例6 **求带通信号$x(t)$=Sa(t)cos2t，$-\infty< t <\infty$，通过线性相位理想低通滤波器的响应**

解：

$$H(\omega)=rect\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)e^{-j\omega t_d}$$

$$\because \mathrm{F}[\mathrm{Sa}(t)]=\pi\, rect(\omega/2)$$

$$\mathrm{F}(\cos 2t)=\pi\delta(\omega-2)+\pi\delta(\omega+2)$$

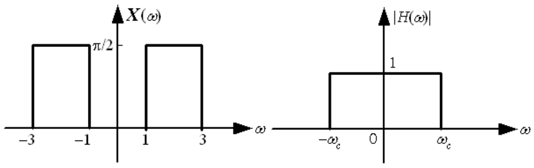
$$\therefore \quad X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\{\mathrm{F}[Sa(t)]*\mathrm{F}(\cos 2t)\}$$

$$=\frac{\pi}{2}rect\left(\frac{\omega}{2}\right)*\delta(\omega-2)+\frac{\pi}{2}rect\left(\frac{\omega}{2}\right)*\delta(\omega+2)$$

$$=\frac{\pi}{2}rect\left(\frac{\omega-2}{2}\right)+\frac{\pi}{2}rect\left(\frac{\omega+2}{2}\right)$$

$$\therefore \quad Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$$

$$=rect\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)e^{-j\omega t_d}\frac{\pi}{2}\left[rect\left(\frac{\omega-2}{2}\right)+rect\left(\frac{\omega+2}{2}\right)\right]$$



1) 当$\omega_c>3$时，输入信号的所有频率分量都能通过系统，即

$$Y(\omega)=e^{-j\omega t_d}\frac{\pi}{2}\left[rect\left(\frac{\omega-2}{2}\right)+rect\left(\frac{\omega+2}{2}\right)\right]$$

$$y(t)=x(t-t_d)=\mathrm{Sa}(t-t_d)\cos[2(t-t_d)]\ ,\quad -\infty< t <\infty$$

2) 当$\omega_c<1$时，输入信号的所有频率分量都不能通过系统，即

$$Y(\omega)=0$$

$$y(t)=0\ ,\quad -\infty< t <\infty$$

3) 当$1<\omega_c<3$时，只有$1\sim\omega_c$范围内的频率分量能通过系统，故

$$Y(\omega)=\frac{\pi}{2}\left\{rect\left(\frac{\omega-\frac{\omega_c+1}{2}}{\omega_c-1}\right)+rect\left(\frac{\omega+\frac{\omega_c+1}{2}}{\omega_c-1}\right)\right\}e^{-j\omega t_d}$$

由抽样信号频谱及Fourier变换的时域和频域位移特性可得

$$y(t)=\frac{\omega_c-1}{2}\mathrm{Sa}\left[\frac{\omega_c-1}{2}(t-t_d)\right]\cos\left[\frac{\omega_c+1}{2}(t-t_d)\right]$$

§ 1.8 确定信号的相关

一、相关系数

- 两个信号波形是否相同的度量指标：均方差

以能量信号为例

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)-x_2(t)|^2dt$$

- 缺点：均方差无法反映两波形相似但幅度相差较大的信号的相似程度
- 为去除幅度相差的影响，对其中一个信号乘以一最佳常数α

- 最佳常数α作用：使$x_1(t)$和$\alpha x_2(t)$的均方差最小

仍以能量信号为例

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)-\alpha x_2(t)|^2dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[x_1(t)-\alpha x_2(t)][x_1(t)-\alpha x_2(t)]^*dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[x_1(t)-\alpha x_2(t)][x_1^*(t)-\alpha x_2^*(t)]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[x_1(t)x_1^*(t)-\alpha x_1^*(t)x_2(t)-\alpha x_1(t)x_2^*(t)+\alpha^2x_2(t)x_2^*(t)]dt$$

- 使均方差Q最小的α应满足：

$$\frac{\partial Q}{\partial\alpha}=0\quad\Rightarrow\quad\int_{-\infty}^{\infty}[-x_1^*(t)x_2(t)-x_1(t)x_2^*(t)+2\alpha x_2(t)x_2^*(t)]dt=0$$

$$\therefore\quad\int_{-\infty}^{\infty}[x_1^*(t)x_2(t)+x_1(t)x_2^*(t)]dt=2\alpha\int_{-\infty}^{\infty}x_2(t)x_2^*(t)dt$$

$$\therefore\quad\alpha=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}[x_1^*(t)x_2(t)+x_1(t)x_2^*(t)]dt}{2\int_{-\infty}^{\infty}x_2(t)x_2^*(t)dt}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\{[x_1^*(t)x_2(t)]+[x_1^*(t)x_2(t)]^*\}dt}{2\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2\,dt}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}2\,\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt}{2\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2\,dt}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt}{\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2\,dt}$$

$$\because\quad Q=\int_{-\infty}^{\infty}[x_1(t)x_1^*(t)-\alpha x_1^*(t)x_2(t)-\alpha x_1(t)x_2^*(t)+\alpha^2x_2(t)x_2^*(t)]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)|^2dt-\alpha\int_{-\infty}^{\infty}2\,\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt+\alpha^2\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2dt$$

