窄带信号：

$$x(t)=a(t)\cos(\omega_0 t+\theta) \quad \rightarrow \quad \hat{x}(t)=a(t)\sin(\omega_0 t+\theta)$$

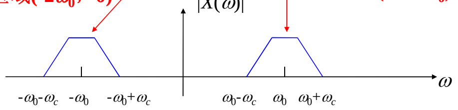
窄带信号的H变换只需对快变化的载波进行H变换

证： **为简便起见，令：** $\theta=0 \quad \rightarrow \quad x(t)=a(t)\cos\omega_0 t$

$$\therefore \quad X(\omega)=\frac{1}{2\pi}A(\omega)*[\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$=\frac{1}{2}A(\omega+\omega_0)+\frac{1}{2}A(\omega-\omega_0)$$

存在区域(-2ω_0，0)　　存在区域(0，2ω_0)



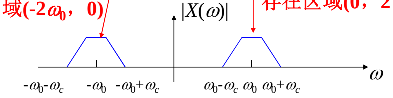
H变换： $H(\omega)=-jSgn(\omega)$

$$\therefore \quad \hat{x}(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X_H(\omega)=\frac{1}{2}jA(\omega+\omega_0)-\frac{1}{2}jA(\omega-\omega_0)$$

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_H(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}j[A(\omega+\omega_0)-A(\omega-\omega_0)]e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{j}{4\pi}\left[\int_{-2\omega_0}^{0}A(\omega+\omega_0)e^{j\omega t}d\omega-\int_{0}^{2\omega_0}A(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega\right]$$

存在区域(-2ω_0，0)　　存在区域(0，2ω_0)



第一项令：$\omega'=\omega+\omega_0 \quad \rightarrow \quad d\omega'=d\omega$

第二项令：$\omega'=\omega-\omega_0 \quad \rightarrow \quad d\omega'=d\omega$

$$\hat{x}(t)=\frac{j}{4\pi}\left[\int_{-\omega_0}^{\omega_0}A(\omega')e^{j(\omega'-\omega_0)t}d\omega'-\int_{-\omega_0}^{\omega_0}A(\omega')e^{j(\omega'+\omega_0)t}d\omega'\right]$$

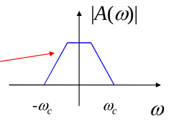
$$=\frac{j}{4\pi}\left[e^{-j\omega_0 t}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}A(\omega')e^{j\omega' t}d\omega'-e^{j\omega_0 t}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}A(\omega')e^{j\omega' t}d\omega'\right]$$

$$=\frac{j}{4\pi}(e^{-j\omega_0 t}-e^{j\omega_0 t})\int_{-\omega_0}^{\omega_0}A(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{j}{4\pi}(-2j\sin\omega_0 t)\int_{-\omega_0}^{\omega_0}A(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\sin\omega_0 t\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]$$

$$=a(t)\sin\omega_0 t$$



原因：　$\omega_c<\omega_0$

$$\therefore \quad \hat{x}(t)=a(t)\sin\omega_0 t$$

同样可以推导出：

$$x(t)=a(t)\sin\omega_0 t \quad \rightarrow \quad \hat{x}(t)=-a(t)\cos\omega_0 t$$

当θ为非零常数时：

$$x(t)=a(t)\cos(\omega_0 t+\theta)=a(t)\cos\omega_0 t\cos\theta-a(t)\sin\omega_0 t\sin\theta$$

$$=[a(t)\cos\theta]\cos\omega_0 t-[a(t)\sin\theta]\sin\omega_0 t$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}(t)=[a(t)\cos\theta]\sin\omega_0 t+[a(t)\sin\theta]\cos\omega_0 t$$

$$=a(t)\sin\omega_0 t\cos\theta+a(t)\cos\omega_0 t\sin\theta$$

$$=a(t)\sin(\omega_0 t+\theta)$$

当$\theta(t)$相对$\cos\omega_0 t$是慢变化信号时：

$$x(t)=a(t)\cos[\omega_0 t+\theta(t)]=a(t)\cos\omega_0 t\cos\theta(t)-a(t)\sin\omega_0 t\sin\theta(t)$$

$$=[a(t)\cos\theta(t)]\cos\omega_0 t-[a(t)\sin\theta(t)]\sin\omega_0 t$$

只要频谱限制在$|\omega|\le\omega_0$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}(t)=[a(t)\cos\theta(t)]\sin\omega_0 t+[a(t)\sin\theta(t)]\cos\omega_0 t$$

