Chapter 12 球坐标系下的分离变量法

Legendre 多项式和球谐函数

Abstracts
正交曲线坐标系及在此坐标系下 Laplace 算术的表示；
球极坐标系下的变量分离法及由此得出的特殊函数（例如，
Legendre 函数、连带 Legendre 函数和球谐函数等）。

函数空间概念（复习）

3D：基矢：$\{\vec{e}_j\}\,(j=1,2,3)$；正交：$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$；表示：$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$，这是 3D Euclid space，直观、简单、符合常识。

(3+1)D：是加t，还是加$it\vec{e}_4$，如何去加？时空观的变革：相对运动，不但有了相对时空位置，还有了 scaling（标尺）、不变性和时空弯曲等概念。

nD：基矢是$\{\varphi_j(x)\}\,(j=1,2,3,\cdots,n)$，带权$\rho(x)$的正交归一性如下：

$\int\rho(x)\varphi_i^*(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x=\delta_{ij}\Rightarrow\infty$ D：Hilbert space. 基矢亦是函数，并且 straight scaling$\rightarrow$curve scaling. j：quantum numbers. 抽象、复杂、冲破常识！

对于任意函数$f(x)$，只要其定义域与$\{\varphi_j(x)\}$的相同，总有$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$，

其中$\int\mathrm{d}x\rho(x)\varphi_m^*(x)f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int\rho(x)\varphi_m^*(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=c_m$ is a representation!

当$f(x)$已知时，c_n是上式；当$f(x)$是$\varphi_n(x)$的线性组合时，c_n是其系数。

1. nD 向量空间：有nD 向量的集合.

   1) 表述：n个独立的单位矢量$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$排成基向量，选$\{\vec{e}_j\}$为正交归一基矢，即$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$，则$\vec{x}=\sum_{j=1}^{n}x_j\vec{e}_j$和$x_j=\vec{x}\cdot\vec{e}_j$（在$\vec{e}_j$上的坐标值—表示）。

   2) 内积：$\vec{x}\cdot\vec{y}=(\vec{x},\vec{y})=\sum_{j=1}^{n}x_j^*y_j$.

   3) 模方：$(\vec{x},\vec{x})=\sum_{j=1}^{n}x_j^*x_j=\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2=|\vec{x}|^2$.

   4) 基矢的完备性：nD 空间有 1D 矢量系$\{\vec{e}_j\}\,(j=1,2,\cdots,n)$，若不能在此空间

找出一个简单向量 $\vec{f}$ ，使 $\vec{f}$ 与 $\{\vec{e}_j\}$ 正交，则称为完备系， $\vec{x}=\sum_{j=1}^{n}x_j\vec{e}_j$.

2．函数空间（Hilbert space）：在域 $x[a,b]$ 上分段连续、平方可积的函数 $\varphi(x)$ [$\int_a^b\rho(x)\varphi^*(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 有限]的集合所排成的空间称为Hilbert space.

1） 正交函数系：如① $x[0,l]$ 内的 $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right\}$ 和 $\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right\}$,

② $x[-l,l]$ 内的 $\left\{1,\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right\}$ 均为完备基。

一般带权正交函数系的定义：设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$, 在 $x[a,b]$ 上有

$$\left(\varphi_m(x),\varphi_n(x)\right)=\int_a^b\rho(x)\varphi_m^*(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=N_n^2\delta_{mn},$$

则称 $\{\varphi_n(x)\}$ 是在 $x[a,b]$ 上的带权[$\rho(x)>0$]正交函数系。把 $\left(\varphi_n(x),\varphi_n(x)\right)=\int_a^b\rho(x)\varphi_n^*(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\|\varphi_n(x)\|^2=N_n^2$ 称为模之平方，若 $N_n^2=1$ （对于所有的 n ）称为 $\{\varphi_j(x)\}$ 为正交归一函数系 $\left\{\frac{\varphi_n(x)}{N_n}\right\}$

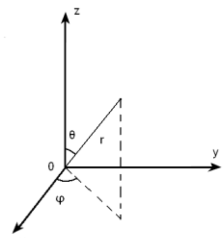
(A set of orthogonal complete normalized function bases).

2） 广义Fourier展开(expansion)：若 $\varphi_n(x)$ 是 $x[a,b]$ 上的正交完备系，则 $x[a,b]$ 上任意分段连续（平方可积）的函数 $f(x)$ 均可表示为

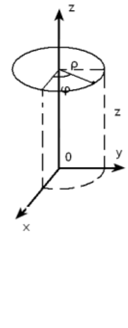
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x),\ \text{其中}\ c_n=\frac{\int_a^b f(x)\varphi_n^*(x)\rho(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_n^*(x)\rho(x)\mathrm{d}x}.$$

一、 正交曲线坐标系

1．从直角坐标系到正交曲线坐标系



球坐标系 (r,θ,φ) 关系: $\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=r\cos\theta.\end{cases}$



柱坐标系 (ρ,φ,z) 关系: $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ z=z.\end{cases}$

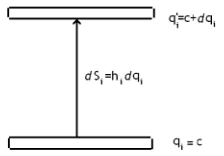
一般曲线坐标系 (q_1, q_2, q_3) 关系: $\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3), \end{cases}$

满足 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial q_1 & \partial x/\partial q_2 & \partial x/\partial q_3 \\ \partial y/\partial q_1 & \partial y/\partial q_2 & \partial y/\partial q_3 \\ \partial z/\partial q_1 & \partial z/\partial q_2 & \partial z/\partial q_3 \end{vmatrix} \neq 0$ (变换条件).

如果三族坐标线是处处相互正交的，则称这种坐标系为正交曲线坐标系。

如何判断一个坐标系是否为正交坐标系？ 可以通过计算弧元长度:

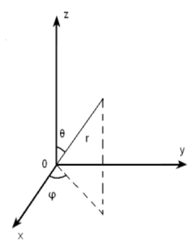
$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}s)^2 &= (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3\right)^2 \\
&= \sum_{i,j=1,2,3} g_{ij}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_j,
\end{aligned}$$



其中， $g_{ij} = g_{ji} = \dfrac{\partial x}{\partial q_i}\dfrac{\partial x}{\partial q_j} + \dfrac{\partial y}{\partial q_i}\dfrac{\partial y}{\partial q_j} + \dfrac{\partial z}{\partial q_i}\dfrac{\partial z}{\partial q_j}$. 如果 $g_{ij} = g_{ii}\delta_{ij}$， 则称此坐标系为正交曲线坐标系。这是因为沿坐标轴 q_i 的弧元长度为 $\mathrm{d}s_i = h_i\mathrm{d}q_i$，而 $h_i = \sqrt{g_{ii}}$ 称为坐标曲线 q_i 的度规因子； $(\mathrm{d}s)^2 = h_1^2(\mathrm{d}q_1)^2 + h_2^2(\mathrm{d}q_2)^2 + h_3^2(\mathrm{d}q_3)^2$. 如果 $g_{ij}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_j = (h_i\mathrm{d}q_i)^2\delta_{ij}$，即各个坐标曲线的相互投影为零，则它们之间相互正交。

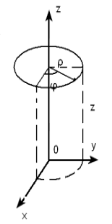
例如，对于球坐标系，

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}s)^2 &= (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 \\
&= (\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}r + r\cos\theta\cos\varphi\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi)^2 \\
&\quad + (\sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}r + r\cos\theta\sin\varphi\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}\varphi)^2 \\
&\quad + (\cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\theta)^2 \\
&= (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2.
\end{aligned}$$



球坐标系是正交曲线坐标系，$h_r = \sqrt{g_{11}} = 1$，$h_\theta = \sqrt{g_{22}} = r$，$h_\varphi = \sqrt{g_{33}} = r\sin\theta$.

对于柱坐标系，



$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}s)^2 &= (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 \\
&= (\cos\varphi \mathrm{d}\rho - \rho\sin\varphi \mathrm{d}\varphi)^2 + (\sin\varphi \mathrm{d}\rho + \rho\cos\varphi \mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2 \\
&= (\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2(\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ 柱坐标系也是正交曲线坐标系，且

$$h_\rho = \sqrt{g_{11}} = 1，\ h_\phi = \sqrt{g_{22}} = \rho,\ h_z = \sqrt{g_{33}} = 1.$$

2．δ 函数在正交曲线坐标系中的表达式

在直角坐标系中，$\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$.

设 $\vec{r}\,'$ 点对应于直角坐标系 (x', y', z') 的新坐标为 (q_1', q_2', q_3')，即

$\begin{cases} x' = x(q_1', q_2', q_3') \\ y' = y(q_1', q_2', q_3') \\ z' = z(q_1', q_2', q_3') \end{cases}$，并设 $f(x, y, z)$ 在点 (x', y', z') 附近为连续的任意函数，

按 δ 函数的定义，有

$$\iiint f(x, y, z)\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = f(x', y', z').$$

左边的积分可以作变量代换，而右边的函数作上述变量代换，有

$$
\begin{aligned}
&\iiint f\left[x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)\right]\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \\
&\quad \times \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)}\right| \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3 = f\left[x(q_1', q_2', q_3'), y(q_1', q_2', q_3'), z(q_1', q_2', q_3')\right].
\end{aligned}
$$

另一方面，由 δ 函数的定义，又有

$$
\begin{aligned}
&\iiint f\left[x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)\right]\delta(q_1 - q_1')\delta(q_2 - q_2')\delta(q_3 - q_3') \\
&\quad \times \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3 = f\left[x(q_1', q_2', q_3'), y(q_1', q_2', q_3'), z(q_1', q_2', q_3')\right].
\end{aligned}
$$

比较上面两式，由于 f 是任意函数，得到

$$\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)}\right| = \delta(q_1 - q_1')\delta(q_2 - q_2')\delta(q_3 - q_3'),$$

即在一般正交曲线坐标系中，δ 函数的表达式为

$$\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') = \frac{\delta(q_1 - q_1')\delta(q_2 - q_2')\delta(q_3 - q_3')}{\left|\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)}\right|}.$$

在正交曲线坐标系中，由六个面 $q_1, q_1 + \mathrm{d}q_1, q_2, q_2 + \mathrm{d}q_2, q_3, q_3 + \mathrm{d}q_3$ 所构

成的体积元为 $\mathrm{d}\tau=\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)}\right|\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3=h_1h_2h_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$.

