### 3、奈奎斯特滤波器

对系统的传输特性$H(\omega)$以$2\pi/T_s$为宽度进行分割，若各段在$[-\pi/T_s，\pi/T_s]$区间能叠加成一个矩形频率特性(等效低通滤波特性) → 该系统以速率$f_s$传输基带信号时，无码间串扰

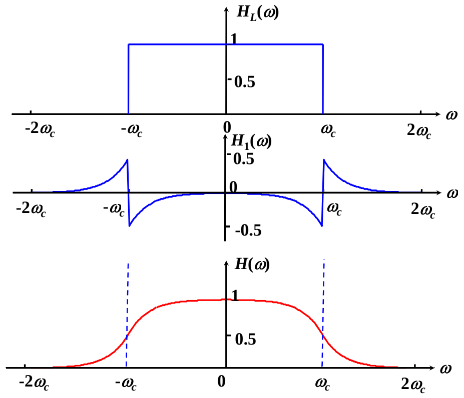
- 为实现等效低通滤波器，只要在理想低通滤波特性的截止频率$\omega_c=\pi/T_s$处加上一个对$\omega_c$奇对称的特性即可

$$H(\omega)=\begin{cases}1+H_1(\omega) & |\omega|\le\frac{\pi}{T_s}=\omega_c\\ H_1(\omega) & \omega_c<|\omega|<2\omega_c\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

其中$H_1(\omega)$对$\omega_c$奇对称：

$$H_1(\omega_c-\omega)=-H_1(\omega_c+\omega)\quad |\omega|\le\Delta\omega\le\omega_c$$








- 为简单起见，设滤波器的相移为0(若滤波器为线性相位，则输出产生相应的延时)

$$H(\omega)=\begin{cases}1+H_1(\omega) & |\omega|\le\frac{\pi}{T_s}=\omega_c\\ H_1(\omega) & \omega_c<|\omega|<2\omega_c\\ 0 & \text{else}\end{cases}\overset{F}{\longleftrightarrow}$$

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}+h_1(t),\quad h_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- $H_1(\omega)$为$\omega$的偶函数，$\omega>2\omega_c$时，$H_1(\omega)=0$ →

$$h_1(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\omega_c}H_1(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$



$$\therefore\quad h_1(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_c}H_1(\omega)\cos\omega t\,d\omega+\frac{1}{\pi}\int_{\omega_c}^{2\omega_c}H_1(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$

令$\omega=\omega_c-x$　　令$\omega=\omega_c+x$

$$\rightarrow\quad h_1(t)=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_c}^{0}H_1(\omega_c-x)\cos[(\omega_c-x)t](-dx)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_c}H_1(\omega_c+x)\cos[(\omega_c+x)t]dx$$

关于$\omega_c$奇对称

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_c}H_1(\omega_c-x)\{\cos[(\omega_c-x)t]-\cos[(\omega_c+x)t]\}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\sin\omega_c t\int_0^{\omega_c}H_1(\omega_c-x)\sin xt\,dx$$



$$\therefore\quad h_1(t)=\frac{2}{\pi}\sin\omega_c t\int_0^{\omega_c}H_1(\omega_c-x)\sin xt\,dx$$

相隔$T_s=\pi/\omega_c$的各点等于0

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}+h_1(t)$$

相隔$T_s=\pi/\omega_c$的各点等于0

- 符合无码间串扰的条件：

$$h(mT_s)=\begin{cases}1 & m=0\\ 0 & m\text{为其他整数}\end{cases}$$



- 常见：**正弦滚降频率特性**

$$|H(\omega)|=\begin{cases}1 & |\omega|\le(\omega_c-\Delta\omega)=\omega_c(1-r)\\ \frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\omega-\omega_c}{r\omega_c}\right) & \omega_c(1-r)\le|\omega|\le\omega_c(1+r)\\ 0 & |\omega|>\omega_c(1+r)\end{cases}$$

其中$r=\Delta\omega/\omega_c$称为**滚降因子**

- $r$的取值范围为0～1
- $r$=0：**零滚降**，即理想低通滤波器
- $r$=1：**单位滚降**，即**升余弦**频率特性

$$|H(\omega)|=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi\omega}{2\omega_c}\right) & |\omega|\le2\omega_c\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

- 升余弦频率特性的冲激响应为：

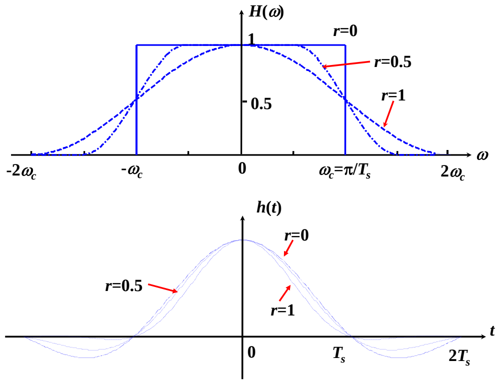
$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}\cdot\frac{\cos\omega_c t}{1-\left(\frac{2\omega_c t}{\pi}\right)^2}$$

