

§ 1.6 能量谱与功率谱

一、能量信号和能量谱

能量信号：能量 E 有限的信号

能量信号的帕塞瓦尔定理：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

定义：能量信号的**能量谱密度函数**(简称**能量谱**)为

$$E(\omega) = |X(\omega)|^2$$

能量谱 $E(\omega)$ 与相位谱无关，只与振幅谱有关

$$\therefore E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) d\omega$$

54

1

二、功率信号和功率谱

功率信号：能量无限、功率 P 有限的信号

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |x(t)|^2 dt < M < \infty$$

为分析功率信号 $x(t)$ 的功率密度谱，将 $x(t)$ 截断为能量信号 $x_{\tau}(t)$ ：

$$x(t) \rightarrow x_{\tau}(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

设能量信号 $x_{\tau}(t)$ 的能量谱为 $E_{\tau}(\omega) = |X_{\tau}(\omega)|^2$

根据能量信号的帕塞瓦尔定理：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\tau}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{\tau}(t)|^2 dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |x(t)|^2 dt$$

54

2

$$\begin{aligned} \therefore P &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\tau}(\omega) d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{E_{\tau}(\omega)}{\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{|X_{\tau}(\omega)|^2}{\tau} d\omega \end{aligned}$$

定义：功率信号的**功率谱密度函数**(简称**功率谱**)为

$$P(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{E_{\tau}(\omega)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{|X_{\tau}(\omega)|^2}{\tau}$$

功率信号的**帕塞瓦尔定理**：

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega$$

54

3

三、周期信号傅里叶变换及其功率谱

1、周期信号傅里叶变换的计算方法

(1)、从周期信号的傅里叶级数出发

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\omega_0 = \frac{2\pi}{T})$$

• 两边同取傅里叶变换：

$$F[x_T(t)] = F\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot F[e^{jn\omega_0 t}]$$

• 根据复简谐信号的傅里叶变换：

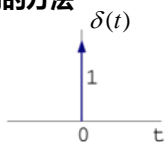
$$F[x_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

54

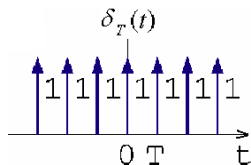
4

(2)、基于冲激函数序列的方法

• 冲激函数： $\delta(t)$



• 冲激函数序列： $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$

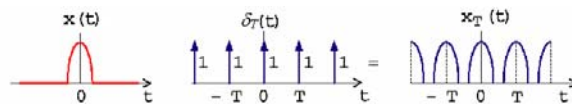


54

5

• 周期信号 $x_T(t)$ 可以表示为：

$$\begin{aligned} x_T(t) &= x(t) * \delta_T(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad \text{其中} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) * \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT) \quad x(t) = \begin{cases} x_T(t) & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \end{aligned}$$



• 根据信号傅里叶变换的性质，有：

$$F[x_T(t)] = F[x(t)]F[\delta_T(t)]$$

54

6

• $\delta_T(t)$ 为周期信号，其傅里叶级数为：

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T}$$

$$\therefore \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

• 两边作傅里叶变换，得：

$$F[\delta_T(t)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F[e^{jk\omega_0 t}] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

54 7

冲激函数序列及其频谱函数

冲激函数序列的频谱是频率域上的冲激函数序列

54 8

$\therefore F[x_T(t)] = F[x(t)]F[\delta_T(t)] = X(\omega)\omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$

$$= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega)\delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0)$$

54 9

• 根据傅里叶级数和傅里叶变换的关系： $C_k = \frac{1}{T} X(k\omega_0)$

$$\therefore F[x_T(t)] = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

54 10

2、周期信号的功率谱

• 周期信号的功率为： $P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt$

54 11

根据周期信号的帕塞瓦尔定理：

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

设周期信号的功率谱密度函数为 $P(\omega)$ ，则有：

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega$$

$$\therefore P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |C_k|^2 \delta(\omega - k\omega_0) d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [|C_k|^2 \delta(\omega - k\omega_0)] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [|C_k|^2 \delta(\omega - k\omega_0)] \right\} d\omega$$

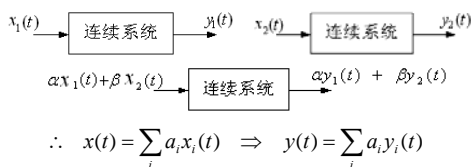
$$\therefore P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 \delta(\omega - k\omega_0)$$