因此，$\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')=\dfrac{\delta(q_1-q_1')\delta(q_2-q_2')\delta(q_3-q_3')}{h_1h_2h_3}$.

球坐标系中，$h_r=1$，$h_\theta=r$，$h_\varphi=r\sin\theta$,

$$\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')=\frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')}{r^2\sin\theta}.$$

柱坐标系中，$h_\rho=1$，$h_\varphi=\rho$，$h_z=1$,

$$\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')=\frac{\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z')}{\rho}.$$

平面极坐标系中，$h_\rho=1$，$h_\varphi=\rho$,

$$\delta(x-x')\delta(y-y')=\frac{\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')}{\rho}.$$

由体积元 $\mathrm{d}\tau=h_1h_2h_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$ 知道，球坐标系中体积元为 $r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$, 权重函数分别为 $(r^2,\sin\theta,1)$. 柱坐标系中体积元为 $\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{dz}$, 权重函数分别为 $(\rho,1,1)$.

3．场量的梯度(grade: ∇u)，散度(divergence: $\nabla\cdot\vec{A}$)，旋度(rotation: $\nabla\times\vec{A}$)和 Laplace 算符 ∇^2 等在正交曲线坐标系中的表达式

（1）标量 $u(q_1,q_2,q_3)$ 的梯度 ∇u 是一个矢量，在直角坐标系中的表达式是

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\hat{k},$$

其中 $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ 分别是 3D 实空间中三个坐标轴的单位矢量。

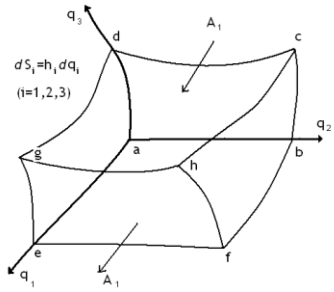
在一般正交曲线坐标系中，∇u 的三个分量定义为沿三条坐标轴的变化率 $\dfrac{\partial u}{\partial s_i}$，如以 $\hat{e}_i\ (i=1,2,3)$ 分别表示点 (q_1,q_2,q_3) 沿三条坐标线的单位矢量，就有

$$\nabla u=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial s_i}\hat{e}_i=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial u}{\partial q_i}\hat{e}_i.\quad (\text{Note: } \mathrm{d}s_i=h_i\mathrm{d}q_i)$$

（2）矢量 $\vec{A}(q_1,q_2,q_3)=A_1\hat{e}_1+A_2\hat{e}_2+A_3\hat{e}_3$ 的散度 $\nabla\cdot\vec{A}$ 是一个标量，定义为：

以 S 记体积元的边界面，$\mathrm{d}\vec{S}$ 表示大小为 $\mathrm{d}S$，方向为面积元外法线方向的矢量，则 $\iint\limits_S \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 是 $\vec{A}$ 通过边界面 S 的通量，而 $a(q_1,q_2,q_3)$ 点的散度是

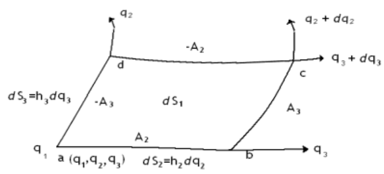
$$\nabla\cdot\vec{A}=\iint\limits_S \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,/\,\mathrm{d}\tau\,.$$



通过坐标面 q_1 的通量是 $\left[(-A_1)h_2\mathrm{d}q_2h_3\mathrm{d}q_3\right]_{q_1}$，

通过坐标面 $q_1+\mathrm{d}q_1$ 的通量是 $\left[A_1h_2\mathrm{d}q_2h_3\mathrm{d}q_3\right]_{q_1+\mathrm{d}q_1}$；

通过坐标面 q_2 的通量是 $\left[(-A_2)h_1\mathrm{d}q_1h_3\mathrm{d}q_3\right]_{q_2}$，



通过坐标面 $q_2+\mathrm{d}q_2$ 的通量是 $\left[A_2h_1\mathrm{d}q_1h_3\mathrm{d}q_3\right]_{q_2+\mathrm{d}q_2}$；

通过坐标面 q_3 的通量是 $\left[(-A_3)h_1\mathrm{d}q_1h_2\mathrm{d}q_2\right]_{q_3}$，

通过坐标面 $q_3+\mathrm{d}q_3$ 的通量是 $\left[A_3h_1\mathrm{d}q_1h_2\mathrm{d}q_2\right]_{q_3+\mathrm{d}q_3}$.

因此，

$$\nabla\cdot\vec{A}=\partial_{q_1}A_1+\partial_{q_2}A_2+\partial_{q_3}A_3=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(A_1h_2h_3\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(A_2h_3h_1\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(A_3h_1h_2\right)\right].$$

（3）矢量 $\vec{A}(q_1,q_2,q_3)=A_1\hat{e}_1+A_2\hat{e}_2+A_3\hat{e}_3$ 的旋度 $\nabla\times\vec{A}$ 是一个矢量，它在 $\hat{e}_1$ 方向的分量 $\left(\nabla\times\vec{A}\right)_1$ 定义为：以 l 记坐标面 q_1 上的面积元 $\mathrm{d}S_1=h_2\mathrm{d}q_2h_3\mathrm{d}q_3$ 的边界线，其走向是关于 $\hat{e}_1$ 成右手螺旋的，则 $\left(\nabla\times\vec{A}\right)_1=\oint_l\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\,/\,\mathrm{d}S_1$. 因为，

$$\begin{aligned}\oint_l\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}&=\left[A_2h_2\mathrm{d}q_2\right]\Big|_{q_3}^{(ab)}+\left[A_3h_3\mathrm{d}q_3\right]\Big|_{q_2+\mathrm{d}q_2}^{(bc)}+\left[\left(-A_2\right)h_2\mathrm{d}q_2\right]\Big|_{q_3+\mathrm{d}q_3}^{(cd)}+\left[\left(-A_3\right)h_3\mathrm{d}q_3\right]\Big|_{q_2}^{(da)}\\&=\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(A_3h_3\right)-\frac{\partial}{\partial q_3}\left(A_2h_2\right)\right]\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3,\end{aligned}$$

所以，$\left(\nabla\times\vec{A}\right)_1=\dfrac{1}{h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_2}\left(A_3h_3\right)-\dfrac{\partial}{\partial q_3}\left(A_2h_2\right)\right].$

$\left(\nabla\times\vec{A}\right)_2$，$\left(\nabla\times\vec{A}\right)_3$ 可以类似（指标轮换）地定义并推导出。最后有，

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(A_3h_3\right)-\frac{\partial}{\partial q_3}\left(A_2h_2\right)\right]\hat{e}_1+\frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}\left(A_1h_1\right)-\frac{\partial}{\partial q_1}\left(A_3h_3\right)\right]\hat{e}_2$$
$$+\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(A_2h_2\right)-\frac{\partial}{\partial q_2}\left(A_1h_1\right)\right]\hat{e}_3.$$

（4）Laplace 算符∇^2

利用$\nabla\cdot\vec{A}=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial q_1}\left(A_1h_2h_3\right)+\dfrac{\partial}{\partial q_2}\left(A_2h_3h_1\right)+\dfrac{\partial}{\partial q_3}\left(A_3h_1h_2\right)\right]$

和$\nabla u=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial s_i}\hat{e}_i=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial u}{\partial q_i}\hat{e}_i$，得到

$$\nabla^2u=\nabla\cdot\left(\nabla u\right)=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right].$$

球坐标系中，$h_r=1$，$h_\theta=r$，$h_\varphi=r\sin\theta$，

$$\nabla^2u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}.$$

柱坐标系中，$h_\rho=1$，$h_\varphi=\rho$，$h_z=1$，

$$\nabla^2u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}.$$

平面极坐标系中，$h_\rho=1$，$h_\varphi=\rho$，$\nabla^2u=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}$.