- 将α代入Q可得到最小的均方差Q_α

$$Q_\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)|^2dt-\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt}{\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2dt}\int_{-\infty}^{\infty}2\,\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt$$

$$+\frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt\right]^2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2dt\right]^2}\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)|^2dt-\frac{2\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt\right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2dt}+\frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt\right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2dt}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)|^2dt-\frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt\right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2dt}$$

- 两边同除以 $\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)|^2dt$

7

$$\frac{Q_\alpha}{\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)|^2dt}=1-\frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt\right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)|^2dt\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2dt}$$

- 定义：两个信号的相关系数

$$\rho(x_1,x_2)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt}{\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)|^2dt\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2dt\right]^{1/2}}$$

$$\therefore\quad\frac{Q_\alpha}{\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)|^2dt}=1-\rho^2(x_1,x_2)$$

- $\rho(x_1, x_2)$越大，最小的均方差Q_α越小
- 相关系数$\rho(x_1, x_2)$是两个信号相似程度的度量

- 许瓦兹不等式：

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2(t)dt\right|^2\le\int_{-\infty}^{\infty}|x_1(t)|^2dt\int_{-\infty}^{\infty}|x_2(t)|^2dt$$

when $x_1(t)=ax_2^*(t)$, a为实常数， 等号成立

$$\Rightarrow\quad|\rho(x_1,x_2)|\le 1$$

- $\rho(x_1, x_2)$定义为两个信号的归一化相关系数
- $\rho(x_1, x_2)=1$表示两个信号波形完全相似
- 有时也使用不归一的相关系数：

$$r(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt$$

- 类似地，归一化和不归一的相关系数的定义可推广到周期信号和功率信号的情况

- 对两个相同周期(T)的信号，相关系数定义为：

$$r(x_1,x_2)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt$$

$$\rho(x_1,x_2)=\frac{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt}{\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x_1(t)|^2dt\cdot\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x_2(t)|^2dt\right]^{1/2}}$$

- 对功率信号，相关系数定义为：

$$r(x_1,x_2)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt$$

$$\rho(x_1,x_2)=\frac{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt}{\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x_1(t)|^2dt\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x_2(t)|^2dt\right]^{1/2}}$$

50 10

例1 求两个信号$x_1(t)=A+B\cos\omega_0 t$和$x_2(t)=C+D\cos(\omega_0 t+\theta)$ 的相关系数

解： 这是两个周期信号，周期为：$T=2\pi/\omega_0$

$$r(x_1,x_2)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[A+B\cos\omega_0 t][C+D\cos(\omega_0 t+\theta)]dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}ACdt+\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}AD\cos(\omega_0 t+\theta)dt$$

$$+\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}BC\cos\omega_0 tdt+\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}BD\cos\omega_0 t\cos(\omega_0 t+\theta)dt$$

$$=AC+\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}BD\frac{1}{2}[\cos\theta+\cos(2\omega_0 t+\theta)]dt$$

$$=AC+\frac{1}{2}BD\cos\theta$$

50 11

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x_1(t)|^2\,dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[A+B\cos\omega_0 t]^2dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[A^2+2AB\cos\omega_0 t+B^2\cos^2\omega_0 t]dt$$

$$=A^2+\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}B^2\frac{1}{2}[1+\cos 2\omega_0 t]dt$$

$$=A^2+\frac{1}{2}B^2$$

类似$\Rightarrow$ $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x_2(t)|^2\,dt=C^2+\frac{1}{2}D^2$

$$\rho(x_1,x_2)=\frac{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{Re}[x_1^*(t)x_2(t)]dt}{\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x_1(t)|^2dt\cdot\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x_2(t)|^2dt\right]^{1/2}}=\frac{AC+\frac{1}{2}BD\cos\theta}{\left[\left(A^2+\frac{1}{2}B^2\right)\left(C^2+\frac{1}{2}D^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

50 12

当$A=C=0$时：

$$\rho(x_1,x_2)=\frac{AC+\frac{1}{2}BD\cos\theta}{\left[\left(A^2+\frac{1}{2}B^2\right)\left(C^2+\frac{1}{2}D^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}BD\cos\theta}{\left[\left(\frac{1}{2}B^2\right)\left(\frac{1}{2}D^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}=\cos\theta$$

两个频率相同的正弦信号间的相关系数是这两个信号之间相位差的余弦函数

进一步，当相位差为：$\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$\rho(x_1,x_2)=0$ 两个信号不相关

不相关通常称为正交

50 13

二、相关函数

- 相关系数不足以表示两个信号的相似程度

例1中 $x_1(t)=B\cos\omega_0 t,\quad x_2(t)=D\cos(\omega_0 t+\theta)=D\cos\omega_0(t+\theta/\omega_0)$