- 一般滚降因子的正弦滚降频率特性若为线性相位，时延为：

$$\tau=\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}=t_0\quad\Rightarrow$$

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\omega_c(t-t_0)}\cdot\frac{\cos r\omega_c(t-t_0)}{1-\left[\frac{2r\omega_c(t-t_0)}{\pi}\right]^2}$$








- 采用正弦滚降时，信道的带宽为：

$$B=\frac{1}{2T_s}(1+r)$$

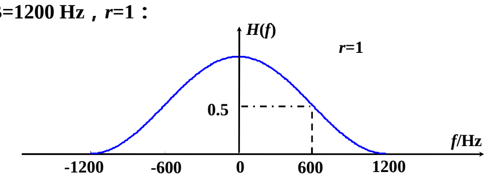
- 若规定带宽$B$，则每秒最高无码间串扰的传输脉冲数(脉冲传输速率)为：

$$v=\frac{1}{T_s}=\frac{2B}{(1+r)}$$

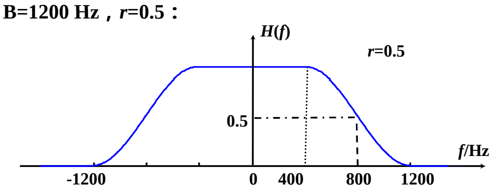
- 每秒最高无码间串扰的传输脉冲数为$B(r=1)$~$2B(r=0)$
- 每Hz带宽的脉冲传输速率为：$\frac{v}{B}=\frac{2}{(1+r)}$ 　理想情况
- 每Hz带宽每秒最高无码间串扰的传输脉冲数为1～2



- B=1200 Hz，$r$=1：

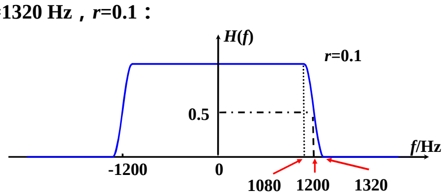



- B=1200 Hz，$r$=0.5：



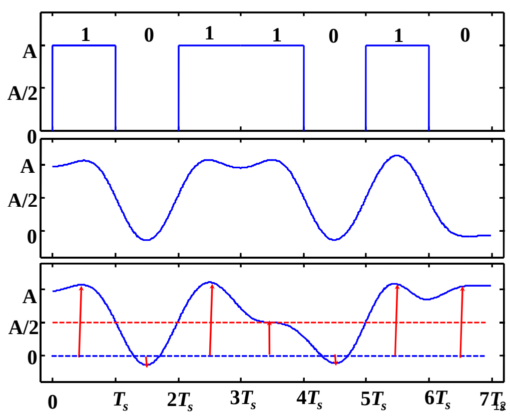



- B=1320 Hz，$r$=0.1：




## 四、信道噪声对基带信号传输的影响

- 在满足无码间串扰的条件下，信道噪声的影响，也会使抽样判决的结果出现错误
  - 传送1码时，若抽样时刻有较大的负幅度的噪声 → 相加后的抽样值低于判决电平 → 错判为0
  - 传送0码时，若抽样时刻有较大的正幅度的噪声 → 相加后的抽样值高于判决电平 → 错判为1



- 设系统发1和0的概率分别为$P(1)$和$P(0)$，发1错判为0和发0错判为1的条件概率分别为$P(0/1)$和$P(1/0)$，则总的误码率为：

$$P_e = P(0/1)P(1) + P(1/0)P(0)$$

- 若收到的信号加噪声的抽样值为$V$，判决电平为$b$，则有：

$$P_e = P[(V < b)/1]P(1) + P[(V > b)/0]P(0)$$

- 设发1和0时收到信号加噪声的抽样值的概率密度函数分别为$p_1(V)$和$p_0(V)$，则有：

$$P_e = P(1)\int_{-\infty}^{b} p_1(V)dV + P(0)\int_{b}^{\infty} p_0(V)dV$$

- 一般情况下，$P(1)=P(0)=0.5$，于是有：

$$P_e = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{b} p_1(V)dV + \int_{b}^{\infty} p_0(V)dV\right]$$



- 总的误码率$P_e$和$p_1(V)$、$p_0(V)$及$b$有关
- 当$p_1(V)$、$p_0(V)$一定，总存在一$b$(最佳判决电平)，使$P_e$最小
- 设$b_0$为最佳判决电平，则有：

$$0 = \frac{\partial P_e}{\partial b} = P(1)p_1(b) - P(0)p_0(b)$$

$$\Rightarrow \quad P(1)p_1(b_0) - P(0)p_0(b_0) = 0$$

- 若$P(1)=P(0)=0.5$，有：$p_1(b_0) = p_0(b_0)$

在二进制等概率情况下，最佳判决电平为$p_1(V)$和$p_0(V)$曲线交点所对应的$V$值

- 若信道噪声是零均值的平稳高斯噪声，因接收滤波器为线性系统，则它的输出$n_R(t)$也为均值为0的低频高斯噪声



- $n_R(t)$的概率密度函数设为：

$$p(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R}\exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_R^2}\right)$$