$$=a(t)\sin\omega_0 t\cos\theta(t)+a(t)\cos\omega_0 t\sin\theta(t)$$

$$=a(t)\sin[\omega_0 t+\theta(t)]$$

第二章 随机信号分析

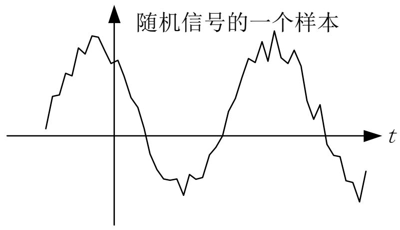
随机信号(Stochastic Signals)：

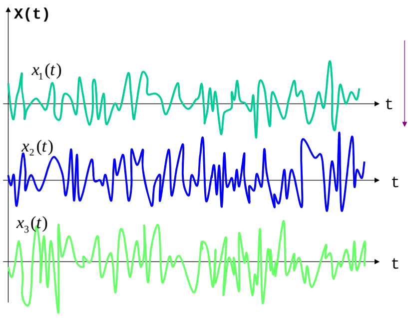
也称为不确定信号，不是时间的确定函数

给定某一时间，信号值是随机的
信号未来值不能用准确的时间函数式来描述
信号未来值无法准确预测
相同的条件下也不能准确地重现信号

- **随机信号未来值随时间推移，是随机变化的，只能用概率分布来描述，或用统计平均值来表征，所以又称统计时间信号**
- 语音信号、生物电信号、地震信号等均为随机信号

§ 2.1 随机信号的统计分布描述



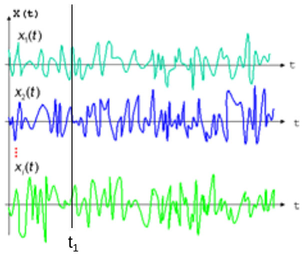


全部可能观测到的波形记录称为“样本空间”或“集合”

样本空间中的每个波形记录称为“样本函数”或“实现”

- 所有可能出现的样本函数组成一个集合：$\{x_n(t)\}$或$X(t)$
- 分析集合$\{x_n(t)\}$ → 随机信号的统计特性

一、随机信号的一维和二维分布



随机信号$X(t)$在t_1时刻的状态为$X(t_1)$(一维随机变量)

$X(t_1)=x_i(t_1)$

- 设$X(t_1)$的取值小于x_1的概率为$P[X(t_1)\le x_1]$
- $P[X(t_1)\le x_1]$是x_1和t_1的函数，记为：

$$F_1(x_1;t_1)=P[X(t_1)\le x_1]$$

- 定义$F_1(x_1;\ t_1)$为随机信号$X(t)$在t_1时刻的一维分布函数(one dimension distribution function)
- **为描述连续随机变量取各个可能值的概率的大小，求落入x与$x+\Delta x$之间的概率$P[x\le X(t_1)<x+\Delta x]$是有意义的**
- **定义** $$p_1(x_1;t_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P[x_1\le X(t_1)<x_1+\Delta x]}{\Delta x}=\frac{\partial F_1(x_1;t_1)}{\partial x_1}$$

表示随机变量落入极小区间的平均概率，即概率密度函数(probability density function, PDF)，简称概率密度

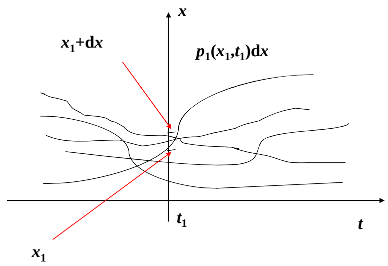
因为它是在t_1时刻观察随机信号所取得的结果，所以又称之为$X(t)$的一维概率密度

- 按连续随机信号定义，在$-\infty<t<+\infty$区间存在无穷多个随机变量，所以随机信号同时是状态x和时间t的函数，常用概率密度函数$p(x,t)$来描述其统计特性

- **一维分布函数和概率密度函数的关系可表示为：**

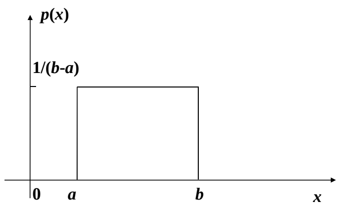
$$F_1(x,t)=P[X(t)<x]=\int_{-\infty}^{x}p_1(\eta,t)d\eta \qquad p_1(x,t)=\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x}$$

物理意义：t_1时刻随机变量穿过x_1~x_1+dx狭缝的概率



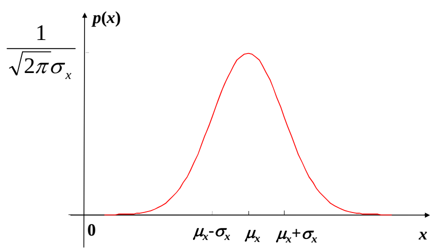
- **几种常见的一维概率密度函数：**
  - **均匀分布：随机变量在区间$[a，b]$取值的概率相等**