$\Rightarrow\ \rho(x_1,x_2)=\cos\theta$

相关系数与其中一个波形的时间移动有关

- $x_1(t)$和$x_2(t)$的互相关函数(cross-correlation)定义为：

对能量信号

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt$$

对功率信号

$$R_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt$$

50 14

对周期信号

$$R_{12}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt$$

- 当$x_2(t)=x_1(t)=x(t)$，类似地将$x(t)$的自相关函数(auto-correlation)定义为：

对能量信号

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x^*(t-\tau)dt$$

对功率信号

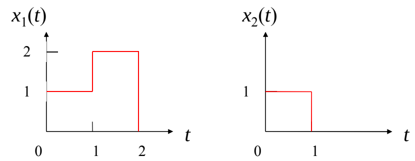
$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)x^*(t-\tau)dt$$

对周期信号

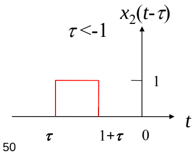
$$R_x(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)x^*(t-\tau)dt$$

50 15

例2 求图示两个信号$x_1(t)$ 和$x_2(t)$的互相关函数



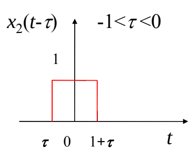
解： $R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2(t-\tau)dt$



当$\tau<-1$时，

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2(t-\tau)dt=0$$

50 16

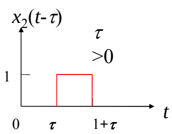


当$-1<\tau<0$时，

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2(t-\tau)dt$$

$$=\int_{0}^{1+\tau}(1\times1)dt=1+\tau$$

当$0<\tau<1$时，



$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2(t-\tau)dt$$

$$=\int_{\tau}^{1}(1\times1)dt+\int_{1}^{1+\tau}(2\times1)dt=1-\tau+2\tau=1+\tau$$

当$1<\tau<2$时，

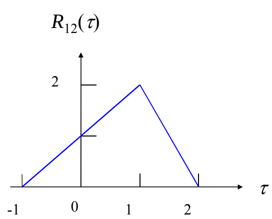
$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2(t-\tau)dt$$

$$=\int_{\tau}^{2}(2\times1)dt=2(2-\tau)=4-2\tau$$

当$\tau>2$时， $R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2(t-\tau)dt=0$

50 17

$$\therefore\ R_{12}(\tau)=\begin{cases}1+\tau & -1<\tau<1\\ 4-2\tau & 1<\tau<2\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$



50 18

三、相关函数的性质

1、与频谱的关系

- **对能量信号，若**

$$F[x_1(t)] = X_1(\omega),\ F[x_2(t)] = X_2(\omega),\ F[R_{12}(\tau)] = E_{12}(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad E_{12}(\omega) = X_1(\omega)X_2^*(\omega)$$

证：

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega)e^{j\omega(t-\tau)}d\omega\right]^* dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2^*(\omega)e^{-j\omega(t-\tau)}d\omega dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2^*(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-j\omega t}dt\, e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2^*(\omega)X_1(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$\therefore \quad E_{12}(\omega) = F[R_{12}(\tau)] = X_1(\omega)X_2^*(\omega)$$

$E_{12}(\omega)$具有能量谱的量纲

称$E_{12}(\omega)$为$x_1(t)$和$x_2(t)$的互能量谱，简称互谱

推论： $F[R_x(\tau)] = X(\omega)X^*(\omega) = E_x(\omega)$

维纳-辛钦定理：

能量信号自相关函数的傅里叶变换为信号的能量谱

- **对功率信号，类似地有：**

功率信号$x_1(t)$和$x_2(t)$的互相关函数的傅里叶变换$P_{12}(\omega)$
称为功率信号$x_1(t)$和$x_2(t)$的互功率谱，也简称互谱

$$F[R_{12}(\tau)] = P_{12}(\omega)$$

维纳-辛钦定理：

功率信号自相关函数的傅里叶变换为信号的功率谱

$$F[R_x(\tau)] = P_x(\omega)$$

2、相关函数的最大值

- **对能量信号**

根据许瓦兹不等式：

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)dt\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2 dt\int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)|^2 dt$$

when $x_1(t) = ax_2^*(t)$, a为实常数， 等号成立

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt \le \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt\int_{-\infty}^{\infty} |x^*(t-\tau)|^2 dt\right]^{1/2} = [EE]^{1/2} = E$$

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt\int_{-\infty}^{\infty} |x^*(t)|^2 dt\right]^{1/2} = [EE]^{1/2} = E$$

$$\therefore \quad R_x(\tau) \le R_x(0) = E_x$$

能量信号自相关函数在$\tau=0$时有最大值，最大值为信号的能量

互相关函数在$\tau=0$时不一定有最大值：

$$R_{12}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega)e^{j\omega\tau}\Big|_{\tau=0}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_{12}(\omega)d\omega$$

称$R_{12}(0)$为信号$x_1(t)$和$x_2(t)$的交叉能量

- **对功率信号，类似地有：**

$$R_x(\tau) \le R_x(0) = P_x$$

功率信号自相关函数在$\tau=0$时有最大值，最大值为信号的功率

互相关函数在$\tau=0$时不一定有最大值：

$$R_{12}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_{12}(\omega)d\omega$$