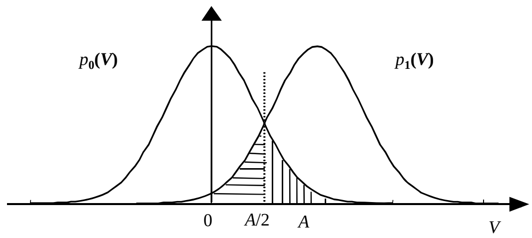
- 对单极性信号，设发1时的信号抽样值为$A$，则有：

$$V = \begin{cases} A + n_R(t) & 发1 \\ n_R(t) & 发0 \end{cases}$$

$$p_1(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b}\exp\left[-\frac{(V-A)^2}{2\sigma_b^2}\right]$$

$$p_0(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b}\exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_b^2}\right)$$






- 高斯分布的对称性，两曲线交点即最佳判决电平$b_0=A/2$
- 阴影部分为两种误码的条件概率
- 总的误码率为：

$$P_e = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{A/2} p_1(V)dV + \int_{A/2}^{\infty} p_0(V)dV\right]$$



- 高斯分布的对称性 → $P(1/0)=P(0/1)$

$$\therefore \quad P_e = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{A/2} p_1(V)dV + \int_{A/2}^{\infty} p_0(V)dV\right] = \int_{A/2}^{\infty} p_0(V)dV$$

$$= \int_0^{\infty} p_0(V)dV - \int_0^{A/2} p_0(V)dV = \frac{1}{2} - \int_0^{A/2} p_0(V)dV$$

$$= \frac{1}{2} - \int_0^{A/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R}\exp\left(-\frac{V^2}{2\sigma_R^2}\right)dV$$

- 令：$u = \dfrac{V}{\sqrt{2}\sigma_R}$， $\rightarrow V = \sqrt{2}\sigma_R u,\ dV = \sqrt{2}\sigma_R du$

$$\Rightarrow \quad P_e = \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R}\exp(-u^2)\left(\sqrt{2}\sigma_R du\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_R}}\exp(-u^2)du$$



$$\therefore \quad P_e = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_R}}\exp(-u^2)du\right]$$

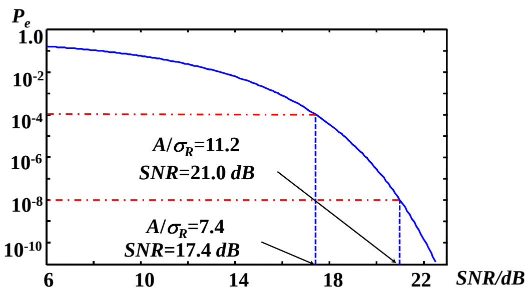
- Erf($x$)称为误差函数： $\mathrm{Erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x \exp(-u^2)du$
- Erfc($x$)称为互补误差函数： $\mathrm{Erfc}(x) = 1 - \mathrm{Erf}(x)$

$$\Rightarrow \quad P_e = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{Erf}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_R}\right)\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_R}\right)$$

- 设信号的峰值功率$S$和噪声的平均功率$N$分别表示为：

$$S = A^2, \quad N = \sigma_R^2 \quad \rightarrow \quad SNR = 10\lg\frac{S}{N}$$

$$\Rightarrow \quad P_e = \frac{1}{2}\mathrm{Erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2N}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10^{SNR/10}}{2}}\right)$$




- 若每秒传送$10^5$个码元
  - $SNR=17.4$ dB，$P_e=10^{-4}$ → 每0.1秒发生一个错码
  - $SNR=21.0$ dB，$P_e=10^{-8}$ → 每1000秒(约16分)发生一个错码



- **阈效应**：存在一狭窄范围，在此信噪比以上误码率很小；在其下，误码现象频繁发生
- **阈电平**：出现阈效应的这个信噪比
- 对二进码传输，阈电平选为16~18 dB(对应$A/\sigma_R$：6~8)之间

## § 3.6 匹配滤波器

- 接收信号的抽样值$r(kT_s)$为：

$$r(kT_s)=\text{信号取值}+\text{码间串扰}+\text{随机噪声}$$

判决依据

无码间串扰传输

- 设计一线性滤波器，使抽样时刻的信噪比最大 → 减小$P_e$
- 这种最佳滤波器称为**匹配滤波器**



## 一、匹配滤波器的传递函数

- 设线性滤波器传递函数为$H(\omega)$，输入的为信号与噪声之和：

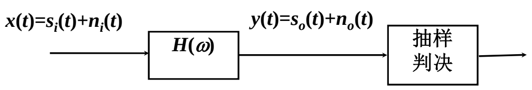
$$x(t)=s_i(t)+n_i(t)$$

信号与噪声互不相关

噪声的功率谱密度为$P_n(\omega)$，信号的傅里叶变换为$S_i(\omega)$

- 线性滤波器 → 滤波器的输出也包含信号与噪声两部分

$$y(t)=s_o(t)+n_o(t)$$






- 求线性滤波器$H(\omega)$，使抽样时刻$t_0$的信噪比最大
- 信号经过滤波器的输出为：

$$S_o(\omega)=H(\omega)S_i(\omega) \quad\Rightarrow\quad s_o(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)S_i(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- 输出噪声的平均功率为：

$$N_o(\omega)=|H(\omega)|^2P_n(\omega) \quad\Rightarrow$$

$$N_o=\overline{n_o^2(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2P_n(\omega)d\omega$$