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$



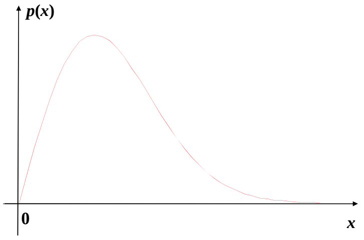
- **高斯(Gaussian)分布，又称正态分布：**

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$



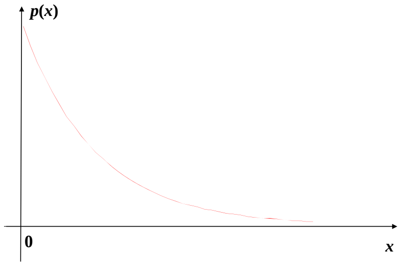
◆ **瑞利(Rayleigh)分布：**

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right) & x\ge 0\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

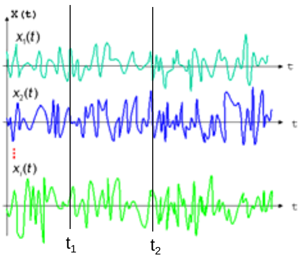


◆ **指数分布：**

$$p(x)=\begin{cases}ae^{-ax} & x\ge 0, a>0\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$



- **以上仅在t_1时刻观察和描述随机信号$X(t)$**
- **只用一维分布函数(或概率密度函数)来表征随机信号的统计特性**是不全面的，**不能反映随机信号在各个时刻的内在联系**
- **考察随机信号在两个时刻t_1和t_2的联系**



随机信号$X(t)$在t_1和t_2时刻的状态分别为$X(t_1)$和$X(t_2)$

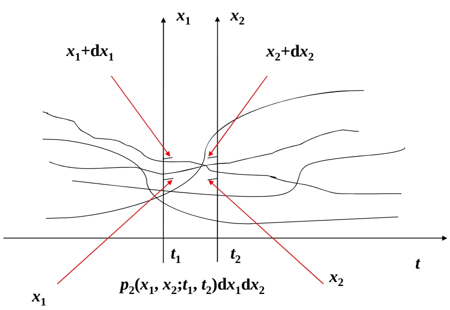
- 设$X(t_1)$的取值小于x_1且$X(t_2)$的取值小于x_2的联合概率为$P[X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2]$
- $P[X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2]$是$x_1$、$x_2$和$t_1$、$t_2$的函数，记为：

$$F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=P[X(t_1)\le x_1 \text{ and } X(t_2)\le x_2]$$

- 定义$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$为随机信号$X(t)$在t_1和t_2时刻的二维分布函数(two dimension distribution function)
- **定义**

$$p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=\lim_{\Delta x_1\to 0,\Delta x_2\to 0}\frac{P[x_1\le X(t_1)<x_1+\Delta x_1 \text{ and } x_2\le X(t_2)<x_2+\Delta x_2]}{\Delta x_1\Delta x_2}$$
$$=\frac{\partial^2 F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1\partial x_2}$$

为$X(t)$的二维概率密度函数



物理意义：随机变量t_1时刻穿过x_1~x_1+dx_1狭缝且t_2时刻穿过x_2~x_2+dx_2狭缝的概率

二、随机信号的n维分布

- **一般用足够多时刻t_1、t_2、…、t_n来定义n个随机变量$X(t_1)$、$X(t_2)$、…、$X(t_n)$**
- **用n维联合分布函数(joint distribution function)来描述：**

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=P[X(t_1)\le x_1 \text{ and } X(t_2)\le x_2 \text{ and}\cdots\text{and } X(t_n)\le x_n]$$

- **随机信号$X(t)$的n维联合概率密度函数 (joint probability density function)为**

$$p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{\partial^n F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}$$

- **n越大，用n维PDF描述随机信号的统计特性越全面**
- **实际中为简便起见，往往只考虑一阶和二阶概率密度函数**

三、平稳随机信号

- **随机信号可以分为：平稳(stationary)随机信号和非平稳(non-stationary)随机信号**
- **平稳随机信号：随机信号的统计特性与开始进行统计分析的时刻无关**
- **对于n维联合分布函数和概率密度函数，有：**

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n) = F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

$$p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n) = p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

§ 2.2 随机信号的平均表征

一、随机信号的集平均表征量

1、均值(mean value)：数学期望(mathematical expectation)、一阶原点矩(moment about origin)

- 随机信号$X(t)$的所有样本函数, 在同一时刻t的取值$x=X(t)$是一随机变量，其统计平均值称为集平均，简称均值
- 若x的概率密度函数为$p(x,t)$，则随机信号的均值为:

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,t)dx = a(t)$$

- 若随机信号是平稳的，⇒x的概率密度函数$p(x,t)$与时间无关，记为$p(x)$，则随机信号的均值为常数:

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = a$$

- 若随机信号的幅度是离散的，取值为x_n的概率为$P(x_n,t)$，则它的均值为:

$$E[X(t)] = \sum_n x_n P(x_n,t) = a(t)$$

- 对平稳随机信号，类似有:

$$E[X(t)] = \sum_n x_n P(x_n) = a$$

2、均方值(mean square value)：二阶原点矩

- 随机信号$X(t)$的所有样本函数, 在同一时刻t的取值x的平方的统计平均值称为均方值

$$E[|X(t)|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 \ p(x,t)dx$$

3、方差(variance)：二阶中心矩

- **方差说明随机信号各可能值对其平均值的偏离程度, 是随机信号在均值上下起伏程度的一种度量**
- **方差定义为可能值偏离其平均值的平方的数学期望：**

$$D[X(t)] = E[|X(t)-a(t)|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-a(t)|^2 \ p(x,t)dx$$

- **方差的平方根称为随机信号的标准差(standard deviation)，** 也称均方差或一阶中心矩

$$\sigma(t) = \sqrt{D[X(t)]}$$

- 对平稳随机信号，有:

$$D[X(t)] = E[|X(t)-a|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-a|^2 \ p(x)dx = \sigma^2$$

- 物理意义:

若$X(t)$代表1欧姆电阻上的噪声电压，则:

- 数学期望的平方等效于某一时刻消耗在电阻上的直流功率
- 均方值表示消耗在电阻上的瞬时功率统计平均值
- 方差代表消耗在电阻上的瞬时交流功率统计平均值

- 二阶中心矩(方差)为概率分布的离散程度提供一种度量，用来描述随机过程偏离均值的离散程度
- 可以推想：为更全面掌握随机信号的统计特性，二阶以上的高阶中心矩则从其它方面，如分布函数的对称性(三阶中心矩)、分布曲线的快慢等来描述随机过程的数字特征

4、自相关函数(autocorrelation function)

- **自相关函数**(二阶混合原点矩) **：表征一个随机信号在任意两个时刻t_1、t_2的状态间的相关程度**
- **设$p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$为相应的二维概率密度函数，则$X(t)$的自相关函数为：**

$$R_x(t_1,t_2) = E[X(t_1)X^*(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2^* p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

- 对平稳随机信号，有:

$$R_x(t_1,t_2) = R_x(t,t-\tau) = R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2^* p_2(x_1,x_2;\tau)dx_1dx_2$$

其中$\tau=t_1-t_2$

平稳随机信号的自相关函数只与相对时间间隔τ有关，与时间起点无关

• 当τ=0时，随机信号的自相关值即其均方值：

$$R_x(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} xx^* p(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\ p(x)dx=E[|X(t)|^2]$$

表示随机信号的平均功率

5、互相关函数(cross-correlation function)

• 互相关函数：表征两个随机信号分别在两个时刻t_1、t_2的状态间的相关程度
• 设$p_2(x,y;t_1,t_2)$为两个随机信号的二维联合概率密度函数，则$X(t)$和$Y(t)$的互相关函数为：

$$R_{xy}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y^*(t_2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy^* p_2(x,y,t_1;t_2)dxdy$$

• 对平稳随机信号，互相关函数只是τ的函数：

$$R_{xy}(\tau)=E[X(t)Y^*(t-\tau)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy^* p_2(x,y,\tau)dxdy$$

6、平稳随机信号与广义平稳随机信号

(1) 平稳随机信号(Stationary random signal)

• 对一随机信号$X(t)$，给定时刻t_1，随机变量$X(t_1)$的概率密度函数为$p(x_1;t_1)$；给定时刻t_1、t_2，随机变量$X(t_1)$和$X(t_2)$的概率密度函数为$p(x_1,x_2;t_1,t_2)$；…；给定时刻t_1、t_2、…、t_n，随机变量$X(t_1)$、$X(t_2)$、…、$X(t_n)$的概率密度函数为$p(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)$
• 若任意移动一个时间Δt后，各概率密度函数仍保持不变：

$$p(x_1,t_1)=p(x_1,t_1+\Delta t) \quad (1)$$

$$p(x_1,x_2;t_1,t_2)=p(x_1,x_2;t_1+\Delta t,t_2+\Delta t) \quad (2)$$

$$p(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=p(x_1,\cdots,x_n;t_1+\Delta t,\cdots,t_n+\Delta t) \quad (3)$$

满足(1)的，称为一阶平稳
满足(2)的，称为二阶平稳
满足(3)的，称为n阶平稳随机信号

• 概率密度函数不随时间平移而变化的一类随机信号，称为平稳随机信号
• 不满足上式的称为非平稳随机信号
• n阶平稳随机信号也称为严格平稳随机信号或狭义平稳随机信号
• 对于平稳随机信号，有：

$$E[X(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=a$$

$$E[|X(t)|^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\ p(x)dx$$

$$D[X(t)]=E[|X(t)-a|^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-a|^2\ p(x)dx=\sigma^2$$

$$R_x(\tau)=E[X(t)X^*(t-\tau)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2^* p_2(x_1,x_2;\tau)dx_1dx_2$$

$$R_{xy}(\tau)=E[X(t)Y^*(t-\tau)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy^* p_2(x,y,\tau)dxdy$$