54 12

§ 1.7 确定信号通过线性时不变系统

一、系统的时间-频率表示法

• 线性系统(Linear System):

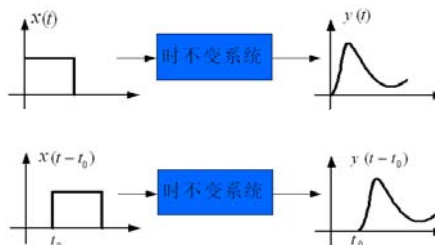


54

13

• 时不变系统(Time-invariant System):

$$x(t) \longrightarrow y(t) \Rightarrow x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$$



54

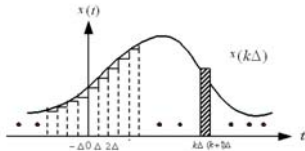
14

• 线性时不变系统:

$$x(t) = \sum_i a_i x_i(t-t_i) \Rightarrow y(t) = \sum_i a_i y_i(t-t_i)$$

提示: 若一个信号可以分解为一系列信号的线性组合, 而且这一系列信号通过线性时不变系统的输出已知, 则很容易推导出该信号通过系统的输出

• 任一连续信号x(t)均可分解为冲激函数的线性组合



54

连续信号表示为冲激信号的叠加

15

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \dots + x(0)[u(t) - u(t-\Delta)] + x(\Delta)[u(t-\Delta) - u(t-2\Delta)] + \dots \\ &\quad + x(k\Delta)[u(t-k\Delta) - u(t-k\Delta-\Delta)] + \dots \\ &\approx \dots + x(0) \frac{u(t) - u(t-\Delta)}{\Delta} + x(\Delta) \frac{u(t-\Delta) - u(t-2\Delta)}{\Delta} + \dots \\ &\quad + x(k\Delta) \frac{u(t-k\Delta) - u(t-k\Delta-\Delta)}{\Delta} + \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \frac{u(t-k\Delta) - u(t-k\Delta-\Delta)}{\Delta} \Delta \end{aligned}$$

当Delta->0时, k*Delta->tau, Delta->d*tau, 且

$$\frac{u(t-k\Delta) - u(t-k\Delta-\Delta)}{\Delta} \rightarrow \delta(t-\tau)$$

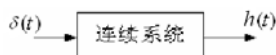
$$\therefore x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t) * \delta(t)$$

54

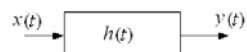
16

结论: 若已知冲激函数delta(t)通过线性时不变系统的输出, 则任一信号通过该系统的输出均可得到

定义: 冲激函数delta(t)通过线性时不变系统的输出h(t)为该系统的冲激响应



• 线性时不变系统的冲激响应h(t)确定, 任一信号通过该系统的输出均可得到



• 线性时不变系统在时间域上可唯一地用冲激响应h(t)来描述

54

17

$$\therefore F[\delta(t)] = 1$$

• 冲激函数delta(t)等价于所有可能频率的等幅度正弦信号的叠加
冲激函数delta(t)作为线性时不变系统的输入, 等价于同时用所有可能频率的等幅度正弦信号测试该系统

$$F[h(t)] = H(\omega)$$

定义: 冲激响应h(t)的傅里叶变换为系统的频率响应H(omega)

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

H(omega)的物理意义:

H(omega)反映系统对输入信号不同频率分量的传输特性

系统受单一频率omega信号激励时, 响应与激励之比定义为H(omega)在该频率omega处的值

54

18

$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$

系统的幅频特性

系统的相频特性

• 线性时不变系统在频率域上可唯一地用频率响应 $H(\omega)$ 来描述

例1 试求图示的RC低通电路系统的 $h(t)$ 和 $H(\omega)$

解: RC电路的微分方程为:

$$\frac{\delta(t) - h(t)}{R} = C \frac{dh(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \delta(t) = RC \frac{dh(t)}{dt} + h(t)$$

54 19

两边作傅里叶变换:

$$\delta(t) = RC \frac{dh(t)}{dt} + h(t) \Rightarrow 1 = RC j\omega H(\omega) + H(\omega)$$

$$\therefore H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j\omega RC} e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