- 抽样时刻$t_0$输出信号的瞬时功率和噪声的平均功率之比$r$为：

$$r=\frac{|S_o(t_0)|^2}{N_o}=\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)S_i(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2P_n(\omega)d\omega}$$



- **施瓦茨不等式**：若$F_1(\omega)$和$F_2(\omega)$为复变函数，则有

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\omega)F_2(\omega)d\omega\right|^2\le\int_{-\infty}^{\infty}|F_1(\omega)|^2d\omega\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|F_2(\omega)|^2d\omega$$

只有当$F_1(\omega)=kF_2^*(\omega)$ ($k$为任意常数)时，等号成立

- 令： $F_1(\omega)=\sqrt{P_n(\omega)}H(\omega) \quad F_2(\omega)=\frac{S_i(\omega)}{\sqrt{P_n(\omega)}}e^{j\omega t_0}$

$$r=\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)S_i(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2P_n(\omega)d\omega}$$

$$\le\frac{\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\omega)|H(\omega)|^2d\omega\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S_i(\omega)e^{j\omega t_0}|^2}{P_n(\omega)}d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2P_n(\omega)d\omega}$$



$$r\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S_i(\omega)|^2}{P_n(\omega)}d\omega$$

- 只有当下式成立时，不等式为等号：

$$\sqrt{P_n(\omega)}H(\omega)=k\left[\frac{S_i(\omega)}{\sqrt{P_n(\omega)}}e^{j\omega t_0}\right]^* \quad\to\quad H(\omega)=k\frac{S_i^*(\omega)}{P_n(\omega)}e^{-j\omega t_0}$$

匹配滤波器的含义

- 匹配滤波器：在抽样时刻获得最大信噪比的最佳滤波器
- 若噪声为白噪声：$P_n(\omega)=n_0/2$

$$H(\omega)=kS_i^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$r_{\max}=\frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_i(\omega)|^2d\omega}{n_0/2}=\frac{2E}{n_0}$$

信号能量

## 二、匹配滤波器的冲激响应

- 匹配滤波器的冲激响应$h(t)$为：

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}kS_i^*(\omega)e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k\left[\int_{-\infty}^{\infty}s_i(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]^*e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega$$
$$=k\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega(\tau-t_0+t)}d\omega\right]s_i^*(\tau)d\tau$$
$$=k\int_{-\infty}^{\infty}s_i^*(\tau)\delta(\tau-t_0+t)d\tau=ks_i^*(t_0-t)$$

- 对于实信号$s_i(t)$，有： $h(t)=ks_i(t_0-t)$



- 为保证匹配滤波器的物理可实现性，$h(t)$应为因果信号：

$$h(t)=ks_i^*(t_0-t)=\begin{cases}\neq 0 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$
$$h(t)=0,t<0\quad\rightarrow\quad s_i^*(t)=0,t>t_0$$

- $h(t)$为输入信号$s_i^*(t)$的镜像$s_i^*(-t)$在时间轴上平移$t_0$
- 若输入信号$s_i^*(t)$的持续时间为$(0，T_s)\rightarrow h(t)$的持续时间可以为$(t_0-T_s，t_0)\rightarrow t_0\geq T_s$，匹配滤波器才是物理可实现的
- 一般希望$t_0$尽量小，故常取：$t_0=T_s$

## 三、匹配滤波器的输出信号

- 信号$s_i(t)$经过匹配滤波器$h(t)$的输出为：



$$s_o(t)=h(t)*s_i(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s_i(t-\tau)h(\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}s_i(t-\tau)ks_i^*(t_0-\tau)d\tau$$

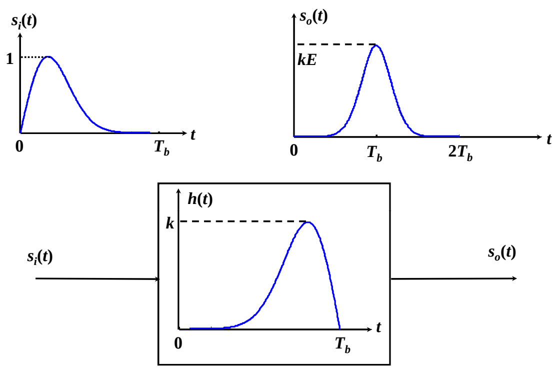
- 令： $\tau'=t-\tau\quad\rightarrow\quad\tau=t-\tau',d\tau=-d\tau'$

$$s_o(t)=k\int_{\infty}^{-\infty}s_i(\tau')s_i^*[t_0-(t-\tau')](-d\tau')$$
$$=k\int_{-\infty}^{\infty}s_i(\tau')s_i^*(\tau'+t_0-t)d\tau'$$
$$=kR_{s_i}(t-t_0)$$