二、分离变量对坐标系的要求

1）方程和边界条件都必须是可分离变量的（例如两者均是齐次的）；

2）既取决于方程的形式和边界条件，也与**坐标系**的选择有关；

3）选择**坐标系**的原则—便于边界条件处理：

立方系：直角坐标系；

球面系：球坐标系；椭球面系：椭球坐标系；

平面圆系：极坐标系；柱面系：柱坐标系。

三、圆形区域内 Laplace 方程的定解问题

例 1. 利用分离变量法求解定解问题（2+0D）

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho,\varphi) = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, \ (0 \le \rho \le b) \\ u\big|_{\rho=b} = f(\varphi), \text{周期性和自然边界条件见后。} \end{cases}$$

设 $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$，代入方程并分离变量，得

$$\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho R'(\rho)] = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \equiv \lambda.$$

由此得到两个方程:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0,$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0,$$

其中，极角方向的方程 $\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0$ 与周期性边界条件构成本征值问题。这是因为，一般来说，场量 $u(\rho,\varphi)$ 是单值的，应当满足，$u(\rho,\varphi+2\pi)=u(\rho,\varphi)$. 因此 $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$. 所以 $\Phi(2\pi)=\Phi(0)$ 和 $\Phi'(2\pi)=\Phi'(0)$（这些边界条件不同于界面衔接条件）. 这一本征值问题的本征值和本征函数分别为

$$\lambda = \lambda_m = m^2, \quad \Phi(\varphi) = \Phi_m(\varphi) = A_m\cos m\varphi + B_m \sin m\varphi, \quad (m = 0,1,2,\cdots).$$

现在解分离变量以后的径向方程 $\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0$ (Euler 型方程)，其特点是，n 阶导数的各项又乘以自变量的 n 次方(n =0,1,2). 解法如下：令 $R=\rho^k$，代入方程后得关于 k 的代数方程，解出 k 可得方程的特解。

$k(k-1)\rho^k + k\rho^k - m^2\rho^k = 0$，消去 ρ^k，得

$k(k-1)+k-m^2=0$.

解得 $k_{1,2}=\pm m$，从而得方程的两个特解，$\{\ \rho^m,\rho^{-m}\ \}$. 当 $k_1=k_2=m=0$ 时，则两个特解为 $\{\rho^{k_1},\rho^{k_1}\ln\rho\}=\{1,\ln\rho\}$.(好比 $J_m(x)$ 和 $N_m(x)$)当 $\lambda=\lambda_0=m=0$ 时，

$$R(\rho)=R_0(\rho)=C_0'+D_0'\ln\rho=C_0'(1+D_0\ln\rho).$$

当 $\lambda=\lambda_m=m^2\neq 0$ 时，$R(\rho)=R_m(\rho)=C_m'\rho^m+D_m'\rho^{-m}=C_m'\left(\rho^m+D_m\rho^{-m}\right)$.

则一般解为

$$\begin{aligned} u(\rho,\varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} R_m(\rho)\Phi_m(\varphi) \\ &= A_0\left(1+D_0\ln\rho\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi\right)\left(\rho^m+D_m\rho^{-m}\right). \end{aligned}$$

*对于本题定解问题的圆内问题$\left(0\le\rho\le b\right)$，有自然边界条件$\boxed{u\big|_{\rho=0}\ne\infty}$，因此，

$D_0=0$， $D_m=0$ $(m=1,2,\cdots)$. 这时，一般解为，

$$u(\rho,\varphi)=A_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi\right)\rho^m,$$

其中A_m, B_m由边界条件给出，它们是：

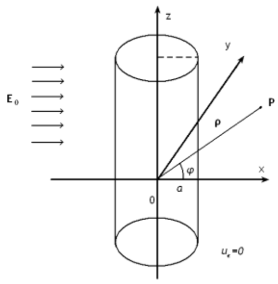
偶函数部分： $A_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta$， $A_m=\dfrac{1}{\pi a^m}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos m\theta\mathrm{d}\theta$，

奇函数部分： $B_m=\dfrac{1}{\pi a^m}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin m\theta\mathrm{d}\theta.$

**对于下面例题的圆外问题$\left(b\le\rho\le\infty\right)$，上述一般解也适用，但需要增加边界条件：$u\big|_{\rho\to\infty}$有界，或是具体问题需要具体确定。

例 2. 在电场强度为E_0的均匀电场中，放入一个半径为b的无限长导体圆柱，其轴线垂直于E_0，单位长度的带电量为Q. 求导体圆柱外的电势分布。

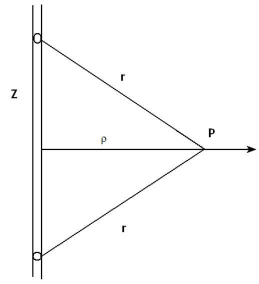
解：分析：以圆柱的轴线为z轴，显然这是平面问题，因为这个问题本身与z无关(2+0D). 以E_0方向为x轴方向取极坐标系，电势$u(\rho,\varphi)$所满足的定解问题是



$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho,\varphi)=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\ \left(\rho>b\right) \\ u\big|_{\rho=a}=0;\ u\approx u_0-E_0\rho\cos\varphi-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho\left(\rho>>b,\text{见下}\right). \end{cases}$$

这里我们选取导体表面$\rho=b$为电势零点。第二个边界条件的右端第一项u_0是待定常数；第二项是均匀电场E_0的电势$-E_0x=-E_0\rho\cos\varphi$;第三项是单独一个带电导体在远处所产生的电势，记为u_2. 当$L\to\infty$时，无穷多个点电荷在ρ处产

生的电势(需要将电势零点位移，即定义 $\rho=\infty$ 为零电势):



$$\begin{aligned}\Delta V(\rho)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{Q\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2+\rho^2}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{L/2+\sqrt{L^2/4+\rho^2}}{-L/2+\sqrt{L^2/4+\rho^2}}\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{L}{-L/2+(L/2)[1+(2\rho/L)^2/2]}\\&\simeq\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{L}{\rho})^2=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{L}{\rho}\to\infty(L\to\infty),\end{aligned}$$

(对数发散)。虽然新物理量 $\Delta v(\rho)=\dfrac{1}{L}\Delta V(\rho)=\dfrac{Q\ln(L/\rho)}{2\pi\varepsilon_0 L}$ 不再发散，但是将 $\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln L\to\infty$ 吸收到 u_2 中，即 $u_2(\rho)=\Delta V(\rho)-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln L=\dfrac{-Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho.$ 物理上 2D 的对数发散， 见 Chapter. 14.

用分离变量法，可得此定解问题的一般解为（Note: $m=0,1,2,\cdots$）

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}R_m(\rho)\Phi_m(\varphi)=A_0\left(1+D_0\ln\rho\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi\right)\left(\rho^m+D_m\rho^{-m}\right).$$

由 $u|_{\rho=b}=0$ 即 $\begin{cases}1+D_0\ln b=0\\ b^m+D_m b^{-m}=0\end{cases}$ 可得，$D_0=-\dfrac{1}{\ln b}$， $D_m=-b^{2m}$ （$m=1,2,\cdots$).

Note: 各 m 是相互独立的。于是，

$$u(\rho,\phi)=\frac{A_0}{\ln b}(\ln b-\ln\rho)\ +\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\cos m\phi+B_m\sin m\phi\right)\left[\rho^m-\left(\frac{b^2}{\rho}\right)^m\right].$$

再利用，$u\approx u_0-E_0\rho\cos\varphi-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho$ （当 $\rho>>a$ 时），有

$$\frac{A_0}{\ln b}(\ln b-\ln\rho)\ +\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi\right)\rho^m=u_0-E_0\rho\cos\varphi-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho.$$

比较各个 m （m 是相互独立的，这个方法等价于用正交性积分来确定系数）关于 (ρ,φ) 的系数得，$A_0=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln b$，$A_m=\begin{cases}-E_0,(m=1)\\0,\ (m=2,3,\cdots)\end{cases}$ $B_m=0$ （$m=1,2,\cdots$)，以及 $u_0=A_0=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln b.$ 这就是信息通过边界传到体内！从而，本定解问题的物理

解为：$u(\rho,\phi)=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{b}{\rho}-E_0\rho\cos\phi+\dfrac{E_0b^2}{\rho}\cos\phi$,

其中第一项是无限长带电导体所产生的电势，当$\rho>b$时，它犹如电荷集中到轴线$\rho=0$上所产生的势；第二项是原来的均匀电场E_0的电势；第三项是圆柱面上的感应电荷所产生的电势，它对应二维平面上位于原点的电偶极子所产生的势。

四、球坐标系下的分离变量法

1. 球坐标系的稳定问题(Laplace 方程，3+0D)

$$\nabla^2u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0.$$

或 $$\nabla^2u=\frac{1}{r^2}\left(r^2u_r\right)_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta u_\theta\right)_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}=0.$$

如果问题可分离变量，则令$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$，其中$Y(\theta,\varphi)$将被称为球谐函数（见第六节）。将$u=RY$代入上述 Laplace 方程且乘以$\dfrac{r^2}{RY}$得两个方程

$$\frac{1}{R}\left(r^2R'\right)'=-\frac{1}{Y\sin\theta}\left(\sin\theta\, Y_\theta\right)_\theta-\frac{1}{Y\sin^2\theta}Y_{\varphi\varphi}\equiv l(l+1).$$

从而有 $r^2R''+2rR'-l(l+1)R=0,$ (Euler 方程，下节解之)

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\, Y_\theta\right)_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}Y_{\varphi\varphi}+l(l+1)Y=0.$$ (球函数方程)

再令 $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，代入上述球函数方程且乘以$\dfrac{\sin^2\theta}{\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}$，得

$$\frac{\sin\theta\left(\sin\theta\,\Theta'\right)'}{\Theta}+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{\Phi''}{\Phi}\equiv m^2.$$

从而有$\Phi''+m^2\Phi=0$,它与周期边界条件构成本征值问题：

$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi),\ \Phi'(\varphi+2\pi)=\Phi'(\varphi).\ \{\cos m\varphi,\sin m\varphi\},m=0,1,2,\cdots.$ 而另一个方程（带参数l,m）

$$\sin^2\theta\,\Theta''+\sin\theta\cos\theta\,\Theta'+[l(l+1)\sin^2\theta-m^2]\Theta=0.$$

