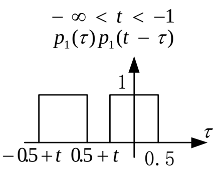
$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$\text{if } t<0,\ x(t)*y(t)=0;\ \text{if } t\ge 0,\ x(t)*y(t)=\int_{0}^{t}e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{\tau-t}\Big|_{0}^{t}=1-e^{-t}$$

例2 **计算$y(t)=p_1(t)*p_1(t)$**

解：

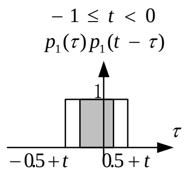


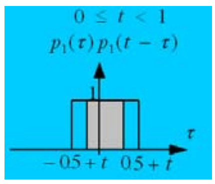


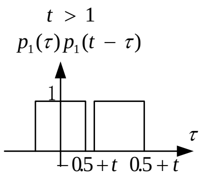
a) $-\infty<t\le -1$ $\quad y(t)=0$

b) $-1\le t<0$

$$y(t)=\int_{-0.5}^{0.5+t}dt=1+t$$





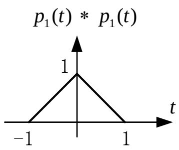


c) $0\le t<1$

$$y(t)=\int_{-0.5+t}^{0.5}dt=1-t$$

d) $1\le t<\infty$

$y(t)=0$



- 卷积的性质

1)交换律(Communitive)： $x_1(t)*x_2(t)=x_2(t)*x_1(t)$

$$x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau=x_2(t)*x_1(t)$$

2)分配律(Distributive)： $[x_1(t)+x_2(t)]*x_3(t)=x_1(t)*x_3(t)+x_2(t)*x_3(t)$

3)结合律(Associative)： $[x_1(t)*x_2(t)]*x_3(t)=x_1(t)*[x_2(t)*x_3(t)]$

4)位移特性(Delay accumulation)：

已知 $x_1(t)*x_2(t)=y(t)$ 则： $x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2)=y(t-t_1-t_2)$

5)展缩特性

已知 $x_1(t)*x_2(t)=y(t)$ $\Rightarrow$ $x_1(at)*x_2(at)=\frac{1}{|a|}y(at)$

位移特性证明：

$$x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau-t_1)x_2(t-\tau-t_2)d\tau$$

$$\overset{\tau-t_1=x}{=}\int_{-\infty}^{\infty}x_1(x)x_2(t-t_1-t_2-x)dx$$

$$=y(t-t_1-t_2)$$

展缩特性证明：

$$x_1(at)*x_2(at)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(a\tau)x_2[a(t-\tau)]d\tau$$

$$\overset{a\tau=x}{=}\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}x_1(x)x_2(at-x)dx=\frac{1}{|a|}y(at)$$

- 奇异信号的卷积

1)延迟特性 $x(t)*\delta(t-T)=x(t-T)$

$$x(t-t_1)*\delta(t-t_2)=x(t-t_1-t_2)$$

$$\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\delta(t-t_1-t_2)$$

2)微分特性 $x(t)*\delta'(t)=x'(t)$

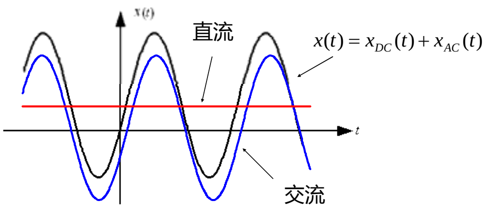
3)积分特性

$$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

三、 信号的分解

1．信号分解为直流分量与交流分量

$$x(t)=x_{DC}(t)+x_{AC}(t)$$ $$x_{DC}(t)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)dt$$



2. 信号分解为奇分量与偶分量之和

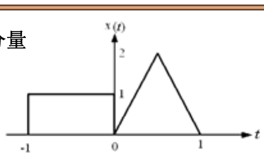
$$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$$