称$R_{12}(0)$为信号$x_1(t)$和$x_2(t)$的交叉功率

3、共轭对称性

信号自相关函数具有共轭对称性

$$R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$$

以能量信号为例来证明，结论对功率信号也成立

证： $R_x^*(-\tau) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t+\tau)dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$

令： $t = t' - \tau \to dt = dt'$

$$\therefore \quad R_x^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t'-\tau)x(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt = R_x(\tau)$$

当$x(t)$为实信号时，$R_x(\tau)$是实函数

$$R(\tau) = R^*(\tau) \quad \Rightarrow \quad R(\tau) = R(-\tau)$$

实信号的自相关函数是τ的偶函数

对于互相关函数，有：

$$R_{12}(\tau) = R_{21}^*(-\tau)$$

仍以能量信号为例来证明，结论对功率信号也成立

证： $R_{21}^*(-\tau) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)x_1^*(t+\tau)dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x_2^*(t)x_1(t+\tau)dt$

令： $t = t' - \tau \to dt = dt'$

$$\therefore \quad R_{21}^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2^*(t'-\tau)x_1(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt = R_{12}(\tau)$$

4、相关与卷积的关系

• **以能量信号为例来说明**

卷积：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau,\quad X(\omega)=X_1(\omega)X_2(\omega)$$

相关：

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt,\quad E_{12}(\omega)=X_1(\omega)X_2^*(\omega)$$

相同点：时间延迟、相乘、积分

不同点：卷积信号反转；相关信号共轭

• **互相关可化为卷积来计算(卷积存在快速算法)**

先将第二个信号时间域上反转，记为第三个信号：

$$x_3(t)=x_2(-t)$$

再计算第一个信号与第三个信号的共轭信号的卷积：

$$x_1(\tau)*x_3^*(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_3^*(\tau-t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_3^*[-(t-\tau)]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt=R_{12}(\tau)$$

计算结果就是第一个信号与第二个信号的互相关函数

四、线性系统与相关函数的关系

• **对能量信号**

确定性信号通过线性系统：

$$\left.\begin{array}{l}y(t)=x(t)*h(t)\\ Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\mathrm{F}[R_y(\tau)]=E_y(\omega)=Y(\omega)Y^*(\omega)=[X(\omega)H(\omega)][X(\omega)H(\omega)]^*$$

$$=X(\omega)X^*(\omega)H(\omega)H^*(\omega)=E_x(\omega)|H(\omega)|^2$$

$$\because\quad \mathrm{F}[R_h(\tau)]=H(\omega)H^*(\omega)=|H(\omega)|^2$$

$$\therefore\quad R_y(\tau)=R_x(\tau)*R_h(\tau)$$

类似地有：

$$\mathrm{F}[R_{yx}(\tau)]=E_{yx}(\omega)=Y(\omega)X^*(\omega)=[X(\omega)H(\omega)]X^*(\omega)$$

$$=X(\omega)X^*(\omega)H(\omega)=E_x(\omega)H(\omega)$$

$$R_{yx}(\tau)=R_x(\tau)*h(\tau)$$

• **对功率信号，同样有：**

$$\mathrm{F}[R_y(\tau)]=P_y(\omega)=P_x(\omega)|H(\omega)|^2$$

$$R_y(\tau)=R_x(\tau)*R_h(\tau)$$

$$\mathrm{F}[R_{yx}(\tau)]=P_{yx}(\omega)=P_x(\omega)H(\omega)$$

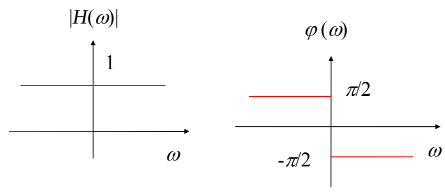
$$R_{yx}(\tau)=R_x(\tau)*h(\tau)$$

§ 1.9 Hilbert变换

一、Hilbert变换的基本概念

• **Hilbert变换**(希尔伯特变换/**H**变换)：移相网络

$$H(\omega)=\begin{cases}e^{-j\frac{\pi}{2}} & \omega>0\\ e^{j\frac{\pi}{2}} & \omega<0\end{cases}$$



$$H(\omega)=\begin{cases}e^{-j\frac{\pi}{2}} & \omega>0\\ e^{j\frac{\pi}{2}} & \omega<0\end{cases}=\begin{cases}-j & \omega>0\\ j & \omega<0\end{cases}=-jSgn(\omega)$$

$$\because\quad \mathrm{F}[Sgn(t)]=\frac{2}{j\omega}\qquad \text{对称性：}\mathrm{F}[x(t)]=X(\omega)\Rightarrow \mathrm{F}[X(t)]=2\pi x(-\omega)$$

$$\therefore\quad \mathrm{F}\left[\frac{2}{jt}\right]=2\pi Sgn(-\omega)=-2\pi Sgn(\omega)$$

$$H(\omega)=-jSgn(\omega)\quad\Rightarrow\quad h(t)=\frac{1}{\pi t}$$

• **$x(t)$的Hilbert变换**：$\hat{x}(t)$

$x(t)$ ⟶ [H变换] ⟶ $\hat{x}(t)$

时域： $\hat{x}(t)=x(t)*h(t)=x(t)*\dfrac{1}{\pi t}$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\frac{1}{t-\tau}d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\frac{1}{\tau}d\tau$$