记$\cos\theta=x$，$\Theta(\theta)=y(x)$，代入上面的方程并除以$(1-x^2)$，得

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0,$$

这是 l 阶缔合(连带)Legendre 方程，其求解见第六节的球谐函数。若 $m=0$ 有

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+l(l+1)y=0,$$

这正是 l 阶 Legendre 方程。它与自然边界条件 $\Theta(0)$和$\Theta(\pi)$ 有界，即 $y(x)\big|_{x=\pm1}$ 有界，构成了本征值问题。它的本征值和本征函数分别为

$$\lambda_l=l(l+1),\ y(x)=\mathrm{P}_l(x)\ \left(l=0,1,2,\cdots\right).$$

2. 球坐标系的非稳定问题（3+1D 振动或输运问题的齐次方程）

$u_{tt}(\vec r,t)-a^2\nabla^2u(\vec r,t)=0$，或 $u_t(\vec r,t)-a^2\nabla^2u(\vec r,t)=0.$

如果问题可分离变量，令 $u(r,\theta,\varphi,t)=T(t)V(r,\theta,\varphi)$，得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{\nabla^2V}{V}\equiv-k^2,\text{或}\ \frac{T'}{a^2T}=\frac{\nabla^2V}{V}\equiv-k^2.$$

从而有 $T''+a^2k^2T=0$，或 $T'+a^2k^2T=0.$（这些方程易求解）

以及 $\nabla^2V+k^2V=0$，（Helmholtz 方程）。

再令 $V(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$，代入 Helmholtz 方程且乘以 $\dfrac{r^2}{RY}$ 得，

$$\frac{1}{R}\left(r^2R'\right)'+k^2r^2=-\frac{1}{Y\sin\theta}\left(\sin\theta\ Y_\theta\right)_\theta-\frac{1}{Y\sin^2\theta}Y_{\varphi\varphi}\equiv l(l+1).$$

从而有 $Y(\theta,\varphi)$(见下)以及 $r^2R''+2rR'+[k^2r^2-l(l+1)]R=0,$

这是 l 阶球 Bessel 方程，对其求解见下章。这个方程还可以简化如下：

令 $kr=x$, $R(r)=S(x)$，即得(自证)：

$$x^2S''+2xS'+[x^2-l(l+1)]S=0.$$

进一步作代换，$S(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}y(x)$，可将其化为 $l+\dfrac{1}{2}$ 阶 Bessel 方程

（对其求解见下章），即(自证)：

$$xy''+xy'+\left[x^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0.$$

五、轴对称问题 Legendre 多项式

1. 轴对称问题 Legendre 多项式（复习）

设物理问题关于球以及某坐标轴是对称的，以此坐标轴为 z 轴，取球坐标系。这时场量 $u(r,\theta,\varphi)$ 与 φ 无关，我们可直接设 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)$，将其代入物理方程

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\text{，}$$

并分离变量后，可得径向方程

$$r^2R''+2rR'-l(l+1)R=0\text{，}$$

这个 Euler 方程的解为： $R_l(r)=C_l r^l+D_l\dfrac{1}{r^{l+1}}$，

注意这个解包含了 $l=0$ 时的解系 $\{1,1/r\}$. 分离变量后的角度方向的方程为

$$\sin^2\theta\,\Theta''+\sin\theta\cos\theta\,\Theta'+l(l+1)\sin^2\theta\,\Theta=0.$$

记 $\cos\theta=x$ 和 $\Theta(\theta)=y(x)$，代入上面方程并除以 $(1-x^2)$，得

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+l(l+1)y=0\text{，}\quad l\text{ 阶 Legendre 方程}$$

（实际上，这就是 $m=0$ 的情况，这是因为 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ 与 φ 无关，必有 $\Phi(\varphi)$ 与 φ 无关，因此一定有 $m=0$）. 它与自然边界条件 $\Theta(0)$和$\Theta(\pi)$ 有界，即 $y(x)\big|_{x=\pm1}$ 有界，构成本征值问题。即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+l(l+1)y(x)=0,\\ y(\pm1)\text{有界}.\end{cases}$$

它的本征值和本征函数分别为

$$\lambda=\lambda_l=l(l+1)\text{，}\quad y(x)=\mathrm{P}_l(x)\ \left(l=0,1,2,\cdots\right).$$

当 $l=2n$ 时， $y(x)=\mathrm{P}_{2n}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(4n+2k)!}{2^{2n}k!(2n-k)!(2n-2k)!}x^{2n-2k}$；

当$l=2n+1$时， $y(x)=\mathrm{P}_{2n+1}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{(4n+2-2k)!\,x^{2n+1-2k}}{2^{2n+1}k!(2n+1-k)!(2n+1-2k)!}$.

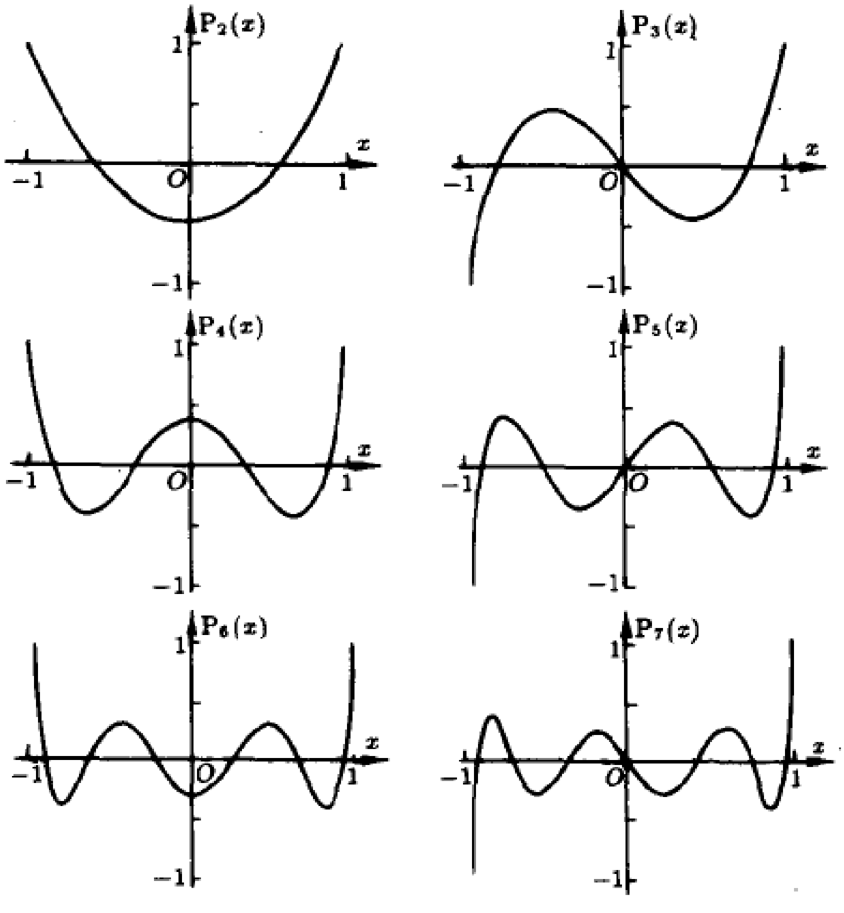
2. Legendre 多项式的常用性质

（1）特殊值、奇偶性和图形{`Plot[LegendreP[l,x],{x,-1,1}]`}

$$\mathrm{P}_l(1)=1,\quad \mathrm{P}_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

$$\mathrm{P}_l(-x)=(-1)^l\,\mathrm{P}_l(x),\mathrm{P}_l(-1)=(-1)^l,\mathrm{P}_{2n+1}(0)=0.$$

$$\mathrm{P}_0(x)=1,\mathrm{P}_1(x)=x,\quad \mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\mathrm{P}_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right).$$



（2）微分公式：$\boxed{\mathrm{P}_l(x)=\dfrac{1}{2^l l!}\dfrac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l.}$ Rodrigues 公式

证：利用二项式定理将$\left(x^2-1\right)^l$展开，得

$$\left(x^2-1\right)^l=\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{k!(l-k)!}(-1)^k x^{2l-2k}.$$

对上式求导l次后，x的原来幂次$2l-2k$低于l的项变为 0，而不为零的项必须满足$2l-2k\ge l$，即$k\le\frac{l}{2}$. 这样，当$l=2n$时，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l&=\sum_{k=0}^{\frac{l}{2}}(-1)^k\frac{(2l-2k)(2l-2k-1)\cdots(l-2k+1)}{2^l k!(l-k)!}x^{l-2k}\\&=\sum_{k=0}^{\frac{l}{2}}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}.\end{aligned}$$

当$l=2n+1$时，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l&=\sum_{k=0}^{\frac{l-1}{2}}(-1)^k\frac{(2l-2k)(2l-2k-1)\cdots(l-2k+1)}{2^l k!(l-k)!}x^{l-2k}\\&=\sum_{k=0}^{\frac{l-1}{2}}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}.\end{aligned}$$

（3）积分公式：由 Legendre 多项式的微分表示式，并利用 Cauchy 高阶导数公式，$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$，[$f(\xi)\equiv(\xi^2-1)^l$]

得$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2^l}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\left(\xi^2-1\right)^l}{\left(\xi-x\right)^{l+1}}\mathrm{d}\xi$, 其中$\gamma$为包含$x$的任一闭曲线，这叫作施雷夫列（Schlafli）积分公式。