偶分量 奇分量

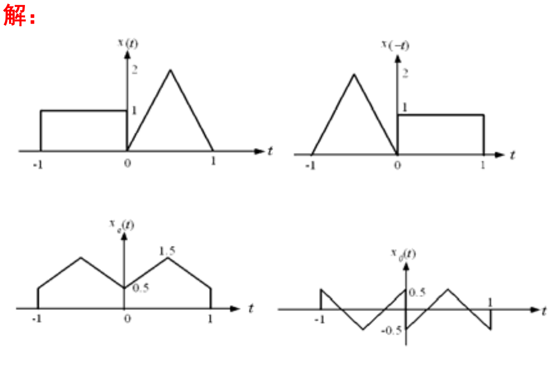
$$x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$$ $$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$$

$$x_e(t)=x_e(-t)$$ $$x_o(t)=-x_o(-t)$$

例3 画出$x(t)$的奇、偶两个分量



解：



3．信号分解为实部分量与虚部分量

$$x(t)=x_r(t)+\mathrm{j}\cdot x_i(t)$$

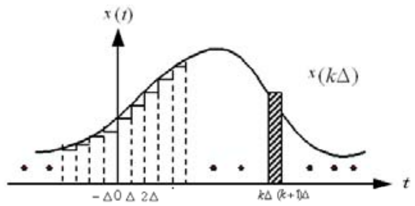
实部分量　**虚部分量**

$$x^*(t)=x_r(t)-\mathrm{j}\cdot x_i(t)$$

$$x_r(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x^*(t)]$$

$$x_i(t)=\frac{1}{2\mathrm{j}}[x(t)-x^*(t)]$$

4. 连续信号分解为冲激函数的线性组合



连续信号表示为冲激信号的迭加

$$x(t)\approx\cdots+x(0)[u(t)-u(t-\Delta)]+x(\Delta)[u(t-\Delta)-u(t-2\Delta)]+\cdots$$
$$+x(k\Delta)[u(t-k\Delta)-u(t-k\Delta-\Delta)]+\cdots$$

$$x(t)\approx\cdots+x(0)\frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta}\Delta+x(\Delta)\frac{u(t-\Delta)-u(t-2\Delta)}{\Delta}\Delta+\cdots$$
$$+x(k\Delta)\frac{u(t-k\Delta)-u(t-k\Delta-\Delta)}{\Delta}\Delta+\cdots$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\frac{u(t-k\Delta)-u(t-k\Delta-\Delta)}{\Delta}\Delta$$

当$\Delta\to 0$时，$k\Delta\to\tau$，$\Delta\to d\tau$，且

$$\frac{u(t-k\Delta)-u(t-k\Delta-\Delta)}{\Delta}\to\delta(t-\tau)$$

$$\therefore\quad x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)*\delta(t)$$

§ 1.4 常见信号的傅里叶变换

1、单边指数信号

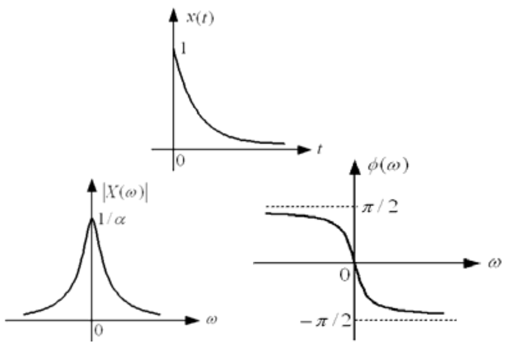
$$x(t)=e^{-\alpha t}u(t),\quad \alpha>0$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-\mathrm{j}\omega t}dt=\left.\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

幅度频谱为 $|X(\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$

相位频谱为 $\phi(\omega)=-arctg\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)$

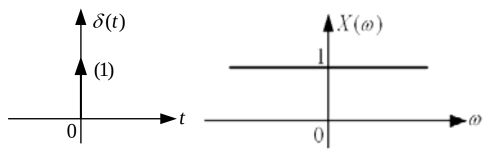
单边指数信号及其幅度频谱与相位频谱



2、单位冲激信号$\delta(t)$

$$\mathrm{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}\Big|_{t=0}\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

单位冲激信号及其频谱



3、直流信号

$$\mathcal{F}[A] = 2\pi A\delta(\omega)$$

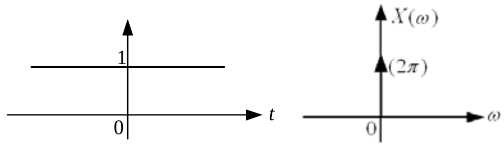
$$\because \quad \mathcal{F}[A] = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-j\omega t} dt$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega t} d\omega \Rightarrow \quad \delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega t} dt$$

$$\therefore \quad \mathcal{F}[A] = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi A\delta(\omega)$$

59 25

直流信号及其频谱



- 对照冲激、直流时频曲线可看出:

  时域持续越宽的信号，其频域的频谱越窄

  时域持续越窄的信号，其频域的频谱越宽

59 26

4、符号函数信号

符号函数定义为： $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$

对σ>0，有：

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)e^{-\sigma|t|}] = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(t)e^{-\sigma|t|}e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (-1)e^{\sigma t}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

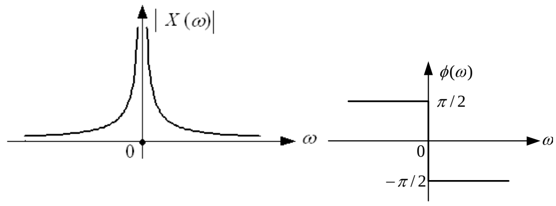
$$= -\frac{e^{(\sigma - j\omega)t}}{\sigma - j\omega}\Bigg|_{t=-\infty}^{0} - \frac{e^{-(\sigma + j\omega)t}}{\sigma + j\omega}\Bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{-1}{\sigma - j\omega} + \frac{1}{\sigma + j\omega}$$

$$\therefore \quad \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] = \lim_{\sigma \to 0}\left\{\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)e^{-\sigma|t|}]\right\} = \frac{-1}{-j\omega} + \frac{1}{j\omega} = \frac{2}{j\omega}$$

59 27

符号函数的幅度频谱和相位频谱

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega}$$



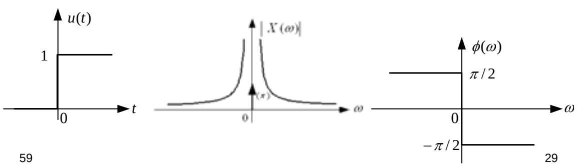
59 28

5、单位阶跃信号$u(t)$

$$u(t) = \frac{1}{2}\{u(t) + u(-t)\} + \frac{1}{2}\{u(t) - u(-t)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

$$\therefore \quad \mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

- **阶跃信号及其频谱**



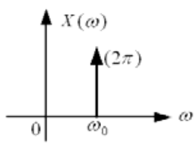
59 29

6、复简谐信号 $e^{j\omega_0 t}(-\infty < t < \infty)$

$$由\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t}dt = 2\pi\delta(\omega)$$

$$得\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t}dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

同理： $\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t}dt = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$

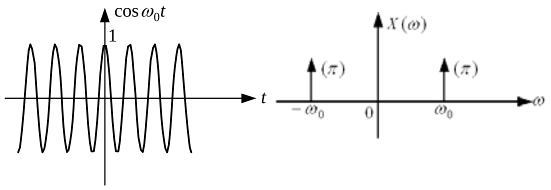


59 30

7、余弦、正弦信号

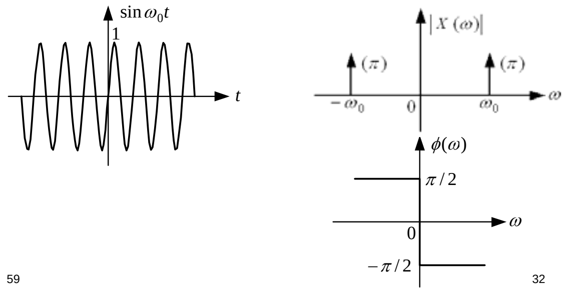
$$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})\longleftrightarrow\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

- **余弦信号及其频谱函数**



$$\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t})\longleftrightarrow -j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$$

- **正弦信号及其频谱函数**



§ 1.5 频谱密度函数的性质

1. 线性特性(linearity)

若$x_1(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X_1(\omega),\quad x_2(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X_2(\omega)$

则 $ax_1(t)+bx_2(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}aX_1(\omega)+bX_2(\omega)$

其中a和b为任意常数

2. 函数下的面积

$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad \Rightarrow \quad x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)d\omega$

$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \quad \Rightarrow \quad X(0)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt$

3. 互易对称特性(duality)

若$x(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X(\omega)$ 则 $X(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}2\pi x(-\omega)$

证：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$-t'$代替t：

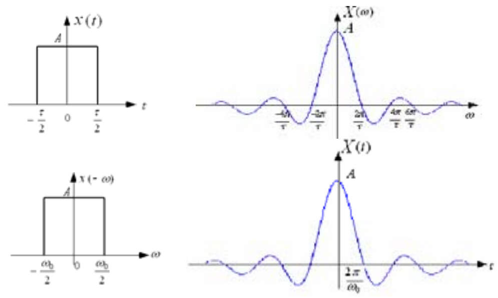
$$2\pi x(-t')=\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{-j\omega t'}d\omega$$

s代替ω：

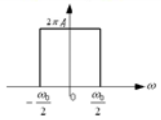
$$2\pi x(-t')=\int_{-\infty}^{\infty}X(s)e^{-jst'}ds$$

