

Chapter 12 球坐标系下的分离变量法

Legendre 多项式和球谐函数

Abstracts

正交曲线坐标系及在此坐标系下 Laplace 算术的表示;
 球极坐标系下的变量分离法及由此得出的特殊函数 (例如,
 Legendre 函数、连带 Legendre 函数和球谐函数等)。

函数空间概念(复习)

3D: 基矢: $\{\vec{e}_j\} (j=1,2,3)$; 正交: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$; 表示: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$,
 这是 3D Euclid space, 直观、简单、符合常识。

(3+1)D: 是加 t , 还是加 $it\vec{e}_4$, 如何去加? 时空观的变革: 相对运动, 不但有了相对时空位置, 还有了 scaling (标尺)、不变性和时空弯曲等概念。

n D: 基矢是 $\{\varphi_j(x)\} (j=1,2,3,\dots,n)$, 带权 $\rho(x)$ 的正交归一性如下:

$\int \rho(x)\varphi_i^*(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{ij} \Rightarrow \infty$ D: Hilbert space. 基矢亦是函数, 并且 straight scaling \rightarrow curve scaling. j : quantum numbers. 抽象、复杂、冲破常识!

对于任意函数 $f(x)$, 只要其定义域与 $\{\varphi_j(x)\}$ 的相同, 总有 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$,

其中 $\int dx \rho(x)\varphi_m^*(x)f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int \rho(x)\varphi_m^*(x)\varphi_n(x)dx = c_m$ is a representation!

当 $f(x)$ 已知时, c_n 是上式; 当 $f(x)$ 是 $\varphi_n(x)$ 的线性组合时, c_n 是其系数。

1. n D 向量空间: 有 n D 向量的集合。

1) 表述: n 个独立的单位矢量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ 排成基向量, 选 $\{\vec{e}_j\}$ 为正交归一基

矢, 即 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, 则 $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$ 和 $x_j = \vec{x} \cdot \vec{e}_j$ (在 \vec{e}_j 上的坐标值—表示)。

2) 内积: $\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j=1}^n x_j^* y_j$.

3) 模方: $(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{j=1}^n x_j^* x_j = \sum_{j=1}^n |\vec{x}_j|^2 = |\vec{x}|^2$.

4) 基矢的完备性: n D 空间有 1D 矢量系 $\{\vec{e}_j\} (j=1,2,\dots,n)$, 若不能在此空间

找出一个简单向量 \vec{f} ，使 \vec{f} 与 $\{\vec{e}_j\}$ 正交，则称为完备系， $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$ 。

2. 函数空间 (Hilbert space): 在域 $x[a, b]$ 上分段连续、平方可积的函数

$\varphi(x)$ [$\int_a^b \rho(x) \varphi^*(x) \varphi(x) dx$ 有限] 的集合所排成的空间称为 Hilbert space.

1) 正交函数系: 如① $x[0, l]$ 内的 $\left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right\}$ 和 $\left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right\}$,

② $x[-l, l]$ 内的 $\left\{ 1, \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right\}$ 均为完备基。

一般带权正交函数系的定义: 设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$, 在 $x[a, b]$ 上有

$$(\varphi_m(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b \rho(x) \varphi_m^*(x) \varphi_n(x) dx = N_n^2 \delta_{mn},$$

则称 $\{\varphi_n(x)\}$ 是在 $x[a, b]$ 上的带权 $[\rho(x) > 0]$ 正交函数系。把

$(\varphi_n(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b \rho(x) \varphi_n^*(x) \varphi_n(x) dx = \|\varphi_n(x)\|^2 = N_n^2$ 称为模之平方, 若

$N_n^2 = 1$ (对于所有的 n) 称为 $\left\{ \frac{\varphi_n(x)}{N_n} \right\}$

(A set of orthogonal complete normalized function bases).

2) 广义 Fourier 展开 (expansion): 若 $\varphi_n(x)$ 是 $x[a, b]$ 上的正交完备系, 则

$x[a, b]$ 上任意分段连续 (平方可积) 的函数 $f(x)$ 均可表示为

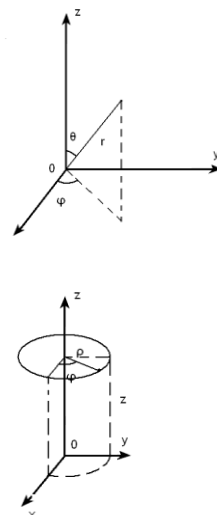
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad \text{其中 } c_n = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_n^*(x) \rho(x) dx}{\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_n^*(x) \rho(x) dx}.$$

一、正交曲线坐标系

1. 从直角坐标系到正交曲线坐标系

$$\text{球坐标系 } (r, \theta, \varphi) \text{ 关系: } \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

$$\text{柱坐标系 } (\rho, \varphi, z) \text{ 关系: } \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$