若取以x点为圆心，半径为$\left|\sqrt{x^2-1}\right|$的圆作为积分回路[先验地$\mathrm{P}_l(x),|x|\le1$]，则 $\xi=x+\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}$，$\mathrm{d}\xi=i\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi=i(\xi-x)\mathrm{d}\varphi$，

$\xi^2-1=2(\xi-x)\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)$，于是叫作 Laplace 积分表示式：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_l(x)&=\frac{1}{2^l}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{2^l\left(\xi-x\right)^l\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^l}{\left(\xi-x\right)^{l+1}}\mathrm{i}\left(\xi-x\right)\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^l\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^l\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

其中$z=x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi,|z|^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\varphi\le1.$

（4）母函数（生成函数）：引进参量r，设

$F(x,r)=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)r^l,(r<1)$，将 Laplace 积分表示式代入，得

$$F\left(x,r\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}r^l\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\phi\right)^l\mathrm{d}\phi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{1-r\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\phi\right)}$$

其中$r\,|\,z|\le 1$. $\because\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1-\varepsilon\cos\varphi}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\ (\varepsilon<1)$, (请自证)

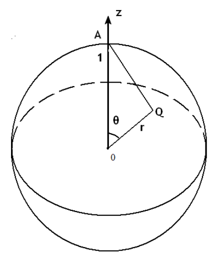
$\therefore$当$r<1$时，利用留数定理，可求得该积分等于$\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}}$ **[习作]**.

因此，$F(x,r)=\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)r^l\ \left(r<1\right)$.

$F(x,r)=\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}}$称为 Legendre 多项式的生成函数（母函数）。

*从生成函数可以方便地引出一系列递推公式。

**同理，$\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)\frac{1}{r^{l+1}}\ \left(r>1\right)$.



对应的**物理问题**：在以原点为中心的单位球面与 z 轴的交点处放置一个电量为$4\pi\varepsilon_0$的点电荷，求球内（球坐标系）任意一点$Q(r,\theta)$的电势$u(r,\theta)$. 一方面，

$$u(r,\theta)\overset{\text{余弦}}{\underset{\text{定理}}{=}}\frac{1}{AQ}=\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}}\ \left(r<1\right),$$

其中，$x=\cos\theta$. 另一方面，$u(r,\theta,\varphi)$应满足方程$\nabla^2u=0\ \left(r<1\right)$，且与$\varphi$无关（轴对称问题），$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(C_lr^l+D_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(x)\ \left(r<1\right)$.

由于原点处不存在电荷，$u\big|_{r=0}$应是有限的，必须有$D_l=0$，所以上式成为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l\mathrm{P}_l(x)r^l\ \left(r<1\right).$$

因此，$\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}C_l\mathrm{P}_l(x)r^l\ \left(r<1\right)$.

为定出系数C_l，取$x=\cos\theta=1$，并注意到$\mathrm{P}_l(1)=1$，有$\frac{1}{1-r}=\sum_{l=0}^{\infty}C_lr^l$.

所以，$C_l = 1\ (l = 0,1,2,\cdots)$.因此，

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^l \quad (r<1).}$$

将上式中的 r 换成$\dfrac{1}{r}$，即得，$\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) \dfrac{1}{r^{l+1}}\ (r>1).}$

或类似地讨论球外问题也可得到上式。(为何要多此一举？左边的意义是清楚的，要右边干吗？--表示理论，今日科学亦如此！)

（5）递推公式

$$** \quad (2l+1)\mathrm{P}_l(x) = \mathrm{P}'_{l+1}(x) - \mathrm{P}'_{l-1}(x) \quad (l = 1,2,3,\cdots).$$

证明：将式$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^l$ 两边对 x 求导，有

$$\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}'_l(x) r^l = \frac{r}{\left(1-2xr+r^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} \frac{r}{1-2xr+r^2},$$

将$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^l$ 代入上式，然后两边乘以$1-2xr+r^2$，得到，

$$\left(1-2xr+r^2\right)\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}'_l(x) r^l = r\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^l,$$

比较两端 r^{l+1} 的系数[$\left\{r^l\right\}(l = 0,1,2,\cdots)$ 相互独立]，得

$$\mathrm{P}_l(x) = \mathrm{P}'_{l+1}(x) - 2x\mathrm{P}'_l(x) + \mathrm{P}'_{l-1}(x).$$

再将式$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^l$ 两边对 r 求导，有

$$\sum_{l=0}^{\infty} l\mathrm{P}_l(x) r^{l-1} = \frac{x-r}{\left(1-2xr+r^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} \frac{x-r}{1-2xr+r^2}.$$

将$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^l$ 代入上式，然后两边乘以$1-2xr+r^2$,得到

$$\left(1-2xr+r^2\right)\sum_{l=0}^{\infty} l\mathrm{P}_l(x) r^{l-1} = \left(x-r\right)\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^l.$$

对 x 求导，经整理后得

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{P}_l(x)r^l=\sum_{l=0}^{\infty}l\mathrm{P}'_l(x)r^{l-1}-\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)x\mathrm{P}'_l(x)r^l+\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\mathrm{P}'_l(x)r^{l+1}.$$

比较两端 r^l 项的系数，得到

$$(2l+1)\mathrm{P}_l(x)=(l+1)\mathrm{P}'_{l+1}(x)-(2l+1)x\mathrm{P}'_l(x)+l\mathrm{P}'_{l-1}(x).$$

与前述 $\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}'_{l+1}(x)-2x\mathrm{P}'_l(x)+\mathrm{P}'_{l-1}(x)$

消去 $x\mathrm{P}'_l(x)$ 项，得，$(2l+1)\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}'_{l+1}(x)-\mathrm{P}'_{l-1}(x),\quad(l=1,2,3,\cdots).$

** $x\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2l+1}\left[l\mathrm{P}_{l-1}(x)+(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)\right],\ (l=1,2,3,\cdots).$

证明思路：将母函数表达式对 r 求导，乘以 $1-2xr+r^2$，再应用母函数表达式，比较系数即得。

** $\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}'_{l+1}(x)-2x\mathrm{P}'_l(x)+\mathrm{P}'_{l-1}(x).$

** $(2l+1)\mathrm{P}_l(x)=(l+1)\mathrm{P}'_{l+1}(x)-(2l+1)x\mathrm{P}'_l(x)+l\mathrm{P}'_{l-1}(x).$

** $\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2l+1}\left[\mathrm{P}'_{l+1}(x)-\mathrm{P}'_{l-1}(x)\right],\ (l=1,2,3,\cdots).$

……

递推公式一般用来计算含 $\mathrm{P}_l(x)$ 的积分，以及用来由低阶 Legendre 多项式得到高阶 Legendre 多项式的表达式。例如:

已知 $\mathrm{P}_0(x)=1$，$\mathrm{P}_1(x)=x$，由递推公式

$$x\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2l+1}\left[l\mathrm{P}_{l-1}(x)+(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)\right],\ (l=1,2,3,\cdots),$$

可得，$\mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{1+1}\left[(2\cdot1+1)x\mathrm{P}_1(x)-1\cdot\mathrm{P}_0(x)\right]=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right).$

（6）正交性和完备性

在区间 $x[-1,1]$ 上，$\{\mathrm{P}_l(x)\}$ 为正交完备集: $\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_m(x)\mathrm{P}_n(x)\mathrm{d}x=0,\ (m\neq n)$;

或 $x=\cos\theta:\int_0^{\pi}\mathrm{P}_m(\cos\theta)\mathrm{P}_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0,\ (m\neq n)$. 这是 S-L 本征值问题，前面已经告之，下面证明模方 $\boxed{\|\mathrm{P}_l(x)\|=\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_l(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}:}$

证明：在上述第二个递推公式 $x\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2l+1}\left[l\mathrm{P}_{l-1}(x)+(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)\right]$ 中

$(l\geq 1)$ 令 $l-1$ 代替 l，乘以 $(2l+1)\mathrm{P}_l(x)$，得

$$(2l+1)(2l-1)xP_l(x)P_{l-1}(x)=(2l+1)(l-1)P_{l-2}(x)P_l(x)+(2l+1)l\left[P_l(x)\right]^2.$$

又将上面的递推公式直接乘以 $(2l-1)\mathrm{P}_{l-1}(x)$，得

$$(2l+1)(2l-1)x\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l-1}(x)=(2l-1)l\left[\mathrm{P}_{l-1}(x)\right]^2+(2l-1)(l+1)\mathrm{P}_{l-1}(x)\mathrm{P}_{l+1}(x).$$

两式相减，得

$$l(2l+1)\left[\mathrm{P}_l\right]^2-l(2l-1)\left[\mathrm{P}_{l-1}\right]^2-(2l-1)(l+1)\mathrm{P}_{l-1}\mathrm{P}_{l+1}+(2l+1)(l-1)\mathrm{P}_l\mathrm{P}_{l-2}=0$$

$$(l\geq 2).$$

将此式在区间 $x[-1,+1]$ 积分，并利用正交性得

$$\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_l(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{2l-1}{2l+1}\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_{l-1}(x)\right]^2\mathrm{d}x.$$

以此为递推公式，可得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_l(x)\right]^2\mathrm{d}x&=\frac{2l-1}{2l+1}\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_{l-1}(x)\right]^2\mathrm{d}x\\&=\frac{2l-1}{2l+1}\frac{2l-3}{2l-1}\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_{l-2}(x)\right]^2\mathrm{d}x\\&=\cdots=\frac{3}{2l+1}\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_1(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}.\end{aligned}$$