• 对于平稳随机信号，且有：

$$E[|X(t)|^2]=D[X(t)]+|E[X(t)]|^2=\sigma^2+|a|^2$$

证：

$$D[X(t)]=E[|X(t)-a|^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-a|^2\ p(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)(x-a)^*\ p(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} xx^* p(x)dx-a\int_{-\infty}^{\infty} x^* p(x)dx-a^*\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx+aa^*\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx$$

$$=E[|X(t)|^2]-a\cdot a^*-a^*\cdot a+|a|^2\cdot 1=E[|X(t)|^2]-|a|^2$$

$$\therefore\quad E[|X(t)|^2]=D[X(t)]+|a|^2=\sigma^2+|a|^2$$

• 平稳随机信号相关函数的主要特征

1) τ=0时的自相关函数具有最大值：$\boxed{R_x(0)\ge|R_x(\tau)|}$

2) 共轭对称性：$\boxed{R_x^*(-\tau)=R_x(\tau),\quad R_{yx}^*(-\tau)=R_{xy}(\tau)}$

对实随机信号，其相关函数为实偶函数：

$$\boxed{R_x(-\tau)=R_x(\tau),\quad R_{yx}(-\tau)=R_{xy}(\tau)}$$

3) 自相关函数的极限值：

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{|\tau|\to\infty} R_x(\tau)=|E[X(t)]|^2=|a|^2\\&R_x(0)=E[|X(t)|^2]\end{aligned}}$$

随机信号$X(t)$的均值为0时，有：

$$\boxed{\lim_{|\tau|\to\infty} R_x(\tau)=0}$$

(2) 广义平稳随机信号

• 广义平稳随机信号：均值、均方、方差与时间无关，相关函数只与时间间隔τ有关
• 狭义平稳随机信号一定是广义随机平稳信号
• 广义平稳随机信号不一定是狭义随机平稳信号

例1 试求瑞利型概率密度函数的均值、均方和方差

解：

$$\because\quad x\text{为实信号，且 } p(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right) & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx=\int_0^{\infty}(-x)\left(-2\frac{x}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

$$=\left[(-x)\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right]\Bigg|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}(-1)\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx=0+\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

$$=\sqrt{2\pi}\sigma\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx=\sqrt{2\pi}\sigma\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

$$=\sqrt{2\pi}\sigma\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{x^3}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

$$=\int_0^{\infty}(-x^2)\left(-2\frac{x}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

$$=\left[(-x^2)\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right]\Bigg|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}(-2x)\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

$$=0+\int_0^{\infty}2x\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx=-2\sigma^2\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)d\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$=-2\sigma^2\left[\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right]\Bigg|_0^{\infty}=2\sigma^2$$

$$D(x)=E(x^2)-[E(x)]^2=2\sigma^2-\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\right)^2=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2\approx0.43\sigma^2$$

例2 试求随机相位正弦波$x(t)=A\sin(\omega_0 t+\theta)$的均值、方差和自相关函数，其中$A$和$\omega_0$为常数，$\theta$为$0\sim2\pi$间均匀分布的随机变量

解：

θ在$0\sim2\pi$间均匀分布 $\Rightarrow$ $p(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & 0\le\theta<2\pi\\ 0 & \text{else}\end{cases}$

$$E[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}A\sin(\omega_0 t+\theta)p(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}A\sin(\omega_0 t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}A(\sin\omega_0 t\cos\theta+\cos\omega_0 t\sin\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}A\sin\omega_0 t\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta+\frac{1}{2\pi}A\cos\omega_0 t\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta$$

$$=0+0=0$$

$$D[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}|A\sin(\omega_0 t+\theta)-0|^2\,p(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}A^2\sin^2(\omega_0 t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}A^2\frac{1-\cos(2\omega_0 t+2\theta)}{2}\frac{1}{2\pi}d\theta=\frac{A^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta-\frac{A^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\omega_0 t+2\theta)d\theta$$

$$=\frac{A^2}{2}-\frac{A^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\cos2\omega_0 t\cos2\theta-\sin2\omega_0 t\sin2\theta]d\theta$$

$$=\frac{A^2}{2}-\frac{A^2}{4\pi}\cos2\omega_0 t\int_0^{2\pi}\cos2\theta d\theta+\frac{A^2}{4\pi}\sin2\omega_0 t\int_0^{2\pi}\sin2\theta d\theta$$

$$=\frac{A^2}{2}-0+0=\frac{A^2}{2}$$

$$R_x(t_1,t_2)=E[x(t_1)x^*(t_2)]=\iint x_1x_2^*p(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