ω代替t'，t代替s：

$$2\pi x(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}X(t)e^{-j\omega t}dt$$



$X(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}2\pi x(-\omega)$



4. 展缩特性

若$x(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X(\omega)$ 则$x(at)\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$, $a\neq 0$

证： $F[x(at)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(at)e^{-j\omega t}dt$

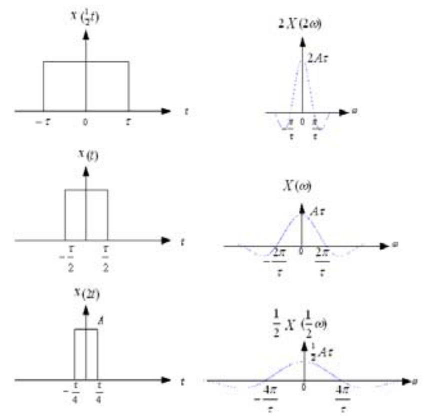
令$\tau=at$，则$d\tau=adt$，代入上式可得

$$a>0\rightarrow F[x(at)]=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau/a}d\tau=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$a<0\rightarrow F[x(at)]=\frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau/a}d\tau=\frac{1}{-a}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau/a}d\tau=\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

时域压缩(a>1)，则频域展宽

时域展宽(a<1)，则频域压缩



$a=-1 \Rightarrow x(-t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(-\omega)$

推论： 若$x(t)$是偶函数：$x(t)=x(-t)$

则其傅里叶变换$X(\omega)$也是偶函数：$X(\omega)=X(-\omega)$

5. 共轭对称特性(symmetry)

若 $x(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ 　则 $x^*(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X^*(-\omega)$

证：$F[x^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt = [\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt]^*$

$= [\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t} dt]^* = X^*(-\omega)$

- $X(\omega)$为复数，可以表示为：

$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\phi(\omega)} = X_R(\omega) + jX_I(\omega)$

- 当$x(t)$为实信号时，

$x(t) = x^*(t)$

$\Rightarrow X(\omega) = X^*(-\omega)$

$\Rightarrow X_R(\omega) = X_R(-\omega)$ 偶函数

$X_I(\omega) = -X_I(-\omega)$ 奇函数

$\therefore |X(\omega)| = |X(-\omega)|$ 偶函数

$\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$ 奇函数

6．时移特性(time shift)

若$x(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ 　则 $x(t-t_0) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$

其中t_0为任意实数

证：$F[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega t} dt$

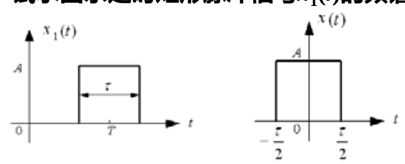
令$\tau = t - t_0$，则$d\tau = dt$，代入上式可得：

$F[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(t_0+\tau)} d\tau$

$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$

信号时移，其频谱函数在频域产生附加相移，而幅度频谱保持不变

例1 试求图示延时矩形脉冲信号$x_1(t)$的频谱函数$X_1(\omega)$



解：无延时且宽度为τ的矩形脉冲信号$x(t)$

对应的频谱函数为 $X(\omega) = A\tau \cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

因为 $x_1(t) = x(t-T)$

由延时特性可得：

$X_1(\omega) = X(\omega) e^{-j\omega T} = A\tau \cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega T}$

7. 频移特性(frequency shift)

若 $x(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$

则 $x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(\omega - \omega_0)$

其中ω_0为任意实数

证：由傅里叶变换定义有：

$F[x(t) \cdot e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt$

$= X(\omega - \omega_0)$

$$\mathcal{F}[x(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[x(t)e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[x(t)e^{-j\omega_0 t}]$$

$$= \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)$$

调制：信号$x(t)$与余弦信号$\cos\omega_0 t$相乘后，其频谱是原来信号频谱向左右搬移ω_0，幅度减半

同理

$$\mathcal{F}[x(t)\sin\omega_0 t] = \frac{1}{2j}\mathcal{F}[x(t)e^{j\omega_0 t}] - \frac{1}{2j}\mathcal{F}[x(t)e^{-j\omega_0 t}]$$