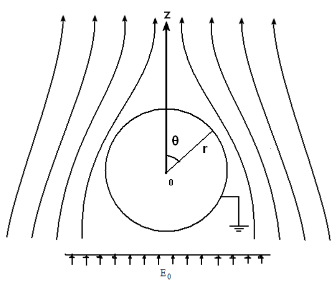
计算中要求 $l\geq 2$，但由验算知 $l=0,1$ 也成立。$\displaystyle\int_{-1}^{+1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{l+1/2}\delta_{lm}.$

（7）广义 Fourier 级数

定义在区间 $x[-1,1]$ 上的任何平方可积函数 $f(x)$，均可按 $\{\mathrm{P}_l(x)\}$ 展为收敛的广义 Fourier 级数：

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l\mathrm{P}_l(x),$$

$$C_l=\frac{1}{\left\|\mathrm{P}_l(x)\right\|}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=(l+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x.$$



例 1.在匀强电场（电场强度为 $\vec{E}_0$）中，放入一个半径为 b、带电量为 Q 的导体球。求球体外的电势分布。

解：分析：以球心为原点，以 $\vec{E}_0$ 方向为 z 轴取球坐标系。显然电势 $u(r,\theta,\varphi)$ 与 φ 无关，并且 $r>b$（而不是图中的 $r>b$）。现在的定解问题是

$$\begin{cases}\nabla^2 u(r,\theta)=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0,(r>b)\\ u\big|_{r=b}=0,\quad u\big|_{r\to\infty}=u_0-E_0 r\cos\theta.\end{cases}$$

这里我们选取球面 $r=b$ 为电势零点。u_0 是待求常数，$-E_0 z=-E_0 r\cos\theta$ 是均匀电场 E_0 的电势。单独一个带电球体在无穷远处所产生的电势为零（如此选择电势零点是因为其自身处的电势发散）。

用分离变量法，可得此定解问题的一般解为[eigenvalue $l(l+1)$, eigenfunction $\{\mathrm{P}_l(x)\}$, Euler solution $\{r^l, r^{-l-1}\}$, independents on t and φ.]

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(C_l r^l+D_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(C_l r^l+D_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta).$$

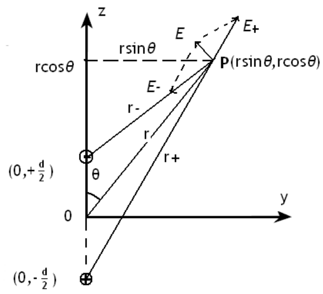
将该通解代入边界条件 $u\big|_{r=b}=0$，得到

$$D_l=-b^{2l+1}C_l\ (l=0,1,2,\cdots).$$

因此，$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l\left(r^l-\dfrac{b^{2l+1}}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$.

并非所有 $C_l=0$. 再将这个形式的解代入边界条件 $u\big|_{r\to\infty}=u_0-E_0 r\cos\theta$，得

$$\sum_{l=0}^{\infty}C_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)=u_0-E_0 r\cos\theta\quad(r\to\infty)$$



所以，$C_0=u_0$，$C_1=-E_0$，$C_l=0\ (l=2,3,\cdots)$.

于是得到这个定解问题的解为

$$u(r,\theta)=u_0-\frac{b}{r}u_0-E_0 r\cos\theta+\frac{E_0 b^3}{r^2}\cos\theta.$$

物理意义：第三项显然是均匀电场 E_0 的电势，第四项是球面上的感应电荷所产生的场，相当于在球心处有一电偶极矩为 $\vec{p}=4\pi\varepsilon_0 b^3\vec{E}_0$ 的电偶极子

(自证)。下面来看前二项的物理意义：

首先求出球外电场的径向分量：

$$E_r = -\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{b}{r^2}u_0 + E_0\cos\theta + \frac{2E_0 b^3}{r^3}\cos\theta .$$

在球面附近，$E_r\big|_{r=b} = -\frac{1}{b}u_0 + 3E_0\cos\theta,$ 将此结果代入 Gauss 定理：$\iint\limits_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$，其中 S 是包围球体且半径趋于 b 的球面，$\mathrm{d}S = b^2 2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta,$ 得到 $u_0 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$ (静像法告诉我们此常数的物理意义是显而易见的，引进它是为了 $u\big|_{r=b} = 0$)。由此可见解的第二项，$-\frac{b}{r}u_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，正是球体作为点电荷在空间产生的电势。总之，$u(r,\theta) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 b^3}{r^2}\cos\theta.$

例 2.半径为 b 的均匀带电细圆环所带总电量为 $4\pi\varepsilon_0 Q$.求空间的电势分布。

解：以圆环中心为原点取球坐标系，它的 z 轴与圆环平面垂直。显然电势 $u(r,\theta,\varphi)$ 与 φ 无关。现在的定解问题分为球内、外两个，一个是

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0, \ (r<b) \\ u\big|_{r\to 0} \neq \infty. \end{cases}$$

另一个是 $$\begin{cases} \nabla^2 u(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0, \ (r>b) \\ u\big|_{r\to \infty} \neq \infty. \end{cases}$$

用分离变量法，可得此定解问题的一般解为

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(C_l r^l + D_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(C_l r^l + D_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta) .$$

由边界条件，可得

$$u(r,\theta) = \begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{\infty} C_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta), & (r<a) \\ \sum\limits_{l=0}^{\infty} D_l \frac{1}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta). & (r>a) \end{cases}$$

为定出其中的系数，需具体计算 z 轴上的电势，即 $u\big|_{\theta=0}$ 和 $u\big|_{\theta=\pi}$.

$$u\big|_{\theta=0}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi\varepsilon_0 Q}{2\pi b}\frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}}b\mathrm{d}\phi=\frac{Q}{\sqrt{r^2+b^2}}$$ （注意在 z 轴正半轴上 $r=z$).

直接展其为 Laurent 级数，或者利用 $\mathrm{P}_{2n+1}(0)=0,\mathrm{P}_{2n}(0)=(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 有

$$u\big|_{\theta=0}=\frac{Q}{\sqrt{r^2+b^2}}=\begin{cases}\dfrac{Q}{b}\left[1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{r}{b}\right)^{2n}\right], & (r<b)\\ \dfrac{Q}{r}\left[1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{b}{r}\right)^{2n}\right], & (r>b)\end{cases}$$

与 $u(r,\theta)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}C_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta), & (r<a)\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}D_l\frac{1}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta), & (r>a)\end{cases}$ 在 $\theta=0$ 的形式做比较，得

$$C_0=\frac{Q}{b}，\ C_{2n+1}=0\quad(n=0,1,2,\cdots)，\ C_{2n}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{Q}{b^{2n+1}}\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$D_0=Q，\ D_{2n+1}=0\quad(n=0,1,2,\cdots)，\ D_{2n}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}b^{2n}Q\quad(n=1,2,\cdots).$$

最后得到，$u(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{Q}{b}\left[1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{r}{b}\right)^{2n}\mathrm{P}_{2n}(\cos\theta)\right], & (r<b)\\ \dfrac{Q}{r}\left[1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{b}{r}\right)^{2n}\mathrm{P}_{2n}(\cos\theta)\right]. & (r>b)\end{cases}$

这个解的表达式只含有偶数阶的 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$，偶数阶 $P_l(\cos\theta)$ 是对称的，

所以它也满足条件 $u\big|_{\theta=\pi}=\dfrac{Q}{\sqrt{r^2+b^2}}$.

六、非轴对称问题 球谐函数

1. 缔合（连带）Legendre 函数

在球坐标系中，Laplace 方程为

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\left(r^2u_r\right)_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta u_\theta\right)_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}=0.$$

令 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$，其中 $Y(\theta,\varphi)$ 称为球谐函数，则

$$\frac{1}{R}\left(r^2R'\right)'=-\frac{1}{Y\sin\theta}\left(\sin\theta\ Y_\theta\right)_\theta-\frac{1}{Y\sin^2\theta}Y_{\phi\phi}=l(l+1)\,.$$

从而有

$$r^2R''+2rR'-l(l+1)R=0\,,\qquad\text{（Euler 方程）}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\ Y_\theta\right)_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}Y_{\phi\phi}+l(l+1)Y=0.\qquad\text{（球函数方程）}$$

再令 $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，则

$$\frac{\sin\theta\left(\sin\theta\ \Theta'\right)'}{\Theta}+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{\Phi''}{\Phi}=m^2\,.$$

从而有 $\Phi''+m^2\Phi=0$, 这个方程与周期性边界条件 $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ 和 $\Phi'(\varphi+2\pi)=\Phi'(\varphi)$ 构成本征值问题。本征值和本征函数分别为：

$$\lambda=\lambda_m=m^2,\ \Phi=\Phi_m=A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi\ (m=0,1,2,\cdots).$$

在一般情况下，即没有球极（轴）对称性，$m\neq0,\Phi(\varphi)\neq1$，还有方程

$$\sin^2\theta\ \Theta''+\sin\theta\cos\theta\ \Theta'+[l(l+1)\sin^2\theta-m^2]\Theta=0.$$