若令: $a = \frac{1}{RC}$

$$H(\omega) = \frac{a}{a + j\omega} \quad h(t) = a e^{-at} u(t)$$

54 20

$$H(\omega) = \frac{a}{a + j\omega} \Rightarrow |H(\omega)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

RC电路系统的幅频响应

随着频率增加, 系统的幅频响应 $|H(\omega)|$ 不断减小, 说明信号频率越高, 信号通过该系统的损耗也就越大

因 $|H(a)|=0.707$, 将 $\omega_c=a=1/RC$ 称为该系统的3 dB截止频率

54 21

二、时间域求解法

• 任一信号 $x(t)$ 可分解为 $\delta(t)$ 的组合

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) * \delta(t)$$

实际应用:

当求解信号通过系统产生的响应时, 只需求解冲激信号通过该系统产生的响应 $h(t)$, 然后利用线性时不变系统的特性, 进行迭加和延时即可求得信号 $x(t)$ 产生的响应

$$\delta(t) \Rightarrow h(t)$$

$$x(t - \tau) \Rightarrow h(t - \tau) \quad x(\tau) \delta(t - \tau) \Rightarrow x(\tau) h(t - \tau)$$

54 22

求解信号通过线性时不变系统输出的示意图

	$x(t)$		$y(t)$
Definition	$\delta(t)$	→ CT LTI →	$h(t)$
Time invariance	$\delta(t - k)$	→ CT LTI →	$h(t - k)$
Scaling	$x(k) \delta(t - k)$	→ CT LTI →	$x(k) h(t - k)$
Superposition	$\sum_k x(k) \delta(t - k)$	→ CT LTI →	$\sum_k x(k) h(t - k)$

54 23

求解信号通过线性时不变系统输出的示意图

	$x(t)$		$y(t)$
Definition		→ CT LTI →	
Time invariance		→ CT LTI →	
Scaling		→ CT LTI →	
Superposition		→ CT LTI →	

54 24

$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \frac{u(t-k\Delta) - u(t-k\Delta-\Delta)}{\Delta} \Delta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t-k\Delta) \Delta$$

$\Rightarrow y(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) h_{\Delta}(t-k\Delta) \Delta$

当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, $k\Delta \rightarrow \tau$, $\Delta \rightarrow d\tau$, 且 $\delta_{\Delta}(t-k\Delta) \rightarrow \delta(t-\tau)$, $h_{\Delta}(t-k\Delta) \rightarrow h(t-\tau)$

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = x(t) * h(t)$

54 25

例2 试求图示方波通过RC低通电路系统的输出

解: 例1中已求出RC电路系统的冲激响应为:

$$h(t) = ae^{-at}u(t), \quad a = \frac{1}{RC}$$

确定性信号通过线性时不变系统输入与输出的时域关系为:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

54 26

当 $t < 0$ 时,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = 0$$

当 $0 \leq t \leq T$ 时,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t Aae^{-a(t-\tau)} d\tau = Ae^{-at} \int_0^t ae^{a\tau} d\tau = Ae^{-at} e^{a\tau} \Big|_0^t = Ae^{-at} (e^{at} - 1) = A(1 - e^{-at})$$

当 $t > T$ 时,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^T Aae^{-a(t-\tau)} d\tau = Ae^{-at} \int_0^T ae^{a\tau} d\tau$$

54 27

$$= Ae^{-at} e^{aT} \Big|_0^T = Ae^{-at} (e^{aT} - 1)$$

$$\therefore y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A(1 - e^{-at}) & 0 \leq t \leq T \\ Ae^{-at} (e^{aT} - 1) e^{-a(t-T)} & t > T \end{cases}$$

54 28

三、频率域求解法

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

两边作傅里叶变换:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

确定性信号通过线性时不变系统:

时域卷积、频域相乘

1. 级联系统的冲激响应

54 29

$$z(t) = x(t) * h_1(t)$$

$$y(t) = z(t) * h_2(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$$

根据卷积积分的结合律性质, 有

$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = x(t) * h(t)$$

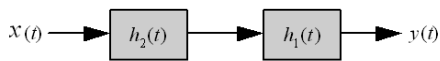
结论:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