$$= \frac{1}{2j}X(\omega-\omega_0) - \frac{1}{2j}X(\omega+\omega_0)$$

59 43

例2 求矩形脉冲信号$x(t)$与余弦信号$\cos\omega_0 t$相乘后信号的频谱函数

解：已知宽度为τ的矩形脉冲信号对应的频谱函数为

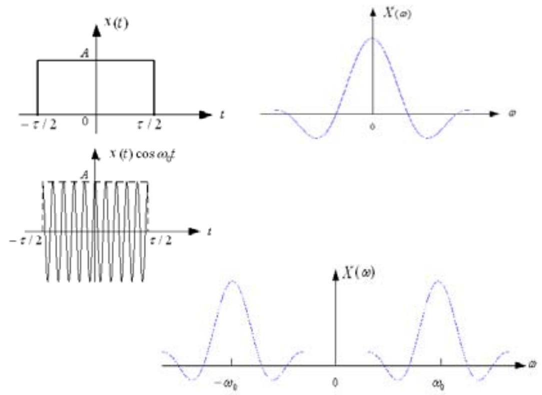
$$X(\omega) = A\tau \cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

应用频移特性可得：

$$\mathcal{F}[x(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)$$

$$= \frac{1}{2}A\tau\left\{Sa\left[\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right] + Sa\left[\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}\right]\right\}$$

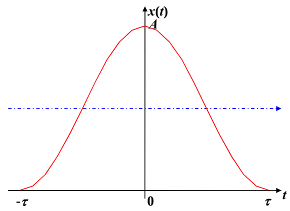
59 44



59 45

例3 计算图示升余弦脉冲信号的频谱函数

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right] & |t| \le \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$



59 46

解：

$$\because \quad x(t) = \frac{A}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right]rect\left(\frac{t}{2\tau}\right) = \frac{A}{2}\left\{1+\frac{1}{2}\left[e^{j\frac{\pi t}{\tau}} + e^{-j\frac{\pi t}{\tau}}\right]\right\}rect\left(\frac{t}{2\tau}\right)$$

$$= \frac{A}{2}rect\left(\frac{t}{2\tau}\right) + \frac{A}{4}e^{j\frac{\pi t}{\tau}}rect\left(\frac{t}{2\tau}\right) + \frac{A}{4}e^{-j\frac{\pi t}{\tau}}rect\left(\frac{t}{2\tau}\right)$$

$$rect\left(\frac{t}{2\tau}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\tau\, Sa(\omega\tau)$$

由频移特性可得：

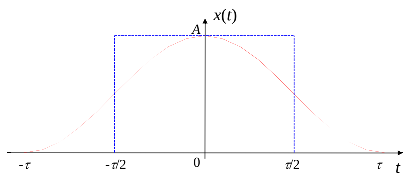
$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{A}{2}2\tau\, Sa(\omega\tau) + \frac{A}{4}2\tau\, Sa\left[\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right] + \frac{A}{4}2\tau\, Sa\left[\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right]$$

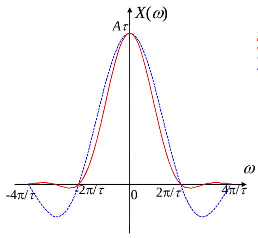
$$= A\tau\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau} + \frac{A\tau}{2}\frac{\sin(\omega\tau-\pi)}{\omega\tau-\pi} + \frac{A\tau}{2}\frac{\sin(\omega\tau+\pi)}{\omega\tau+\pi} = A\frac{\sin\omega\tau}{\omega} - \frac{A}{2}\frac{\sin\omega\tau}{\omega-\pi/\tau} - \frac{A}{2}\frac{\sin\omega\tau}{\omega+\pi/\tau}$$

$$= A\frac{\sin\omega\tau}{\omega}\left[1 - \frac{1}{2(1-\pi/\omega\tau)} - \frac{1}{2(1+\pi/\omega\tau)}\right] = A\frac{\sin\omega\tau}{\omega}\frac{1}{1-(\omega\tau/\pi)^2}$$

$$= A\tau\, Sa(\omega\tau)\frac{1}{1-(\omega\tau/\pi)^2}$$

59 47





连续信号高频成分少
不连续信号高频成分多

主瓣宽度
频谱带宽： $\omega_b = \frac{2\pi}{\tau}$

$B = \frac{1}{\tau}$ (Hz)

59 48

8. 时域卷积特性(Convolution in time)

若 $x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \quad x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

则 $x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$

证：

$$\mathrm{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) [\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) X_2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