记 $\cos\theta=x$，$\Theta(\theta)=y(x)$，代入上面方程并除以 $(1-x^2)$，得

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0,$$ l 阶缔合 Legendre 方程。

$x=0$ 是方程的常点，当然可以直接用幂级数方法求解。然而，同 Legendre 方程一样，它与自然边界条件 $\Theta(0),\Theta(\pi)$ 有界，即 $y(x)\big|_{x=\pm1}$ 有界，一同构成本征值问题。即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[-\dfrac{m^2}{1-x^2}+l(l+1)\right]y(x)=0,\\ y(\pm1)\text{有界}.\end{cases}$$

因此，只有特定的 l 值时，它才有本征函数解。这时，利用 Legendre 方程的结果，就比较容易得出连带 Legendre 方程的本征函数解：

令 $y(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}v(x)$，于是得（**练习**）

$$\left(1-x^2\right)v''(x)-2(m+1)xv'(x)+\left[l(l+1)-m(m+1)\right]v(x)=0\,.$$

另一方面，将 Legendre 方程

$$\left(1-x^2\right)\mathrm{P}''_l\left(x\right)-2x\mathrm{P}'_l\left(x\right)+l(l+1)\mathrm{P}_l\left(x\right)=0$$

利用 Leibniz 求导公式，对 x 求导 m 次后，得（**练习**）

$$\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_l^{(m+2)}\left(x\right)-2(m+1)x\mathrm{P}_l^{(m+1)}\left(x\right)+\left[l(l+1)-m(m+1)\right]\mathrm{P}_l^{(m)}\left(x\right)=0.$$

将此与 $v(x)$ 的方程比较，即可看出，

$$v(x)=\mathrm{P}_l^{(m)}\left(x\right)\equiv\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{P}_l(x).$$

因此，连带 Legendre 方程的解为

$$y(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}\left(x\right).$$

用符号 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 表示 m 阶 l 次(m order, l degree)连带 Legendre 多项式，即

$$\mathrm{P}_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}\left(x\right)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{P}_l(x).$$

当 $m/2$ 不等于整数时，$\mathrm{P}_l^m(x)$ 是多值函数，枝点在 $x=\pm1,\infty$（它们都是 Legendre 方程的正则奇点）。

当 $m=0$ 时，$\mathrm{P}_l^0(x)=\left(1-x^2\right)^{0/2}\mathrm{P}_l^{(0)}\left(x\right)=\mathrm{P}_l(x)$ 就是 Legendre 多项式。

此外，由于 $\mathrm{P}_l(x)$ 的最高次幂是 x^l，因而当 $m>l$ 时，$\mathrm{P}_l^m(x)\equiv0$.

综上所述，在固定 $m=0,1,2,\cdots,l$ 的情况下，连带 Legendre 方程所构成的本征值问题的本征值和本征函数分别为：$\lambda_l=l(l+1)$，$y(x)=\mathrm{P}_l^m(x)$. 在量子力学中，$\hat{L}^2\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)=l\left(l+1\right)\hbar^2\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)\left(l=0,1,2,\cdots\right)$; $\hat{L}_z\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)=m\hbar\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$.

2. 连带 Legendre 多项式的性质

（1）微分公式

$$\boxed{\mathrm{P}_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l}\quad \text{Rodrigues 公式.}$$

（2）m 可取负值

连带 Legendre 方程在 m 换成 $-m$ 时不变，所得函数

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}}\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}\left(x^2-1\right)^l\ (m>0)$$

也应是方程的解。当然不能直接用 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)=\left(1-x^2\right)^{-m/2}\dfrac{\mathrm{d}^{-m}}{\mathrm{d}x^{-m}}\mathrm{P}_l(x)\,(m>0)$, 这是因为这种求导数没有意义。

作为二阶常微分方程，连带 Legendre 方程可以有两个线性独立解。满足自然边界条件的解一般只有一个，例如 Bessel 方程 $x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0$, 解为 $y(x)=A\mathrm{J}_m(x)+B\mathrm{N}_m(x)\ (m=0,1,2,\cdots)$. $y(0)$ 有限的解为 $y(x)=\mathrm{J}_m(x)$. 这是因为 $\mathrm{N}_m(x)\propto\ln x$. 但是当考虑的问题不包括 $x=0$ 时，需要两个线性独立解的组合。

与求 Bessel 方程一样，由于 Legendre 方程 $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+l(l+1)y=0$ 的指标 $s_1=s_2=0$, 所以第二解为(γ 为 Euler 函数，ψ 为 Γ 函数的对数导数)

$$\mathrm{Q}_l(x)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{x+1}{x-1}-2\gamma-2\psi(l+1)\right)\mathrm{P}_l(x)+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\Gamma(l+n+1)}{(n!)^2\Gamma(l-n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)^n.$$

(吴崇试，数学物理方法，北京大学出版社，2003，p.226). 还有

$$\mathrm{Q}_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{Q}_l(x).$$

$\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 与 $\mathrm{P}_l^{m}(x)$ 满足同样一个方程，并且本征值也一样，$\mathrm{P}_l^{-m}(x)$ 应当就是 $\mathrm{P}_l^{m}(x)$，两者最多差一个常数因子 $\mathrm{P}_l^{-m}(x)=C\mathrm{P}_l^{m}(x)$. 为了求出常数 C，利用乘积函数的 n 次微商的 Leibnitz 公式：$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(uv)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\mathrm{d}^{n-k}u}{\mathrm{d}x^{n-k}}\frac{\mathrm{d}^k v}{\mathrm{d}x^k}$, 有（$m>0$）

$$\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l=\sum_{k=0}^{l+m}C_{l+m}^k\frac{\mathrm{d}^k(x-1)^l}{\mathrm{d}x^k}\frac{\mathrm{d}^{l+m-k}(x+1)^l}{\mathrm{d}x^{l+m-k}}.$$

要使上述两个微商不同时为零，必须满足 $k\le l$ 和 $l+m-k\le l$，即 $m\le k\le l$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l=\sum_{k=m}^{l}C_{l+m}^k\frac{l!(x-1)^{l-k}}{(l-k)!}\frac{l!(x+1)^{k-m}}{(k-m)!}.$$

作求和指标代换 $k=n+m$, 有

$$\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l=\sum_{n=0}^{l-m}C_{l+m}^{n+m}\frac{l!(x-1)^{l-n-m}}{(l-n-m)!}\frac{l!(x+1)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{l-m}\frac{(l+m)!(l!)^2(x-1)^{l-n-m}(x+1)^n}{(n+m)!(l-n)!(l-n-m)!n!}.$$

同样利用 Leibnitz 公式有

$$\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l=\sum_{n=0}^{l-m}C_{l-m}^{n}\frac{l!(x-1)^{l-n}}{(l-n)!}\frac{l!(x+1)^{n+m}}{(n+m)!}=(x^2-1)^m\sum_{n=0}^{l-m}\frac{(l-m)!(l!)^2(x-1)^{l-n-m}(x+1)^n}{n!(l-n-m)!(l-n)!(n+m)!}.$$

二微商式子相比较得 $C=(-1)^m\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}$. 因此,有

$$\boxed{\mathrm{P}_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(x).}$$

（3）积分公式

施雷夫列（Schlafli）积分公式：

$$\mathrm{P}_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{(l+m)!}{2^l l!}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\left(\xi^2-1\right)^l}{\left(\xi-x\right)^{l+m+1}}\mathrm{d}\xi$$

其中，γ 为包含 x 的任一闭曲线。

Laplace 积分表示式：

$$\mathrm{P}_l^m(x)=\frac{i^m}{2\pi}\frac{(l+m)!}{l!}\int_0^{2\pi}e^{-im\varphi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^l\mathrm{d}\varphi.$$

[证明方式同 Legendre 多项式的积分公式].

（4）递推公式

** $(l-m+1)\mathrm{P}_{l+1}^m(x)-(2l+1)x\mathrm{P}_l^m(x)+(l+m)\mathrm{P}_{l-1}^m(x)=0 \quad (l=1,2,3,\cdots)$.

[证明思路：由 Legendre 多项式的递推公式

$(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)-(2l+1)x\mathrm{P}_l(x)+l\mathrm{P}_{l-1}(x)=0$ 求导 m 次，再利用

$\mathrm{P}'_{l+1}(x)-\mathrm{P}'_{l-1}(x)=(2l+1)\mathrm{P}_l$，然后乘以 $\left(1-x^2\right)^{m/2}$ 即证]。

** $\mathrm{P}_{l+1}^{m+1}(x)-\mathrm{P}_{l-1}^{m+1}(x)=(2l+1)\left(1-x^2\right)^{1/2}\mathrm{P}_l^m(x)$

[证明思路:将式 $\mathrm{P}'_{l+1}(x)-\mathrm{P}'_{l-1}(x)=(2l+1)\mathrm{P}_l$ 对 x 求导 m 次,乘以 $\left(1-x^2\right)^{m/2}$ 即证。]

……

（5）正交性和模

对于同一 m，$\left\{\mathrm{P}_l^m(x)\right\}$ $(l=m,m+1,\cdots)$ 在区间 $x\left[-1,+1\right]$ 上为正交完备集:

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l'}^m(x)\mathrm{d}x=0\ \left(l\neq l'\right);$$

或 $x=\cos\theta$: $\int_0^{\pi}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_{l'}^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0\ \left(l\neq l'\right)$.