频域： $\mathrm{F}[\hat{x}(t)]=X(\omega)H(\omega)=-jSgn(\omega)X(\omega)$

• **Hilbert反变换：**

$$H_1(\omega)=\frac{1}{H(\omega)}=\frac{1}{-jSgn(\omega)}=\frac{j}{-j^2Sgn(\omega)}=jSgn(\omega)$$

$$\therefore\quad h_1(t)=-\frac{1}{\pi t}$$

$$x(t)=\hat{x}(t)*h_1(t)=\hat{x}(t)*\left[-\frac{1}{\pi t}\right]=-\hat{x}(t)*\frac{1}{\pi t}$$

例1 求信号$x(t)=\cos\omega_0 t$的H变换

解： 从时间域求解：

$$\hat{x}(t)=x(t)*\frac{1}{\pi t}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos[\omega_0(t-\tau)]\frac{1}{\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega_0 t\cos\omega_0\tau\frac{1}{\tau}d\tau+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega_0 t\sin\omega_0\tau\frac{1}{\tau}d\tau$$

$$=\frac{\cos\omega_0 t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega_0\tau}{\tau}d\tau+\frac{\sin\omega_0 t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega_0\tau}{\tau}d\tau$$

$\because$ $\cos\omega_0\tau$为τ的偶函数；$\sin\omega_0\tau$、τ为τ的奇函数

$$\hat{x}(t)=\frac{2\sin\omega_0 t}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega_0\tau}{\tau}d\tau=\frac{2\sin\omega_0 t}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0\tau}d(\omega_0\tau)$$

$$=\frac{2\sin\omega_0 t}{\pi}\int_0^{\infty}Sa(x)dx=\frac{2\sin\omega_0 t}{\pi}Si(\infty)=\frac{2\sin\omega_0 t}{\pi}\frac{\pi}{2}=\sin\omega_0 t$$

50 31

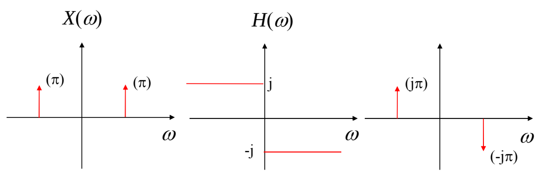
从频率域求解：

$$x(t)=\cos\omega_0 t\overset{F}{\longleftrightarrow}\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$H(\omega)=-jSgn(\omega)$$

$$\therefore\ \hat{x}(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X(\omega)H(\omega)=-j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\Rightarrow\ \hat{x}(t)=\sin\omega_0 t$$



50 32

- 常见的Hilbert变换：

$$\cos\omega_0 t\overset{H}{\longleftrightarrow}\sin\omega_0 t\qquad \sin\omega_0 t\overset{H}{\longleftrightarrow}-\cos\omega_0 t$$

$$\delta(t)\overset{H}{\longleftrightarrow}\frac{1}{\pi t}\qquad \frac{1}{\pi t}\overset{H}{\longleftrightarrow}-\delta(t)$$

- **Hilbert变换⇔-π/2移相器**

$$\cos\omega_0 t\overset{H}{\longleftrightarrow}\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\omega_0 t$$

$$\sin\omega_0 t\overset{H}{\longleftrightarrow}\sin\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\omega_0 t$$

$$e^{j\omega_0 t}\overset{H}{\longleftrightarrow}e^{j\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)}=e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\omega_0 t}=-je^{j\omega_0 t}=\sin\omega_0 t-j\cos\omega_0 t$$

50 33

二、Hilbert变换的性质

1、H变换只改变信号的相位谱，振幅谱不变

$$H(\omega)=\begin{cases}e^{-j\frac{\pi}{2}} & \omega>0\\ e^{j\frac{\pi}{2}} & \omega<0\end{cases}$$

- **对能量信号→ 能量谱不变→ 能量不变**
- **对功率信号→ 功率谱不变→ 功率不变**

2、实信号的H变换仍为实信号

$$\hat{x}(t)=x(t)*h(t)=x(t)*\frac{1}{\pi t}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\frac{1}{t-\tau}d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\frac{1}{\tau}d\tau$$

50 34

3、实信号$x(t)$与其H变换$\hat{x}(t)$是正交的：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\hat{x}(t)dt=0$$

证： 对于实信号：

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2(t-\tau)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E_{12}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_1(\omega)X_2^*(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