**匹配滤波器的输出信号就是输入信号的自相关函数**

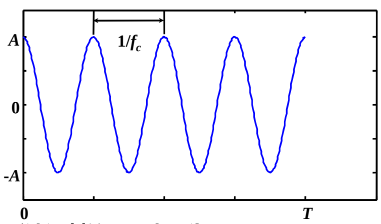
- 当$t=t_0$， $s_o(t_0)=kR_{s_i}(t_0-t_0)=kR_{s_i}(0)=kE$








**例1** 图为一矩形波调制信号，试求接收该信号的匹配滤波器的冲激响应和输出波形。



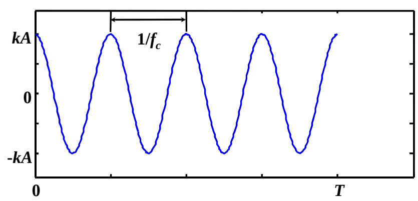

**解：** 矩形波调制信号可表示为：

$$s_i(t)=\begin{cases}A\cos\omega_c t & 0\leq t\leq T\\ 0 & \text{else}\end{cases}\quad\text{其中 } T=4T_c=\frac{8\pi}{\omega_c}$$



- 取$t_0=T$，匹配滤波器的冲激响应为：

$$h(t)=ks_i(T-t)=\begin{cases}kA\cos\omega_c(T-t) & 0\leq t\leq T\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$
$$kA\cos\omega_c(T-t)=kA\cos(\omega_c T-\omega_c t)=kA\cos(8\pi-\omega_c t)=kA\cos\omega_c t$$
$$\therefore\quad h(t)=\begin{cases}kA\cos\omega_c t & 0\leq t\leq T\\ 0 & \text{else}\end{cases}=ks_i(t)$$



- **输出信号为$h(t)$和$s_i(t)$的卷积：**

$$s_o(t)=h(t)*s_i(t)=k\int_{-\infty}^{\infty}s_i(\tau)s_i(t-\tau)d\tau$$

**当$t<0$时：** $s_o(t)=k\int_{-\infty}^{\infty}s_i(\tau)s_i(t-\tau)d\tau=0$

**当$0\le t\le T$时：**

$$s_o(t)=k\int_{-\infty}^{\infty}s_i(\tau)s_i(t-\tau)d\tau=k\int_0^t s_i(\tau)s_i(t-\tau)d\tau$$

$$=k\int_0^t A\cos\omega_c\tau\cdot A\cos\omega_c(t-\tau)d\tau$$

$$=kA^2\cos\omega_c t\int_0^t\cos^2\omega_c\tau d\tau+kA^2\sin\omega_c t\int_0^t\cos\omega_c\tau\sin\omega_c\tau d\tau$$

$$=kA^2\cos\omega_c t\left[\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{4\omega_c}\sin 2\omega_c\tau\right]_0^t+kA^2\sin\omega_c t\left[-\frac{1}{4\omega_c}\cos 2\omega_c\tau\right]_0^t$$



$$\therefore s_o(t)=\frac{1}{2}kA^2(t-0)\cos\omega_c t+kA^2\frac{\cos\omega_c t}{4\omega_c}(\sin 2\omega_c t-0)$$

$$-kA^2\frac{\sin\omega_c t}{4\omega_c}(\cos 2\omega_c t-1)=\frac{1}{2}kA^2t\cos\omega_c t+\frac{kA^2}{4\omega_c}\cos\omega_c t\sin 2\omega_c t$$

$$-\frac{kA^2}{4\omega_c}\sin\omega_c t\cos 2\omega_c t+kA^2\frac{\sin\omega_c t}{4\omega_c}=\frac{1}{2}kA^2t\cos\omega_c t+kA^2\frac{\sin\omega_c t}{4\omega_c}$$

$$-kA^2\frac{\sin\omega_c t}{4\omega_c}=\frac{1}{2}kA^2t\cos\omega_c t$$

**当$T\le t\le 2T$时：**

$$s_o(t)=k\int_{-\infty}^{\infty}s_i(\tau)s_i(t-\tau)d\tau=k\int_{t-T}^{T}s_i(\tau)s_i(t-\tau)d\tau$$

$$=k\int_{t-T}^{T}A\cos\omega_c\tau\cdot A\cos\omega_c(t-\tau)d\tau$$

$$=kA^2\cos\omega_c t\int_{t-T}^{T}\cos^2\omega_c\tau d\tau+kA^2\sin\omega_c t\int_{t-T}^{T}\cos\omega_c\tau\sin\omega_c\tau d\tau$$