时域卷积 ⇒ 频域相乘

56 49

9. 频域卷积特性(Convolution in frequency)

若 $x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \quad x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

则 $x_1(t) \cdot x_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}[X_1(\omega) * X_2(\omega)]$

证：

$$\mathrm{F}[x_1(t) \cdot x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t) \cdot x_2(t)] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} [\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega) \cdot [\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j(\omega-\Omega)t} dt] d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega) X_2(\omega-\Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi}[X_1(\omega) * X_2(\omega)]$$

时域相乘 ⇒ 频域卷积

59 50

例4 求$\cos\omega_0 t \cdot u(t)$和$\sin\omega_0 t \cdot u(t)$的频谱函数

解： $u(t) \xleftrightarrow{F} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \qquad \cos\omega_0 t \xleftrightarrow{F} \pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$

应用频域卷积特性可得：

$$\cos\omega_0 t \cdot u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] * [\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)]\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\delta(\omega) * [\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + \frac{1}{2}\frac{1}{j\omega} * [\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$$

$$= \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \frac{1}{j(\omega+\omega_0)}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

类似： $\sin\omega_0 t \cdot u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$

59 51

10. 时域微分特性(Differentiate in time)

若 $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ **且** $\frac{dx(t)}{dt}$ **存在**

则 $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} (j\omega) \cdot X(\omega)$

证： $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

两边对t求微分：

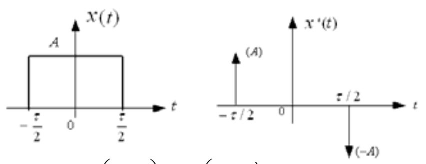
$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega\right]}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

若$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$存在 $\quad \frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n \cdot X(\omega)$

59 52

例5 试利用微分特性求矩形脉冲信号的频谱函数

解：



$$x'(t) = A\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - A\delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\mathrm{F}[x'(t)] = Ae^{j\omega\frac{\tau}{2}} - Ae^{-j\omega\frac{\tau}{2}} = A \cdot 2j\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

利用时域微分特性： $\mathrm{F}[x'(t)] = (j\omega)X(\omega)$

因此有： $X(\omega) = \frac{2A}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = A\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

59 53

11. 频域微分特性(Differentiate in frequency)

若 $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \quad$ 则 $t \cdot x(t) \xleftrightarrow{F} j \cdot \frac{dX(\omega)}{d\omega}$

$$t^n x(t) \xleftrightarrow{F} j^n \cdot \frac{dX^n(\omega)}{d\omega^n}$$

证： $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{d\omega} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [(-jt)x(t)] e^{-j\omega t} dt$$

将上式两边同乘以j得：

$$j\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} [tx(t)] \cdot e^{-j\omega t} dt$$

59 54

例6　试求单位斜坡信号$tu(t)$的傅里叶变换

解：已知单位阶跃信号傅里叶变换为：

$$F[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

利用频域微分特性可得：

$$F[tu(t)] = j\frac{d}{d\omega}[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}]$$

$$= j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

$$F[t^n u(t)] = j^n \pi\delta^{(n)}(\omega) + (-j)^{n+1} n!\,\omega^{-(n+1)}$$

12. 积分特性(integral)

若 $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$

则 $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

证：$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau = x(t)*u(t)$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] = \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

若信号不存在直流分量即$X(0)=0$

则 $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(\omega)$

13. 非周期信号的能量谱密度

能量型信号的能量为：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]^* dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)\cdot X(\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega$$

帕塞瓦尔能量守恒定理

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega$$

表明：

信号能量也可由$|X(\omega)|^2$在整个频率范围的积分乘以$1/2\pi$来计算

物理意义：

非周期能量信号的归一化能量在时域中与在频域中相等，保持能量守恒

傅里叶变换主要性质

线性特性	$ax_1(t) + bx_2(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
对称互易特性	$X(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\, x(-\omega)$
展缩特性	$x(at) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
时移特性	$x(t-t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}$
频移特性	$x(t)\cdot e^{j\omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega-\omega_0)$
时域卷积特性	$x_1(t) * x_2(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$
频域卷积特性	$x_1(t)\cdot x_2(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}[X_1(\omega) * X_2(\omega)]$
时域微分特性	$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{F}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n \cdot X(\omega)$
频域微分特性	$t^n x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} j^n \cdot \frac{dX^n(\omega)}{d\omega^n}$
积分特性	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$