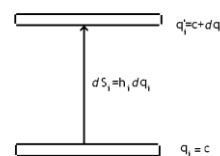
一般曲线坐标系 (q_1, q_2, q_3) 关系:
$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3), \end{cases}$$

满足 Jacobi 行列式
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial q_1 & \partial x / \partial q_2 & \partial x / \partial q_3 \\ \partial y / \partial q_1 & \partial y / \partial q_2 & \partial y / \partial q_3 \\ \partial z / \partial q_1 & \partial z / \partial q_2 & \partial z / \partial q_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (变换条件).}$$

如果三族坐标线是处处相互正交的, 则称这种坐标系为**正交曲线坐标系**。

如何判断一个坐标系是否为正交坐标系? 可以通过计算弧元长度:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1,2,3} g_{ij} dq_i dq_j, \end{aligned}$$



其中, $g_{ij} = g_{ji} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j}$. 如果 $g_{ij} = g_{ii} \delta_{ij}$, 则称此坐标系

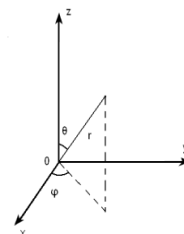
为**正交曲线坐标系**。这是因为沿坐标轴 q_i 的弧元长度为 $ds_i = h_i dq_i$, 而 $h_i = \sqrt{g_{ii}}$

称为坐标曲线 q_i 的**度规因子**; $(ds)^2 = h_1^2 (dq_1)^2 + h_2^2 (dq_2)^2 + h_3^2 (dq_3)^2$. 如果

$g_{ij} dq_i dq_j = (h_i dq_i)^2 \delta_{ij}$, 即各个坐标曲线的相互投影为零, 则它们之间相互**正交**。

例如, 对于球坐标系,

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ &= (\sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi)^2 \\ &\quad + (\sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi)^2 \\ &\quad + (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 \\ &= (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2. \end{aligned}$$



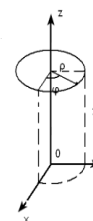
球坐标系是正交曲线坐标系, $h_r = \sqrt{g_{11}} = 1$, $h_\theta = \sqrt{g_{22}} = r$, $h_\varphi = \sqrt{g_{33}} = r \sin \theta$.

对于柱坐标系,

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ &= (\cos\varphi d\rho - \rho \sin\varphi d\varphi)^2 + (\sin\varphi d\rho + \rho \cos\varphi d\varphi)^2 + (dz)^2 \\ &= (d\rho)^2 + \rho^2 (d\varphi)^2 + (dz)^2. \end{aligned}$$

⇒ 柱坐标系也是正交曲线坐标系, 且

$$h_\rho = \sqrt{g_{11}} = 1, \quad h_\varphi = \sqrt{g_{22}} = \rho, \quad h_z = \sqrt{g_{33}} = 1.$$



2. δ 函数在正交曲线坐标系中的表达式

在直角坐标系中, $\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$.

设 \vec{r}' 点对应于直角坐标系 (x', y', z') 的新坐标为 (q'_1, q'_2, q'_3) , 即

$$\begin{cases} x' = x(q'_1, q'_2, q'_3) \\ y' = y(q'_1, q'_2, q'_3) \\ z' = z(q'_1, q'_2, q'_3) \end{cases}, \text{ 并设 } f(x, y, z) \text{ 在点 } (x', y', z') \text{ 附近为连续的任意函数,}$$

按 δ 函数的定义, 有

$$\iiint f(x, y, z) \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') dx dy dz = f(x', y', z').$$

左边的积分可以作变量代换, 而右边的函数作上述变量代换, 有

$$\begin{aligned} &\iiint f[x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)] \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \\ &\times \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \right| dq_1 dq_2 dq_3 = f[x(q'_1, q'_2, q'_3), y(q'_1, q'_2, q'_3), z(q'_1, q'_2, q'_3)]. \end{aligned}$$

另一方面, 由 δ 函数的定义, 又有

$$\begin{aligned} &\iiint f[x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)] \delta(q_1 - q'_1) \delta(q_2 - q'_2) \delta(q_3 - q'_3) \\ &\times dq_1 dq_2 dq_3 = f[x(q'_1, q'_2, q'_3), y(q'_1, q'_2, q'_3), z(q'_1, q'_2, q'_3)]. \end{aligned}$$

比较上面两式, 由于 f 是任意函数, 得到

$$\delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \right| = \delta(q_1 - q'_1) \delta(q_2 - q'_2) \delta(q_3 - q'_3),$$

即在一般正交曲线坐标系中, δ 函数的表达式为

$$\delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') = \frac{\delta(q_1 - q'_1) \delta(q_2 - q'_2) \delta(q_3 - q'_3)}{\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \right|}.$$

在正交曲线坐标系中, 由六个面 $q_1, q_1 + dq_1, q_2, q_2 + dq_2, q_3, q_3 + dq_3$ 所构

成的体积元为 $d\tau = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \right| dq_1 dq_2 dq_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$.