$$\therefore s_o(t)=kA^2\cos\omega_c t\left[\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{4\omega_c}\sin 2\omega_c\tau\right]_{t-T}^{T}+kA^2\sin\omega_c t\left[-\frac{1}{4\omega_c}\cos 2\omega_c\tau\right]_{t-T}^{T}$$

$$=\frac{1}{2}kA^2[T-(t-T)]\cos\omega_c t+kA^2\frac{\cos\omega_c t}{4\omega_c}[\sin 2\omega_c T-\sin 2\omega_c(t-T)]$$

$$-kA^2\frac{\sin\omega_c t}{4\omega_c}[\cos 2\omega_c T-\cos 2\omega_c(t-T)]=\frac{1}{2}kA^2(2T-t)\cos\omega_c t$$

$$+\frac{kA^2}{4\omega_c}\cos\omega_c t\left[\sin\left(2\times\frac{8\pi}{T}\times T\right)-\sin 2\omega_c t\cos 2\omega_c T+\cos 2\omega_c t\sin 2\omega_c T\right]$$

$$-\frac{kA^2}{4\omega_c}\sin\omega_c t\left[\cos\left(2\times\frac{8\pi}{T}\times T\right)-\cos 2\omega_c t\cos 2\omega_c T-\sin 2\omega_c t\sin 2\omega_c T\right]$$

$$=\frac{1}{2}kA^2(2T-t)\cos\omega_c t+kA^2\frac{\cos\omega_c t}{4\omega_c}(-\sin 2\omega_c t)-kA^2\frac{\sin\omega_c t}{4\omega_c}(1-\cos 2\omega_c t)$$



$$\rightarrow s_o(t)=\frac{1}{2}kA^2(2T-t)\cos\omega_c t-kA^2\frac{\sin\omega_c t}{4\omega_c}$$

$$-kA^2\frac{(\sin 2\omega_c t\cos\omega_c t-\cos 2\omega_c t\sin\omega_c t)}{4\omega_c}$$

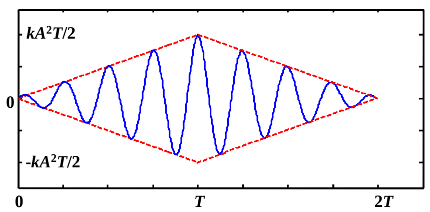
$$=\frac{1}{2}kA^2(2T-t)\cos\omega_c t-kA^2\frac{\sin\omega_c t}{4\omega_c}+kA^2\frac{\sin\omega_c t}{4\omega_c}$$

$$=\frac{1}{2}kA^2(2T-t)\cos\omega_c t$$

**当$t>2T$时：** $s_o(t)=k\int_{-\infty}^{\infty}s_i(\tau)s_i(t-\tau)d\tau=0$

$$\therefore\quad s_o(t)=\begin{cases}\dfrac{kA^2t}{2}\cos\omega_c t & 0\le t\le T\\ \dfrac{kA^2(2T-t)}{2}\cos\omega_c t & T\le t\le 2T\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$






## 四、积分和消除匹配滤波器

- **考虑矩形脉冲作为传输信号的匹配滤波器：**

$$s_i(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le T_b\\ 0 & \text{else}\end{cases}=rect\left(\frac{t-\frac{T_b}{2}}{T_b}\right)$$



- **矩形脉冲对应的频谱为：** $S_i(\omega)=\frac{1}{j\omega}(1-e^{-j\omega T_b})$
- **对应的匹配滤波器的传输函数为：**

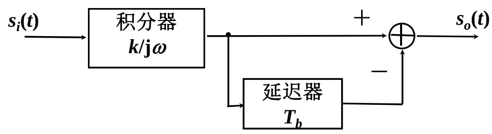
$$H(\omega)=kS_i^*(\omega)e^{-j\omega t_0}=\left[\frac{k}{j\omega}(1-e^{-j\omega T_b})\right]^*e^{-j\omega t_0}$$

$$=\frac{k}{-j\omega}(1-e^{j\omega T_b})e^{-j\omega t_0}$$

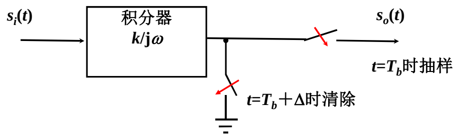
- **取$t_0=T_b$** $\rightarrow h(t)=ks_i(T_b-t)$

$$H(\omega)=\frac{k}{-j\omega}(1-e^{j\omega T_b})e^{-j\omega T_b}=\frac{k}{-j\omega}(e^{-j\omega T_b}-1)$$

$$=\frac{k}{j\omega}(1-e^{-j\omega T_b})$$




- 矩形脉冲与相应的$h(t)$ (也为矩形脉冲) 卷积 → 持续时间为$2T_b$的三角形脉冲 → $t=T_b$时有最大值$kT_b$
- 抽样在$t=T_b$进行，$t>T_b$的输出无用处，且会对下一码元信号产生串扰，必须清除掉 → 延迟器没有作用