$\because$ $x_1=A\sin(\omega_0 t_1+\theta)$, $x_2=A\sin(\omega_0 t_2+\theta)=A\sin[\omega_0(t_1-\tau)+\theta]$

x_1和x_2都是随机变量的函数，则有：

$$R_x(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}A\sin(\omega_0 t_1+\theta)A\sin[\omega_0(t_1-\tau)+\theta]p(\theta)d\theta$$

$$=A^2\int_0^{2\pi}\sin(\omega_0 t_1+\theta)\sin[\omega_0(t_1-\tau)+\theta]\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}A^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\{\cos\omega_0\tau-\cos[\omega_0(2t_1-\tau)+2\theta]\}d\theta$$

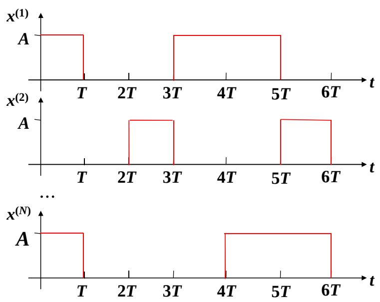
$$=\frac{1}{2\pi}A^2\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$-\frac{1}{2\pi}A^2\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\omega_0(2t_1-\tau)\cos2\theta-\sin\omega_0(2t_1-\tau)\sin2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}A^2\cos\omega_0\tau-0+0=\frac{1}{2}A^2\cos\omega_0\tau=R_x(\tau)$$

均值和方差是常数，自相关函数只与τ有关$\Rightarrow$广义平稳

例3 试求二元随机波形的均值、方差和自相关函数，其中信号取值是二值的(0或A)，每隔时间间隔T取值变1次，但每次的具体取值是随机且相互独立的，取0、A的概率各为1/2。



解： $\because$ $P(x=0)=P(x=A)=\frac{1}{2}$

$$E[x(t)]=0\cdot P(x=0)+A\cdot P(x=A)=A\cdot\frac{1}{2}=\frac{A}{2}$$

$$D[x(t)]=E\left[\left|x(t)-\frac{A}{2}\right|^2\right]=\left(0-\frac{A}{2}\right)^2\cdot P(x=0)+\left(A-\frac{A}{2}\right)^2\cdot P(x=A)$$

$$=\frac{A^2}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{A^2}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{A^2}{4}$$

$$R_x(\tau)=E[x_tx_{t-\tau}^*]$$

只有四种可能性：

(1). $x_t=A$, $x_{t-\tau}=A$;　(2). $x_t=A$, $x_{t-\tau}=0$;

(1). $x_t=0$, $x_{t-\tau}=A$;　(2). $x_t=0$, $x_{t-\tau}=0$

$$R_x(\tau)=E[x_t x_{t-\tau}^*]=A\cdot A\cdot P(x_t=A,x_{t-\tau}=A)$$
$$+A\cdot 0\cdot P(x_t=A,x_{t-\tau}=0)+0\cdot A\cdot P(x_t=0,x_{t-\tau}=A)$$
$$+0\cdot 0\cdot P(x_t=0,x_{t-\tau}=0)=A^2\cdot P(x_t=A,x_{t-\tau}=A)$$

关键：求 $P(x_t=A,x_{t-\tau}=A)$

(1)、当$|\tau|>T$时，x_t和$x_{t-\tau}$必定处于不同的两个取值区间，因此取值互相独立，则有：

$$P(x_t=A,x_{t-\tau}=A)=P(x_t=A)\cdot P(x_{t-\tau}=A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad R(\tau)=A^2\cdot P(x_t=A,x_{t-\tau}=A)=\frac{A^2}{4},\quad |\tau|>T$$

(2)、当$|\tau|\le T$时，有：

$$P(x_t=A,x_{t-\tau}=A)=P(x_{t-\tau}=A\,|\,x_t=A)P(x_t=A)$$

$$\because\quad P(x_t=A)=\frac{1}{2}$$

$$P(x_t=A,x_{t-\tau}=A)=\frac{1}{2}P(x_{t-\tau}=A\,|\,x_t=A)$$

$$P(x_{t-\tau}=A\,|\,x_t=A)=1-P(x_{t-\tau}=0\,|\,x_t=A)$$

x_t和$x_{t-\tau}$取值改变应满足两个条件：
a、它们处于不同的时间间隔，记为事件1，其概率为P_1；
b、取值发生变化，记为事件2，其概率为P_2

τ=0时，它们一定不处于不同的时间间隔，P_1=0
随着$|\tau|$增大，它们处于不同的时间间隔的概率增大
$|\tau|$=T时，它们一定处于不同的时间间隔，P_1=1

$$\therefore\quad P_1=\frac{|\tau|}{T}$$

根据题意：$P_2=\dfrac{1}{2}$

事件1和事件2互相独立
同时发生的概率P_{12}为：

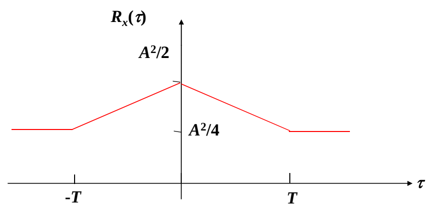
$$P_{12}=P_1P_2=\frac{|\tau|}{T}\cdot\frac{1}{2}=\frac{|\tau|}{2T}$$