1) 级联系统的冲激响应等于两个子系统冲激响应的卷积

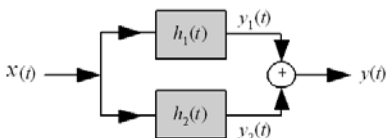
54 30

2) 交换两个级联系统的先后连接次序不影响系统总的冲激响应



$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$

2. 并联系统的冲激响应



54

31

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$

$$y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

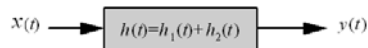
应用卷积积分的分配律性质, 有

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h(t)$$



结论: $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

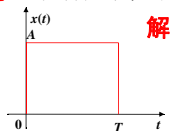
并联系统的冲激响应等于两个子系统冲激响应之和



54

32

例3 用频率法求解方波通过RC低通电路系统的输出



解: 例1中已求出RC电路系统的频率响应为:

$$H(\omega) = \frac{a}{a + j\omega}, \quad a = \frac{1}{RC}$$

$$x(t) = A \text{rect} \left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T} \right) \Rightarrow X(\omega) = ATSa \left(\frac{\omega T}{2} \right) e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

确定性信号通过线性时不变系统输入与输出的频域关系为:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{a}{a + j\omega} AT \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2} e^{-j\omega T / 2}$$

$$= \frac{2Aa}{(a + j\omega)\omega} \cdot \frac{1}{2j} (e^{j\omega T / 2} - e^{-j\omega T / 2}) e^{-j\omega T / 2}$$

54

33

$$= \frac{Aa}{(a + j\omega)j\omega} \cdot (1 - e^{-j\omega T})$$

$$\text{令: } Y_1(\omega) = \frac{Aa}{(a + j\omega)j\omega} \xrightarrow{F} y_1(t)$$

$$\text{则: } Y(\omega) = Y_1(\omega)(1 - e^{-j\omega T}) = Y_1(\omega) - Y_1(\omega)e^{-j\omega T}$$

$$\xrightarrow{F} y(t) = y_1(t) - y_1(t - T)$$

$$\therefore Y_1(\omega) = \frac{Aa}{(a + j\omega)j\omega} = A \left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{a + j\omega} \right)$$

$$\frac{2}{j\omega} \xrightarrow{F} \text{Sgn}(t), \quad \frac{1}{a + j\omega} \xrightarrow{F} e^{-at}u(t)$$

$$\therefore y_1(t) = \frac{A}{2} \text{Sgn}(t) - Ae^{-at}u(t) = \begin{cases} -A/2 & t < 0 \\ -Ae^{-at} + A/2 & t > 0 \end{cases}$$

54

34

$$\Rightarrow y_1(t - T) = \begin{cases} -A/2 & t < T \\ -Ae^{-a(t-T)} + A/2 & t > T \end{cases}$$

当 $t < 0$ 时,

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t - T) = (-A/2) - (-A/2) = 0$$

当 $0 \leq t \leq T$ 时,

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t - T) = (-Ae^{-at} + A/2) - (-A/2)$$

$$= A - Ae^{-at} = A(1 - e^{-at})$$

当 $t > T$ 时,

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t - T) = (-Ae^{-at} + A/2) - [-Ae^{-a(t-T)} + A/2]$$

$$= Ae^{-a(t-T)} - Ae^{-at} = A(e^{aT} - 1)e^{-at}$$

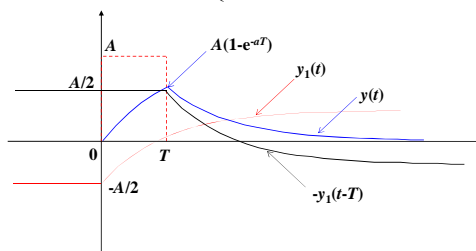
$$\therefore y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A(1 - e^{-at}) & 0 \leq t \leq T \\ A(e^{aT} - 1)e^{-at} & t > T \end{cases}$$

54

35

$$y_1(t) = \begin{cases} -A/2 & t < 0 \\ -Ae^{-at} + A/2 & t > 0 \end{cases} \quad y_1(t - T) = \begin{cases} -A/2 & t < T \\ -Ae^{-a(t-T)} + A/2 & t > T \end{cases}$$

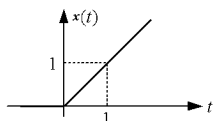
$$y(t) = y_1(t) - y_1(t - T) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A(1 - e^{-at}) & 0 \leq t \leq T \\ A(e^{aT} - 1)e^{-at} & t > T \end{cases}$$