## 五、匹配滤波器的相关实现

- 输入值为信号和噪声的叠加：

$$x(t)=s_i(t)+n(t)$$
$$s_i(t)=0 \quad \text{if } t\notin[0,T_b]$$

- 匹配滤波器的冲激响应为：

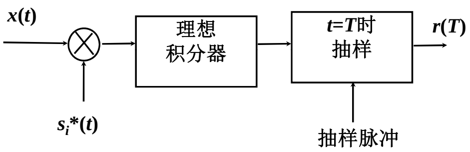
$$h(t)=ks_i^*(T_b-t)$$
$$h(t)=0 \quad \text{if } t\notin[0,T_b]$$

- 输入值经过匹配滤波器的输出为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$



$$\rightarrow \quad y(T_b)=\int_{-\infty}^{\infty}h(T_b-\tau)x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}ks_i^*(\tau)x(\tau)d\tau$$
$$=\int_{0}^{T_b}ks_i^*(\tau)x(\tau)d\tau$$




- $s_i*(t)$需与输入信号同步



## § 3.7 纠错编码

- 采用差错控制编码技术(纠错编码)可以减小信道噪声对判决错误的影响
- 三类信道
  - 随机信道：错码随机出现，且统计独立(高斯白噪声引起的错码具有该性质)
  - 突发信道：错码成串集中出现(各种脉冲的干扰)
  - 混合信道：既存在随机错码，又存在突发错码
- 不同类型信道，采用不同的纠错编码技术
- 下面仅讨论随机错码情况



## 一、常用的差错控制方法

- 四种常用的差错控制方法：

### 1、反馈校验法

- 将收到信码再发回发信端，与原码进行比较，出现错误就再发一次原信号
- 设备简单，但需双向信道，效率较低

### 2、检错重发法

- 收信端检测收到的信码，发现错误时通知发信端再发一次，直到正确为止
- 检测有错码指：发现接收码元中有一个或多个码元是错的，但不知错码的具体位置
- 需双向信道



### 3、前向纠错法

- 收信端在收到的信码中不仅能发现错码，而且能纠正错码
- 二进制码系统，能确定错码的位置 → 纠正错码
- 只需单向信道，实时性好，但纠错设备比检错设备复杂

### 4、纠检结合法

- 结合检错重发和前向纠错技术：错码个数在纠错能力内就纠错，否则就采用检错重发
- 需双向信道

## 二、纠错编码的基本原理

- 3位二进制的码组 → 8种组合 000 001 010 011 100 101 110 111
- 任一码组若发生一个或多个错码 → 另一码组 → 接收端无法发现错码

- 8种组合中只使用4种： 000 011 101 110 (奇数个0)
- 接收端可发现任一码组只出现一个错码的情况，不能发现出现两个错码的情况
  - 000 → 100 001 001 (禁用码：不使用的码组)
  - 000 → 011 101 110 (可用码组)
- 只能发现一个错码，但不能纠正错码
  - 000 → 100  101 → 100  110→100
- 要纠正错码，需增加码位富余度
- 8种组合中只使用2种：000 111
- 可以发现出现1个或2个错码的情况
  - 000 → 100 001 001， 000 → 110 101 011
- 要纠正错码，需有适当的假设：检测到错码，便认为只发生1个错码(概率比出现2个或3个错码的概率大得多)
  - 000 → 100 → 000

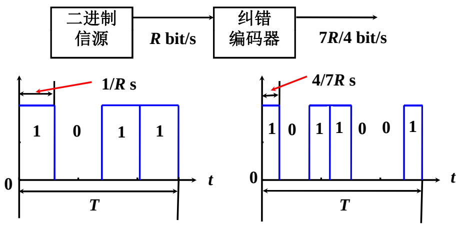
51 43

- 8种组合中只使用2种：000 111，可用于检测2个错码或纠正1个错码
- 3 bit码组可视为：第一位为信息码元，后两位为监督码元
  结论：附加监督码元可使码组有一定的检错甚至纠错能力
- 两个基本概念：码距和最小码距
  - 码距$d$：码集(码组集合)中任意两个码组间对应位上数字不同的个数，称为这两个码组的汉明距离，简称码距
    - 000,111→$d$=3；011,101→$d$=2；100,101→$d$=1
  - 最小码距$d_0$：码集中，各码组间汉明距离的最小值
    - {000,001,010,011,100,101,110,111}→$d_0$=1
    - {000,011,101,110}→$d_0$=2
    - {000,111}→$d_0$=3
- 码距反映了码组间的差别
- 最小码距反映了码集中任意两个码组间的最小差别
  - 最小码距越大，某一码组错为另一码组的可能性越小，检错或纠错能力越强