$$\therefore\quad P(x_{t-\tau}=A\,|\,x_t=A)=1-P(x_{t-\tau}=0\,|\,x_t=A)$$
$$=1-P_{12}=1-\frac{|\tau|}{2T}$$

$$P(x_t=A,x_{t-\tau}=A)=\frac{1}{2}P(x_{t-\tau}=A\,|\,x_t=A)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{|\tau|}{2T}\right]$$

$$\therefore\quad R_x(\tau)=\frac{A^2}{2}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right),\quad |\tau|\le T$$

$$\therefore\quad R_x(\tau)=\begin{cases}\dfrac{A^2}{2}\left(1-\dfrac{|\tau|}{2T}\right) & |\tau|\le T\\[2ex] \dfrac{A^2}{4} & \text{else}\end{cases}$$



二、随机信号的时间平均表征量

- 随机信号集平均表征量均基于信号的概率密度函数
- 随机信号是各类样本函数的集合
- 用某一个样本函数来确定时间平均表征量

1、时间平均值

- 设$x(t)$为随机信号的一个样本函数，则时间平均值为：

$$m_x=\langle x(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt$$

- **m_x是$x(t)$的直流分量**
- 对$X(t)$的不同的样本函数，m_x可能是不同的

2、时间均方值

$$\langle|x(t)|^2\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt$$ 表示信号的功率

3、时间方差

$$\sigma_x^2=\langle|x(t)-m_x|^2\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)-m_x|^2\,dt$$

- **表示样本函数的交流功率**
- **对不同样本函数，时间方差可能不同**

4、时间自相关函数

$$\langle x(t)x^*(t-\tau)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x^*(t-\tau)dt$$

5、时间互相关函数

$$\langle x(t)y^*(t-\tau)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)y^*(t-\tau)dt$$

三、随机信号的各态历经性(Ergodic)

- **随机信号的各态历经性(遍历性、埃尔性)：**
  随机信号在固定时刻的所有样本的统计特征和任何一个单一样本在时间的统计特征是一致的
- 各态历经的随机信号，**一个样本函数好象历经了随机信号其他样本函数的各种可能的状态**
- 各态历经的随机信号，**可以用时间平均值代替集平均值**
- 各态历经的广义平稳的随机信号具有：

1、时间平均值以概率1等于其集均值：

$$<x(t)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx$$

52 43

2、时间自相关函数以概率1等于其集平均的自相关函数：

$$<x(t)x^*(t-\tau)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x^*(t-\tau)dt=E[X(t)X^*(t-\tau)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2^*p(x_1,x_2;\tau)dx_1dx_2=R_x(\tau)$$

- 一般而言，根据严格的条件判别广义平稳随机信号是否各态历经是十分困难的
- 常用方法：先假设广义平稳的随机信号是各态历经的，再用实验检验假设的合理性

例4 **验证假设随机相位正弦波$x(t)=A\sin(\omega_0 t+\theta)$具有各态历经性的合理性，其中$A$和$\omega_0$为常数，$\theta$为0～$2\pi$间均匀分布的随机变量**

52 44

解： 例2中已计算出：

$$E[x(t)]=0$$

$$R_x(\tau)=\frac{1}{2}A^2\cos\omega_0\tau$$

$$m_x=<x(t)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\sin(\omega_0t+\theta)dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[-\frac{A}{\omega_0}\cos(\omega_0t+\theta)\right]_{-T}^{T}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{A}{\omega_0}[\cos(-\omega_0T+\theta)-\cos(\omega_0T+\theta)]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{A}{\omega_0}[-2\sin\theta\sin(-\omega_0T)]=0$$

52 45

$$<x(t)x^*(t-\tau)>=<A\sin(\omega_0t+\theta)A\sin[\omega_0(t-\tau)+\theta]>$$

$$=\frac{1}{2}A^2\cdot<\cos\omega_0\tau-\cos[\omega_0(2t-\tau)+2\theta]>$$

$$=\frac{1}{2}A^2\cdot<\cos\omega_0\tau>-\frac{1}{2}A^2\cdot<\cos[2\omega_0t-\omega_0\tau+2\theta]>$$

$$=\frac{1}{2}A^2\cos\omega_0\tau-\frac{1}{2}A^2\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(2\omega_0t-\omega_0\tau+2\theta)dt$$

$$=\frac{1}{2}A^2\cos\omega_0\tau-\frac{1}{2}A^2\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[\frac{1}{2\omega_0}\sin(2\omega_0t-\omega_0\tau+2\theta)\right]_{-T}^{T}$$

$$=\frac{1}{2}A^2\cos\omega_0\tau-\frac{1}{2}A^2\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T\omega_0}[\sin(2\omega_0T-\omega_0\tau+2\theta)-\sin(-2\omega_0T-\omega_0\tau+2\theta)]$$