令： $\tau=0,\ x_1(t)=x(t),\ x_2(t)=\hat{x}(t)$

$$\therefore\ R_{12}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\hat{x}(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\{F[\hat{x}(t)]\}^*d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\{X(\omega)[-jSgn(\omega)]\}^*d\omega$$

50 35

$$\Rightarrow\ \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\hat{x}(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\{X^*(\omega)[jSgn(\omega)]\}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2[jSgn(\omega)]d\omega$$

对于实信号： $|X(\omega)|^2$ 为ω的偶函数

然而： $Sgn(\omega)$为ω的奇函数

$$\Rightarrow\ |X(\omega)|[jSgn(\omega)]为\omega的奇函数$$

$$\therefore\ \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\hat{x}(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2[jSgn(\omega)]d\omega=0$$

4、信号$x(t)$的H变换$\hat{x}(t)$的H变换为：

$$\hat{\hat{x}}(t)=-x(t)$$

50 36

证： $F[\hat{\hat{x}}(t)]=F[\hat{x}(t)][-jSgn(\omega)]=X(\omega)[-jSgn(\omega)][-jSgn(\omega)]$

$$=X(\omega)(-1)^2 j^2[Sgn(\omega)]^2=-X(\omega)[Sgn(\omega)]^2$$

$$=\begin{cases}-X(\omega)\times1\times1 & \omega>0\\ -X(\omega)\times(-1)\times(-1) & \omega<0\end{cases}=-X(\omega)$$

$$\Rightarrow\quad \hat{\hat{x}}(t)=-x(t)$$

5、卷积的H变换：

$$\text{if }\ x(t)=x_1(t)*x_2(t)\quad\Rightarrow\quad \hat{x}(t)=\hat{x}_1(t)*x_2(t)=x_1(t)*\hat{x}_2(t)$$

证：

$$\hat{x}(t)=x(t)*\frac{1}{\pi t}=[x_1(t)*x_2(t)]*\frac{1}{\pi t}=x_1(t)*\left[x_2(t)*\frac{1}{\pi t}\right]$$

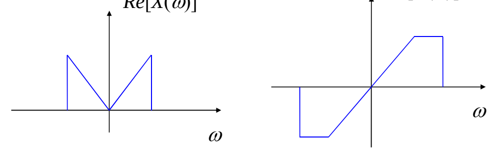
$$=x_1(t)*\hat{x}_2(t)=x_2(t)*\left[x_1(t)*\frac{1}{\pi t}\right]=\hat{x}_1(t)*x_2(t)$$

50 37

三、Hilbert变换的应用

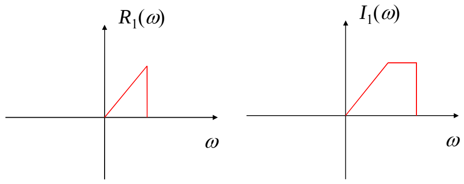
1、实信号的单边频谱表示——解析信号

- **实信号$x(t)$的频谱实部关于ω偶对称，虚部关于ω**奇对称



- **已知实信号ω>0的频谱部分** → 实信号的频谱**$X(\omega)$**
- **有时只需讨论ω>0的频谱部分** → 单边频谱的信号

50 38

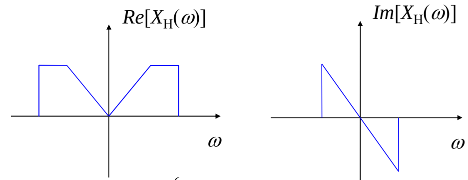


$$x(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X(\omega)=\begin{cases}R_1(\omega)+jI_1(\omega) & \omega>0\\ R_1(|\omega|)-jI_1(|\omega|) & \omega<0\end{cases}$$

$$\therefore\quad \hat{x}(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X_H(\omega)=X(\omega)[-jSgn(\omega)]=\begin{cases}-j[R_1(\omega)+jI_1(\omega)] & \omega>0\\ j[R_1(|\omega|)-jI_1(|\omega|)] & \omega<0\end{cases}$$

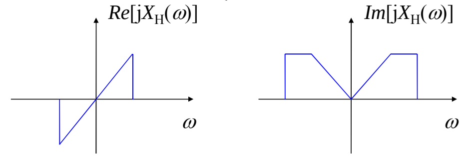
$$=\begin{cases}-jR_1(\omega)+I_1(\omega) & \omega>0\\ jR_1(|\omega|)+I_1(|\omega|) & \omega<0\end{cases}$$

50 39



$$\hat{x}(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X_H(\omega)=\begin{cases}-jR_1(\omega)+I_1(\omega) & \omega>0\\ jR_1(|\omega|)+I_1(|\omega|) & \omega<0\end{cases}$$

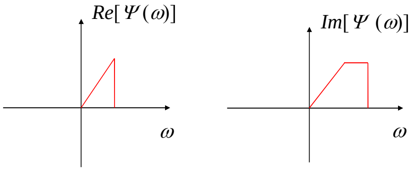
$$\Rightarrow\quad j\hat{x}(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}jX_H(\omega)=\begin{cases}R_1(\omega)+jI_1(\omega) & \omega>0\\ -R_1(|\omega|)+jI_1(|\omega|) & \omega<0\end{cases}$$