模方: $\boxed{\left\|\mathrm{P}_l^m(x)\right\|^2\equiv\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_l^m(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}.}$

证明：在递推公式 $(l-m+1)\mathrm{P}_{l+1}^m(x)-(2l+1)x\mathrm{P}_l^m(x)+(l+m)\mathrm{P}_{l-1}^m(x)=0$

中 $(l\geq1)$ 令 $l-1$ 代替 l，乘以 $\left(2l+1\right)\mathrm{P}_l^m(x)$，得

$$\begin{aligned}&\left(2l+1\right)\left(2l-1\right)x\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l-1}^m(x)\\&\qquad=\left(2l+1\right)\left(l+m-1\right)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l-2}^m(x)+\left(2l+1\right)(l-m)\left[\mathrm{P}_l^m(x)\right]^2.\end{aligned}$$

又将上面的递推公式直接乘以 $\left(2l-1\right)\mathrm{P}_{l-1}^m(x)$，得，

$$\begin{aligned}&\left(2l+1\right)\left(2l-1\right)x\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l-1}^m(x)\\&\qquad=\left(2l-1\right)\left(l-m+1\right)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l-1}^m(x)+\left(2l-1\right)(l+m)\left[\mathrm{P}_{l-1}^m(x)\right]^2.\end{aligned}$$

两式相减，得

$$\begin{aligned}&\left(2l+1\right)(l-m)\left[\mathrm{P}_l^m(x)\right]^2-\left(2l-1\right)(l+m)\left[\mathrm{P}_{l-1}^m(x)\right]^2\\&-\left(2l-1\right)\left(l-m+1\right)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l-1}^m(x)+\left(2l+1\right)\left(l+m-1\right)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l-2}^m(x),(l\geq2)\end{aligned}$$

将此式在区间 $x[-1,+1]$ 积分，并利用正交性得

$$\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_l^m(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\left(2l-1\right)}{\left(2l+1\right)}\frac{\left(l+m\right)}{\left(l-m\right)}\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_{l-1}^m(x)\right]^2\mathrm{d}x.$$

以此为递推公式，可得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_l^m(x)\right]^2\mathrm{d}x&=\frac{\left(2l-1\right)}{\left(2l+1\right)}\frac{\left(l+m\right)}{\left(l-m\right)}\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_{l-1}^m(x)\right]^2\mathrm{d}x\\&=\frac{\left(2l-1\right)}{\left(2l+1\right)}\frac{\left(2l-3\right)}{\left(2l-1\right)}\frac{\left(l+m\right)}{\left(l-m\right)}\frac{\left(l+m-1\right)}{\left(l-m-1\right)}\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_{l-2}^m(x)\right]^2\mathrm{d}x\\&=\cdots=\frac{\left(2m+1\right)}{\left(2l+1\right)}\frac{\left(l+m\right)!}{\left(l-m\right)!(2m)!}\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_m^m(x)\right]^2\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{2l+1}\frac{\left(l+m\right)!}{\left(l-m\right)!}.\end{aligned}$$

计算中应注意$l \geq m$，并且利用了$\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_m^m(x)\right]^2\mathrm{d}x=\dfrac{2\left[(2m)!\right]^2}{(2m+1)!}$：

$$\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_m^m(x)\right]^2\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2^m m!}\right]^2\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m\left[\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}}(x^2-1)^m\right]^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\left[(2m)!\right]^2}{2^{2m}(m!)^2}\int_0^{\pi}\sin^{2m+1}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2\left[(2m)!\right]^2}{2^{2m}(m!)^2}\int_0^{\pi/2}\sin^{2m+1}\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2\left[(2m)!\right]^2}{2^{2m}(m!)^2}\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2(m-1)}{2m-1}\cdot\frac{2(m-2)}{2m-3}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2\left[(2m)!\right]^2}{2^{2m}(m!)^2}\frac{2^2 m!}{(2m+1)!!}=\frac{2\left[(2m)!\right]^2}{(2m)!!(2m+1)!!}=\frac{2\left[(2m)!\right]^2}{(2m+1)!}.$$

上面第二等式完成微分，第三等式分部积分$m-1$次。因而正交归一了。

（6）广义 Fourier 级数

定义在区间$x[-1,+1]$上的任何平方可积函数$f(x)$，均可按

$\left\{\mathrm{P}_l^m(x)\right\}$ $(l \geq m)$展为平均收敛的广义 Fourier 级数：

$$f(x)=\sum_{l=m}^{\infty}C_l\mathrm{P}_l^m(x),$$

$$C_l=\frac{1}{\left\|\mathrm{P}_l^m\right\|^2}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x=(l+\frac{1}{2})\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x.$$

或者，$f(\theta)=\sum_{l=m}^{\infty}C_l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta),\quad C_l=(l+\frac{1}{2})\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_0^{\pi}f(\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta.$

3. 球谐函数

Laplace 方程：$\dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\, Y_\theta)_\theta+\dfrac{1}{\sin^2\theta}Y_{\varphi\varphi}+l(l+1)Y=0$ （球函数方程）

和自然边界条件：

$$\begin{cases}Y(\theta,\varphi)\text{是单值的}[\text{即}\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)\text{和}\Phi'(\varphi+2\pi)=\Phi'(\varphi)],\\ Y(\theta,\varphi)\text{是有限的},\end{cases}$$

所构成的本征值问题的本征值和本征函数分别是

$$\lambda_l=l(l+1)\text{，}\quad \lambda_m=m^2,\ \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}\ (l=0,1,2,\cdots;\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l).$$

$\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$ 和 $e^{im\varphi}$ 的归一化常数分别是 $\sqrt{\dfrac{(l+1/2)(l-m)!}{(l+m)!}}$ 和 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

将函数 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$ 归一化后记为

$$\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)=(-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

$$(l=0,1,2,\cdots;\ \ m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l)$$

称为**球谐函数**（不同教材定义的形式有少许不同），l 称为球谐函数的次。

l 次球谐函数共有 $2l+1$ 个(λ_l 的简并度)，即 $\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)\quad\left(m=0,\pm1,\cdots,\pm l\right)$.

量子力学：$\hat{L}^2\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)=l\left(l+1\right)\hbar^2\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$;

$$\hat{L}_z\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)=m\hbar\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi).$$

正交归一化关系：$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{l'm'}^*(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$.

二重广义 Fourier 级数：

定义在区间 $(0\le\theta\le\pi,0\le\varphi\le2\pi)$ 上的任何平方可积函数 $f(\theta,\varphi)$，

均可按 $\left\{\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}$ 展为平均收敛的广义 Fourier 级数：

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{lm}\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi),$$

$$C_{lm}=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_{lm}^*(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

低阶球谐函数：$\mathrm{Y}_{00}(\theta,\varphi)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$,

$$\begin{cases}\mathrm{Y}_{10}(\theta,\varphi)=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta,\\ \mathrm{Y}_{1,\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\ e^{\pm i\varphi},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{Y}_{20}(\theta,\varphi)=\sqrt{\dfrac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right),\\ \mathrm{Y}_{2,\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\dfrac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\ e^{\pm i\varphi},\\ \mathrm{Y}_{2,\pm2}(\theta,\varphi)=\sqrt{\dfrac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\ e^{\pm i2\varphi}.\end{cases}$$

例：在给定中心势场$V(r)$的情况下，求解微观粒子的定态 Schrodinger 方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(r,\theta,\varphi)+V(r)\psi(r,\theta,\varphi)=E\psi(r,\theta,\varphi),$$

其中，μ是粒子的质量，$\psi(r,\theta,\varphi)$是定态波函数，E是能量。

解：

$$\begin{aligned}&-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi-[E-V(r)]\psi\\&=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\left(r^2\psi_r\right)_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\psi_\theta\right)_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\psi_{\varphi\varphi}\right]-[E-V(r)]\psi=0.\end{aligned}$$

令$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$，$Y(\theta,\varphi)$称为球谐函数。

$$\frac{1}{R}\left(r^2R'\right)'+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}[E-V(r)]=-\frac{1}{Y\sin\theta}\left(\sin\theta\, Y_\theta\right)_\theta-\frac{1}{Y\sin^2\theta}Y_{\varphi\varphi}=l(l+1).$$

从而有
$$r^2R''+2rR'-\left[l(l+1)-\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}E+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}V(r)\right]R=0;$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\, Y_\theta\right)_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}Y_{\varphi\varphi}+l(l+1)Y=0.$$（球函数方程）

后一方程与自然边界条件

$$\begin{cases}Y(\theta,\varphi)\text{是单值的}[\text{即}\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)\text{和}\Phi'(\varphi+2\pi)=\Phi'(\varphi)],\\Y(\theta,\varphi)\text{是有限的},\end{cases}$$

构成本征值问题：$\lambda_m=m^2,\ \lambda_l=l(l+1),\ \mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)\ (l=0,1,2,\cdots;\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l)$.

同时，由$R(r)$所满足的方程

$$r^2R''+2rR'-\left[l(l+1)-\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}E+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}V(r)\right]R=0$$

附加一定的边界条件可以求得能量E_n和对应的本征函数$R_n(r)$. 具体的求解过程依赖于势函数$V(r)$的具体形式。例如，$V(r)=E=0,$ Laplace 方程，其解$R(r)=\{r^l,r^{-l-1}\}$见上；$V(r)=0,E\neq0,$ Helmholtz 方程，其求解过程见下章：$R(r)=y(x)/\sqrt{x},x=\sqrt{2\mu E}r/\hbar,\ y(x)=\mathrm{J}_{l+1/2}(x)=\mathrm{j}_l(x);$；自然界中最常见并且严格可解的库伦势、引力势和谐振子势等，其求解过程和物理意义见量子力学教程）。

HW:12.4;12.8;12.9;12.13.