$$=\frac{1}{2}A^2\cos\omega_0\tau-\frac{1}{2}A^2\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T\omega_0}\cdot2\times\cos(2\theta-\omega_0\tau)\sin(2\omega_0T)=\frac{1}{2}A^2\cos\omega_0\tau$$

$$\therefore\quad E[x(t)]=<x(t)>,\quad E[x(t)x^*(t-\tau)]=<x(t)x^*(t-\tau)>$$

52 46

四、随机信号的功率谱

- **随机信号的能量往往不是有限的，但其功率可以有限**
- **对随机信号的一个样本$x(t)$，其平均功率为：**

$$P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2dt$$

- 平稳随机信号的平均功率P是$\{P_x\}$**的集平均值：**

$$P=E(P_x)=E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2dt\right]$$

- 对平稳随机信号的一个样本$x(t)$，取长度为T的一段：

$$x_T(t)=\begin{cases}x(t) & |t|\le T/2\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$X_T(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_T(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

52 47

- **$x_T(t)$是能量信号，由能量信号的帕塞瓦尔定理得：**

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x_T(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X_T(\omega)|^2\,d\omega$$

$$\therefore\quad E\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X_T(\omega)|^2\,d\omega\right]=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x_T(t)|^2\,dt\right]=E\left[\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt\right]$$

$$P=E(P_x)=E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2dt\right]=E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|X_T(\omega)|^2d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{E\left[|X_T(\omega)|^2\right]}{T}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)d\omega$$

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{E\left[|X_T(\omega)|^2\right]}{T}$$

- $S(\omega)$定义为平稳随机信号的功率谱密度函数，简称功率谱

52 48

- **平稳随机信号功率谱的主要性质：**
  - 功率谱是非负的实函数：$S_X(\omega)\ge 0,\quad S_X(\omega)=S_X^*(\omega)$
  - 随机信号各态历经时， $S_X(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{|X_T(\omega)|^2}{T}$
  - 实随机信号的功率谱是偶函数：$S_X(-\omega)=S_X(\omega)$
- 类似定义平稳随机信号的互功率谱密度函数，简称互功率谱

$$S_{XY}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{E\left[X_T(\omega)Y_T^*(\omega)\right]}{T}$$

- **平稳随机信号互功率谱的主要性质：**
  - 随机信号各态历经时， $S_{XY}(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{X_T(\omega)Y_T^*(\omega)}{T}$
  - 互功率谱的共轭对称性：$S_{XY}(\omega)=S_{YX}^*(\omega)$

52 49

- 实随机信号互功率谱的实部是偶函数，虚部是奇函数：

$$S_{XY}(-\omega)=S_{XY}^*(\omega)$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{XY}(\omega)=S_{YX}^*(\omega) \\ S_{XY}(-\omega)=S_{XY}^*(\omega) \end{array}\right\}\Rightarrow S_{XY}(\omega)=S_{YX}(-\omega)$$

- 互功率谱不等式：$|S_{XY}(\omega)|^2\le S_X(\omega)S_Y(\omega)$

五、随机信号的功率谱与相关函数的关系

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{E\left[|X_T(\omega)|^2\right]}{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{E\left[X_T(\omega)X_T^*(\omega)\right]}{T}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left[\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-j\omega t}dt\cdot\int_{-T/2}^{T/2}x^*(t')e^{j\omega t'}dt'\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}E[x(t)x^*(t')]e^{-j\omega(t-t')}dt'dt$$

52 50

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}R_x(t-t')e^{-j\omega(t-t')}dt'dt$$

令： $\tau=t-t',\quad t''=t' \quad\Rightarrow\quad dt''=dt', d\tau=dt$

$t\in[-T/2,T/2]\quad t'\in[-T/2,T/2]\quad\Rightarrow\quad \tau=t-t'\in[-T,T]$

$t''=t'=t-\tau\quad\Rightarrow\quad -T/2-\tau\le t''\le T/2-\tau$

$\tau\in[-T,0]\le 0\quad\Rightarrow\quad -T/2\le -T/2-\tau\le t''\le T/2\le T/2-\tau$

$\tau\in[0,T]\ge 0\quad\Rightarrow\quad -T/2-\tau\le -T/2\le t''\le T/2-\tau\le T/2$

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{-T}^{0}\int_{-T/2-\tau}^{T/2}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}dt''d\tau+\int_{0}^{T}\int_{-T/2}^{T/2-\tau}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}dt''d\tau\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{-T}^{0}(T+\tau)R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau+\int_{0}^{T}(T-\tau)R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}(T-|\tau|)R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

52 51

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}(1-|\tau|/T)R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

- 维纳－辛钦定理：
  平稳随机信号的自相关函数与其功率谱密度互为傅里叶变换

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

- 类似可推出：
  平稳随机信号的互相关函数与其互功率谱密度互为傅里叶变换

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xy}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{XY}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

52 52