50 40

$$\therefore\quad \psi(t)=x(t)+j\hat{x}(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}\Psi(\omega)=\begin{cases}[R_1(\omega)+jI_1(\omega)]+[R_1(\omega)+jI_1(\omega)] & \omega>0\\ [R_1(|\omega|)-jI_1(|\omega|)]+[-R_1(|\omega|)+jI_1(|\omega|)] & \omega<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2[R_1(\omega)+jI_1(\omega)]=2X(\omega) & \omega>0\\ 0 & \omega<0\end{cases}$$



- **信号$\psi(t)$只存在ω>0的频谱**(单边频谱)
- **信号$\psi(t)$称为实信号$x(t)$的解析信号**(analytic signal)

$$\psi(t)=x(t)+j\hat{x}(t)=x(t)+j\left[x(t)*\frac{1}{\pi t}\right]$$

50 41

解析信号的虚部为其实部的H变换
解析信号的傅里叶变换总是因果的

- **常见实信号$x(t)$的解析信号$\psi(t)$**

$$x(t)=\cos\omega_0 t\quad\rightarrow\quad \psi(t)=x(t)+j\hat{x}(t)=\cos\omega_0 t+j\sin\omega_0 t=e^{j\omega_0 t}$$

$$x(t)=\cos\omega_0 t\overset{F}{\longleftrightarrow}\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\psi(t)=e^{j\omega_0 t}\overset{F}{\longleftrightarrow}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$x(t)=\sin\omega_0 t\quad\rightarrow\quad \psi(t)=x(t)+j\hat{x}(t)=\sin\omega_0 t-j\cos\omega_0 t$$

$$=-j(\cos\omega_0 t+j\sin\omega_0 t)=-je^{j\omega_0 t}=e^{j(\omega_0 t-\pi/2)}$$

$$x(t)=\sin\omega_0 t\overset{F}{\longleftrightarrow}-j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\psi(t)=-je^{j\omega_0 t}\overset{F}{\longleftrightarrow}-j[2\pi\delta(\omega-\omega_0)]=-2j\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

50 42

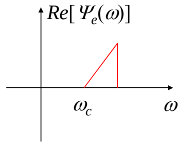
- **实信号$x(t)$的解析信号**$\psi(t)$也称为$x(t)$的预包络(per-envelope)
- **实信号$x(t)$的**复合包络(complex-envelope)为：

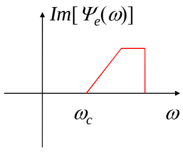
$$\psi_e(t)=\psi(t)e^{j\omega_c t},\quad \omega_c>0$$

复合包络也是解析信号

$$\Psi(\omega)=\begin{cases}2X(\omega) & \omega>0\\ 0 & \omega<0\end{cases},\quad e^{j\omega_c t}\overset{F}{\longleftrightarrow}2\pi\delta(\omega-\omega_c)$$

$$\Rightarrow\quad \Psi_e(\omega)=\begin{cases}2X(\omega-\omega_c) & \omega>\omega_c\\ 0 & \omega<\omega_c\end{cases}$$





50 43

复合包络$\psi_e(t)$只有$\omega>0$的频谱 →

$$\psi_e(t)=I(t)+jQ(t)=I(t)+j\hat{I}(t)$$

$I(t)$和$Q(t)$分别称为$x(t)$在频率ω_c上的同相分量和正交分量

实信号$x(t)$可用其在频率ω_c上的复合包络来描述：

$$x(t)=\mathrm{Re}[\psi(t)]=\mathrm{Re}[\psi(t)e^{j\omega_c t}e^{-j\omega_c t}]=\mathrm{Re}[\psi_e(t)e^{-j\omega_c t}]$$

$x(t)$也可用其在频率ω_c上的同相分量和正交分量来描述：

$$x(t)=\mathrm{Re}[\psi_e(t)e^{-j\omega_c t}]=\mathrm{Re}\{[I(t)+jQ(t)][\cos\omega_c t-j\sin\omega_c t]\}$$
$$=I(t)\cos\omega_c t+Q(t)\sin\omega_c t$$

- $\psi(t)$或$\psi_e(t)$的幅度称为$x(t)$的自然包络(natural envelope)

$$A(t)=|\psi(t)|=|\psi_e(t)|$$

自然包络$A(t)$是正实信号

44

例2　求信号$x(t)=\cos\omega t$ 的预包络、复合包络和自然包络

解： $\because\ \cos\omega t\overset{H}{\longleftrightarrow}\sin\omega t$

$x(t)$的预包络为：

$$\psi(t)=x(t)+j\hat{x}(t)=\cos\omega t+j\sin\omega t=e^{j\omega t}$$

$x(t)$在频率ω_c上的复合包络为：

$$\psi_e(t)=\psi(t)e^{j\omega_c t}=e^{j\omega t}e^{j\omega_c t}=e^{j(\omega+\omega_c)t}$$