54

36

例4 求解斜坡信号通过RC低通电路系统的输出



解：例1中已求出RC电路系统的冲激响应为：

$$h(t) = ae^{-at}u(t), \quad a = \frac{1}{RC}$$

例1中求出RC电路系统的频率响应为： $H(\omega) = \frac{a}{a + j\omega}$

$$x(t) = tu(t) \Rightarrow X(\omega) = -\frac{1}{\omega^2} + j\pi\delta'(\omega)$$

(一)、时间域求解法：

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau u(\tau) ae^{-a(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

$$= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t a \tau e^{-a\tau} e^{-a(t-\tau)} d\tau = e^{-at} \left[\tau e^{a\tau} \Big|_0^t - \int_0^t e^{a\tau} d\tau \right] & t > 0 \end{cases}$$

54

37

$$= u(t)e^{-at} \left(te^{at} - \frac{1}{a} e^{a\tau} \Big|_0^t \right) = u(t)e^{-at} \left(te^{at} - \frac{1}{a} e^{at} + \frac{1}{a} \right)$$

$$= u(t) \left(t - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} e^{-at} \right)$$

(二)、频率域求解法：

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \left[-\frac{1}{\omega^2} + j\pi\delta'(\omega) \right] \frac{a}{a + j\omega}$$

$$= \frac{a}{a + j\omega} \frac{1}{(j\omega)^2} + j \frac{a\pi}{a + j\omega} \delta'(\omega)$$

$$\frac{A}{a + j\omega} - \frac{B}{j\omega} + \frac{C}{(j\omega)^2} = \frac{-A\omega^2 - B(a + j\omega)j\omega + C(a + j\omega)}{(a + j\omega)(j\omega)^2}$$

$$= \frac{-A\omega^2 - Baj\omega + B\omega^2 + Ca + Cj\omega}{(a + j\omega)(j\omega)^2} = \frac{a}{a + j\omega} \frac{1}{(j\omega)^2}$$

54

38

$$\Rightarrow \begin{cases} -A + B = 0 \\ -Ba + C = 0 \\ Ca = a \end{cases} \quad \text{解出：} \quad \begin{cases} A = 1/a \\ B = 1/a \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{a}{a + j\omega} \frac{1}{(j\omega)^2} = \frac{1}{a(a + j\omega)} - \frac{1}{aj\omega} + \frac{1}{(j\omega)^2}$$

$$\therefore \delta(\omega) = -\omega\delta'(\omega)$$

$$\therefore j \frac{a\pi}{a + j\omega} \delta'(\omega) = j \frac{\pi[(a + j\omega) - j\omega]}{a + j\omega} \delta'(\omega)$$

$$= j \frac{\pi(a + j\omega)}{a + j\omega} \delta'(\omega) - j \frac{j\pi\omega}{a + j\omega} \delta'(\omega)$$

$$= j\pi\delta'(\omega) + \frac{\pi}{a + j\omega} \omega \delta'(\omega)$$

$$= j\pi\delta'(\omega) - \frac{\pi}{a + j\omega} \delta(\omega) = j\pi\delta'(\omega) - \frac{\pi}{a} \delta(\omega)$$

54

39

$$Y(\omega) = \frac{a}{a + j\omega} \frac{1}{(j\omega)^2} + j \frac{a\pi}{a + j\omega} \delta'(\omega)$$

$$= \frac{1}{a(a + j\omega)} - \frac{1}{aj\omega} + \frac{1}{(j\omega)^2} + j\pi\delta'(\omega) - \frac{\pi}{a} \delta(\omega)$$

$$= \frac{1}{a(a + j\omega)} - \frac{1}{a} \left[\pi\delta'(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] + \left[-\frac{1}{\omega^2} + j\pi\delta'(\omega) \right]$$

$$\therefore y(t) = \frac{1}{a} e^{-at} u(t) - \frac{1}{a} u(t) + tu(t)$$

$$= u(t) \left[t - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} e^{-at} \right]$$

两种方法结论完全一致

本例频率域求解法比较复杂

54

40

四、无失真传输与理想滤波器

1、无失真传输系统

• **定义：**

若无失真传输系统的输入信号为 $x(t)$ ，则输出信号 $y(t)$ 应为

$$y(t) = K \cdot x(t - t_d)$$

其中 K 为常数， t_d 是输入信号通过系统后的延迟时间

• 无失真传输系统的频域特性

$$y(t) = K \cdot x(t - t_d) \Rightarrow Y(\omega) = KX(\omega)e^{-j\omega t_d}$$

$$\therefore H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = K \cdot e^{-j\omega t_d}$$