- 最小码距是衡量纠错编码检错、纠错能力的指标
  - 若最小码距满足$d_0 \ge e+1$，则具有检测$e$个错码的能力(最小码距比错码个数$e$至少大1时，不可能变成另1个许可码组)
    - {000,001,010,011,100,101,110,111}→$d_0$=1→$e$=0
    - {000,011,101,110}→$d_0$=2→$e$=1
    - {000,111}→$d_0$=3→$e$=2
  - 若最小码距满足$d_0 \ge 2t+1$，则具有纠正$t$个错码的能力(某码组发生$t$个错码后，形成的错误码组比另一许可码组错$t$个码后的距离至少大1，两种错误不会混淆)
    - {000,001,010,011,100,101,110,111}→$d_0$=1→$t$=0
    - {000,011,101,110}→$d_0$=2→$t$=0
    - {000,111}→$d_0$=3→$t$=1
  - 若最小码距满足$d_0 \ge t+e+1$ ($e>t$)，则具有纠正$t$个错码、同时检测$e$个错码的能力
    - {000,111}→$d_0$=3→$e$=1，$t$=0
    - {0000,1111}→$d_0$=4→$e$=2，$t$=1 0001→0000 0011→?

51 45

- (7,4)码是一种汉明码，4 bit信息码元+3 bit监督码元=7个码元
- 设未采用纠错编码时传输速率为$R$ bit/s → 每个码元所占时间为1/$R$ s → 每个码组(4个码元)所占时间$T$=4/$R$ bit
- 设每个码元的错误概率为$P_{e1}$
- 采用(7,4)码，在$T$时间内需传输7个码元→每个码元所占时间为4/7$R$ bit→传输带宽增加到7/4




51 46

- 未采用纠错编码时，传输1个码组错1个码元的概率为：

$$P_1 = C_4^1 P_{e1}(1-P_{e1})^3 \xrightarrow{P_{e1}<<1} P_1 \approx 4P_{e1}$$

- 此时错2个码元的概率为：

$$P_2 = C_4^2 P_{e1}^2(1-P_{e1})^2 \xrightarrow{P_{e1}<<1} P_2 \approx 6P_{e1}^2 << 4P_{e1} \approx P_1$$

- 错3个或4个码元的概率更小 → 总的错误概率为：

$$P_e \approx P_1 \approx 4P_{e1}$$

- 采用(7,4)码，传输带宽增加到7/4倍，若白噪声的功率谱密度不变 → 噪声功率(=功率谱密度×带宽)增大到7/4倍
- 信号功率不变 → 信噪比下降到4/7，即下降2.43 dB → 每个码元的误码率$P'_{e1}$增加

51 47

- 但此时错1个码元会被纠正，错2个码元的概率为：

$$P_2' = C_7^2 P_{e1}'^2(1-P_{e1}')^5 \xrightarrow{P_{e1}'<<1} P_2' \approx 21P_{e1}'^2$$

- 错3个码元的概率为：

$$P_3' = C_7^3 P_{e1}'^3(1-P_{e1}')^4 \xrightarrow{P_{e1}'<<1} P_3' \approx 35P_{e1}'^3 << 21P_{e1}'^2 \approx P_2'$$

- 错4个至7个码元的概率更小 → 总的错误概率为：

$$P_e' \approx P_2' \approx 21P_{e1}'^2$$

- 以单极性信号为例，若$P_{e1}=10^{-5}$ ↔ 相当于信噪比18.63 dB

$$P_e \approx 4P_{e1} = 4\times10^{-5}$$

- 纠错编码后，信噪比下降2.43 dB → 16.20 dB → $P'_{e1}$=6.3×10$^{-4}$

51 48

- 虽然 $P'_{e1} > P_{e1}$ ，但是

$$P'_e \approx 21P'^2_{e1} = 21\times(6.3\times10^{-4})^2 = 8.6\times10^{-6} < 4\times10^{-5} = P_e$$

三、简单的纠错编码

**1、奇偶监督码**

- 奇偶监督码又称奇偶校验码
- 分奇监督码和偶监督码两种
- 两者原理相同，以奇监督码为例：无论信息码有多少位，监督码只有1位($a_0$)，它使码组中1的个数为奇数

$$a_{n-1}\oplus a_{n-2}\oplus\cdots\oplus a_1\oplus a_0 = 1$$

- 能检测奇数个错码



**2、等比码**

- 等比码：每个码组中1和0的数目相同(1和0的数目之比恒定)
- “5中取3”等比码：码组长度为5，含1的数目为3

$$C_5^3 = 10$$

- 用来表示10个10进制数字

| 10进制数字 | 等比码 | 10进制数字 | 等比码 |
|---|---|---|---|
| 1 | 01011 | 6 | 10101 |
| 2 | 11001 | 7 | 11100 |
| 3 | 10110 | 8 | 01110 |
| 4 | 11010 | 9 | 10011 |
| 5 | 00111 | 0 | 01101 |



$$2^5 = 32 \quad 32-10 = 22$$

- “5中取3”等比码：22个码组为禁用码组
- “7中取3”等比码

$$C_7^3 = 35 \quad 2^7 = 64$$

- “7中取3”等比码有35个许用码组可表示26个英文字母和常用符号；有29个禁用码组
- 等比码优点：简单、检错能力很强
- 除1错为0和0错为1成对出现的那些差错外，其他错码均能检测出来