$x(t)$的自然包络为：$A(t)=|\psi_e(t)|=|\psi(t)|=1$

验证： $I(t)=\cos(\omega+\omega_c)t,\quad Q(t)=\sin(\omega+\omega_c)t$

$$I(t)\cos\omega_c t+Q(t)\sin\omega_c t$$
$$=\cos(\omega+\omega_c)t\cos\omega_c t+\sin(\omega+\omega_c)t\sin\omega_c t$$
$$=\cos[(\omega+\omega_c)t-\omega_c t]=\cos\omega t=x(t)$$

50 45

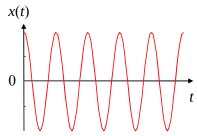
2、实因果信号频谱实部与虚部的关系

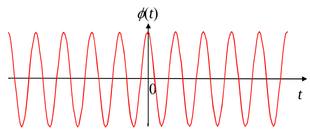
- **对于实因果信号$x(t)$：** $x(t)=x^*(t)$ and $\begin{cases}x(t)\neq 0 & t>0\\ x(t)=0 & t<0\end{cases}$

其频谱$X(\omega)$为：

$$x(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}X(\omega)=R(\omega)+jI(\omega),\quad I(\omega)=-R(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}$$

证：　设偶信号$\phi(t)$为： $\phi(t)=\begin{cases}x(t) & t>0\\ x(-t) & t<0\end{cases}$





50 46

$$\therefore\quad x(t)=\phi(t)u(t)$$

$$\Rightarrow\quad X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{\Phi(\omega)*\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]\right\}=\frac{1}{2}\Phi(\omega)*\delta(\omega)+\frac{1}{2\pi}\Phi(\omega)*\frac{1}{j\omega}$$
$$=\frac{1}{2}\Phi(\omega)+\frac{1}{2j}\Phi(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}=\frac{1}{2}\Phi(\omega)+j\left[-\frac{1}{2}\Phi(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}\right]$$

而 $\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\cos\omega tdt-j\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\sin\omega tdt$

$\phi(t)$、$\cos\omega t$为偶信号；$\sin\omega t$为奇信号 →

$\phi(t)\cos s\omega t$为偶信号；$\phi(t)\sin\omega t$为奇信号

$$\therefore\quad \Phi(\omega)=2\int_0^{\infty}\phi(t)\cos\omega tdt=2\int_0^{\infty}x(t)\cos\omega tdt$$

而 $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos\omega tdt-j\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin\omega tdt$

$$=R(\omega)+jI(\omega)\quad\Rightarrow\quad R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos\omega tdt$$

50 47

$x(t)$ 为因果信号 → $R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos\omega tdt=\int_0^{\infty}x(t)\cos\omega tdt$

$$\therefore\quad \Phi(\omega)=2\int_0^{\infty}x(t)\cos\omega tdt=2R(\omega)$$

$$\Rightarrow\quad X(\omega)=\frac{1}{2}\Phi(\omega)+j\left[-\frac{1}{2}\Phi(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}\right]$$
$$=R(\omega)+j\left[-R(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}\right]=R(\omega)+jI(\omega)$$

$$\therefore\quad I(\omega)=-R(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}$$

实因果信号频谱的实部和虚部不独立，两者为H变换关系

例3　讨论阶跃信号$u(t)$频谱实部与虚部的关系

解： $u(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}=\pi\delta(\omega)+j\left[-\frac{1}{\omega}\right]$

50 48

$$R(\omega)=\pi\delta(\omega) \quad I(\omega)=-\frac{1}{\omega}$$

$$-R(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}=-\pi\delta(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}=-\delta(\omega)*\frac{1}{\omega}=-\frac{1}{\omega}$$

$$\therefore \quad I(\omega)=-R(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}$$

3、窄带信号的H变换

- **窄带信号$x(t)$的表达式：**

$$x(t)=a(t)\cos[\omega_0 t+\theta]$$

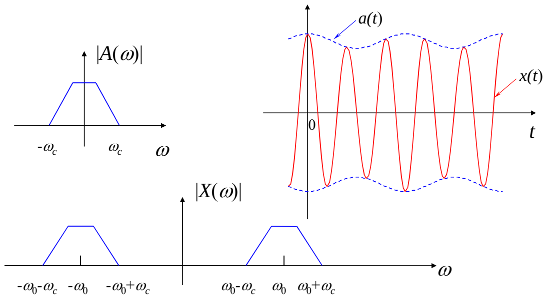
其中$a(t)$ 相对$\cos(\omega_0 t+\theta)$来说，是慢变化的信号

即$a(t)$的频谱为低通型的：

$$a(t)\overset{F}{\longleftrightarrow}A(\omega)=\begin{cases}\neq 0 & |\omega|\le\omega_c<<\omega_0\\ =0 & \text{else}\end{cases}$$

50 49

ω_0是窄带信号的载频，**$\omega_0 t+\theta$是窄带信号的相位**



- **窄带信号$x(t)$的H变换为：**

$$\hat{x}(t)=a(t)\sin(\omega_0 t+\theta)$$

50 50