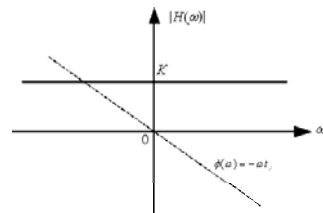
其幅度响应和相位响应分别为

$$|H(\omega)| = K \quad \phi(\omega) = -\omega t_d$$

54

41

无失真传输系统的幅度和相位响应



• 无失真传输系统应满足两个条件：

(1) 系统幅频响应 $|H(\omega)|$ 在整个频率范围内为常数 K ，即系统的带宽为无穷大

(2) 系统相位响应 $\phi(\omega)$ 在整个频率范围内应与 ω 成正比，即线性相位

54

42

• 无失真传输系统的时域特性

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_d} \Rightarrow h(t) = K \cdot \delta(t - t_d)$$

例5 已知一LTI系统的频率响应为 $H(\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$

求系统的幅度响应 $|H(\omega)|$ 和相位响应 $\phi(\omega)$ ，并判断系统是否为无失真传输系统

解: 因为 $H(\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega} = \frac{(1-j\omega)^2}{1+\omega^2} = \frac{1-\omega^2-2j\omega}{1+\omega^2}$

$$= \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2} - j \frac{2\omega}{1+\omega^2} = e^{-j \tan^{-1} \left(\frac{2\omega}{1-\omega^2} \right)} = e^{-j2 \tan^{-1}(\omega)}$$

这里利用 $\tan \theta = \omega \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \frac{2 \sin \theta / \cos \theta}{1 - \sin^2 \theta / \cos^2 \theta}$

$$= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2\omega}{1 - \omega^2}$$

54

43

所以系统的幅度响应和相位响应分别为

$$|H(\omega)| = 1 \quad \phi(\omega) = -2 \tan^{-1}(\omega)$$

系统的幅度响应 $|H(\omega)|$ 为常数，但相位响应 $\phi(\omega)$ 不是 ω 的线性函数，所以系统不是无失真传输系统

2、理想滤波器

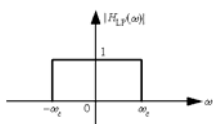
• **定义:** 系统输出信号的频谱和输入信号的频谱将有不同，系统的这种对输入信号频谱改变的作用，称为**滤波**

滤波器是指：能使信号的一部分频率通过，而使另一部分频率不通过(或通过很少)的系统

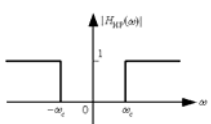
• **理想滤波器:** 在滤波器的通带内所有频率成分均可无失真通过，而通带外的频率成分则被完全衰减掉

理想滤波器的频响特性

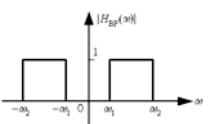
理想低通(Low-Pass Filter)



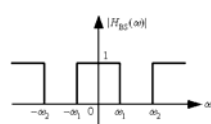
理想高通(High-Pass Filter)



理想带通(Band-Pass Filter)



理想带阻(Band-Stop Filter)

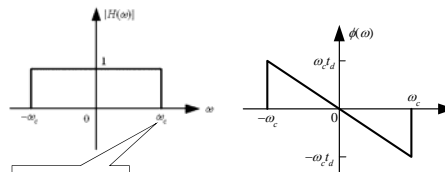


54

45

理想低通滤波器

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} = \text{rect} \left(\frac{\omega}{2\omega_c} \right) e^{-j\omega t_d}$$



截止角频率

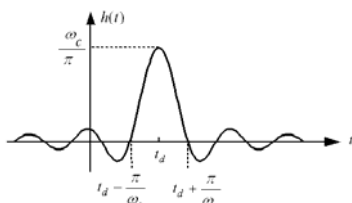
幅频响应 $|H(\omega)|$ 在通带 $0 \sim \omega_c$ 恒为1，在通带之外为0
相频响应 $\phi(\omega)$ 在通带内与 ω 成线性关系

46

3、理想低通滤波器的冲激响应

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_d} e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_d)} dt$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(t-t_d)]}{\omega_c(t-t_d)} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t-t_d)]$$



54

47

理想低通滤波器冲激响应分析

(1) $h(t)$ 的波形是一个取样函数，不同于输入信号 $\delta(t)$ 的波形，有失真

原因: 理想低通滤波器是一个带限系统，而冲激信号 $\delta(t)$ 的频带宽度为无穷大

减小失真方法: 增加理想低通截止频 ω_c

$h(t)$ 的主瓣宽度为 $2\pi/\omega_c$

ω_c 越小，失真越大

当 $\omega_c \rightarrow \infty$ 时，理想低通变为无失真传输系统， $h(t)$ 也变为冲激函数

(2) $h(t)$ 主峰出现时刻 $t=t_d$ 比输入信号 $\delta(t)$ 作用时刻 $t=0$ 延迟了一段时间 t_d

t_d 是理想低通滤波器相位特性的斜率

(3) $h(t)$ 在 $t < 0$ 时也存在输出，可见理想低通滤波器是一个非因果系统，因而它是一个物理不可实现的系统

4、理想低通滤波器的阶跃响应

$$Fu(t) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) e^{-j\omega t_d}$$

$$\therefore Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) e^{-j\omega t_d}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] e^{-j\omega t_d} e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \pi\delta(\omega) e^{-j\omega t_d} e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_d} e^{j\omega t} d\omega$$

54

49

$$= \frac{1}{2} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \delta(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\cos \omega(t-t_d)}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{j \sin \omega(t-t_d)}{j\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2j\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\cos \omega(t-t_d)}{\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin \omega(t-t_d)}{\omega} d\omega$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega \text{ 为奇函数} \\ \cos \omega \text{ 为偶函数} \\ \sin \omega \text{ 为奇函数} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\cos \omega(t-t_d)}{\omega} \text{ 为 } \omega \text{ 的奇函数} \\ \frac{\sin \omega(t-t_d)}{\omega} \text{ 为 } \omega \text{ 的偶函数} \end{cases}$$

$$\therefore y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin \omega(t-t_d)}{\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin \omega(t-t_d)}{\omega(t-t_d)} d[\omega(t-t_d)]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_d)} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_d)} \text{Sa}(x) dx$$

54

50

• 定义：正弦积分(可用数值方法制成标准函数表)

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \text{Sa}(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t-t_d)]$$

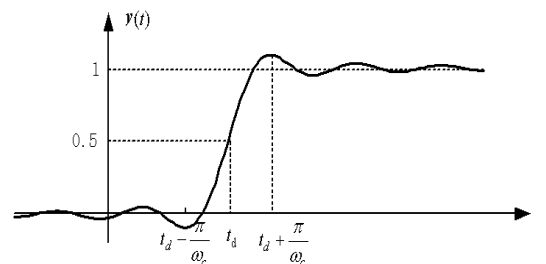
$$\therefore \begin{cases} \text{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2} \\ \text{Si}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

54

51

理想低通滤波器的阶跃响应



54

52

理想低通滤波器阶跃响应分析

(1) 阶跃响应 $y(t)$ 比输入阶跃信号 $u(t)$ 延迟 t_d
 t_d 是理想低通滤波器相位特性的斜率

(2) 阶跃响应的建立需要一段时间

阶跃响应从最小值上升到最大值所需时间称为阶跃响应的上升时间 t_r

$$t_r = 2\pi/\omega_c = 1/f_c$$

上升时间 t_r 与理想低通截止频率 ω_c 成反比

ω_c 越大，上升时间 t_r 越短

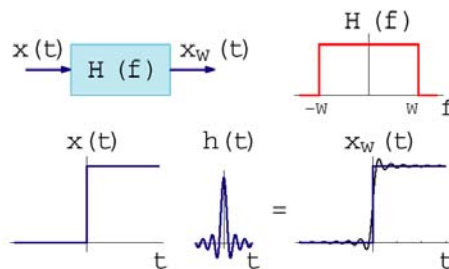
当 $\omega_c \rightarrow \infty$ (无失真传输系统)时， $t_r \rightarrow 0$

上升时间也可定义为：输出最终值的10%到90%所需的时间

54

此时有： $t_r = 0.44/f_c$

(3) 存在 Gibbs现象，即在间断点前后出现振荡，其振荡的最大峰值约为阶跃突变值的9%左右，且不随滤波器带宽的增加而减小



54

54