因此, $\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') = \frac{\delta(q_1-q'_1)\delta(q_2-q'_2)\delta(q_3-q'_3)}{h_1 h_2 h_3}$.

球坐标系中, $h_r = 1, h_\theta = r, h_\varphi = r \sin \theta$,

$$\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') = \frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')}{r^2 \sin \theta}.$$

柱坐标系中, $h_\rho = 1, h_\varphi = \rho, h_z = 1$,

$$\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') = \frac{\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z')}{\rho}.$$

平面极坐标系中, $h_\rho = 1, h_\varphi = \rho$,

$$\delta(x-x')\delta(y-y') = \frac{\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')}{\rho}.$$

由体积元 $d\tau = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$ 知道, 球坐标系中体积元为 $r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$, 权重函数分别为 $(r^2, \sin \theta, 1)$. 柱坐标系中体积元为 $\rho d\rho d\varphi dz$, 权重函数分别为 $(\rho, 1, 1)$.

3. 场量的梯度(grade: ∇u), 散度(divergence: $\nabla \cdot \vec{A}$), 旋度(rotation: $\nabla \times \vec{A}$)和 Laplace 算符 ∇^2 等在正交曲线坐标系中的表达式

(1) 标量 $u(q_1, q_2, q_3)$ 的梯度 ∇u 是一个矢量, 在直角坐标系中的表达式是

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k},$$

其中 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 分别是 3D 实空间中三个坐标轴的单位矢量。

在一般正交曲线坐标系中, ∇u 的三个分量定义为沿三条坐标轴的变化率

$\frac{\partial u}{\partial s_i}$, 如以 \hat{e}_i ($i=1,2,3$) 分别表示点 (q_1, q_2, q_3) 沿三条坐标线的单位矢量, 就有

$$\nabla u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial s_i} \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} \hat{e}_i. \quad (\text{Note: } ds_i = h_i dq_i)$$

(2) 矢量 $\vec{A}(q_1, q_2, q_3) = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3$ 的散度 $\nabla \cdot \vec{A}$ 是一个标量, 定义为:

以 S 记体积元的边界面, $d\vec{S}$ 表示大小为 dS , 方向为面积元外法线方向的矢量, 则 $\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ 是 \vec{A}

通过边界面 S 的通量, 而 $a(q_1, q_2, q_3)$ 点的散度是

$$\nabla \cdot \vec{A} = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} / d\tau.$$

通过坐标面 q_1 的通量是 $[(-A_1)h_2dq_2h_3dq_3]_{q_1}$,

通过坐标面 $q_1 + dq_1$ 的通量是 $[A_1h_2dq_2h_3dq_3]_{q_1+dq_1}$;

通过坐标面 q_2 的通量是 $[(-A_2)h_1dq_1h_3dq_3]_{q_2}$,

通过坐标面 $q_2 + dq_2$ 的通量是 $[A_2h_1dq_1h_3dq_3]_{q_2+dq_2}$;

通过坐标面 q_3 的通量是 $[(-A_3)h_1dq_1h_2dq_2]_{q_3}$,

通过坐标面 $q_3 + dq_3$ 的通量是 $[A_3h_1dq_1h_2dq_2]_{q_3+dq_3}$.

因此,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \partial_{q_1} A_1 + \partial_{q_2} A_2 + \partial_{q_3} A_3 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right].$$

(3) 矢量 $\vec{A}(q_1, q_2, q_3) = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3$ 的旋度 $\nabla \times \vec{A}$ 是一个矢量, 它在 \hat{e}_1 方向

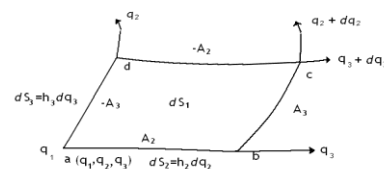
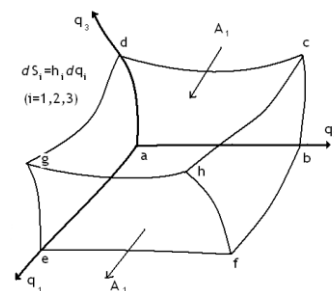
的分量 $(\nabla \times \vec{A})_1$ 定义为: 以 l 记坐标面 q_1 上的面积元 $dS_1 = h_2 dq_2 h_3 dq_3$ 的边界线,

其走向是关于 \hat{e}_1 成右手螺旋的, 则 $(\nabla \times \vec{A})_1 = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} / dS_1$. 因为,

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} &= [A_2 h_2 dq_2]_{q_3}^{(ab)} + [A_3 h_3 dq_3]_{q_2+dq_2}^{(bc)} + [(-A_2) h_2 dq_2]_{q_3+dq_3}^{(cd)} + [(-A_3) h_3 dq_3]_{q_2}^{(da)} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 h_2) \right] dq_2 dq_3, \end{aligned}$$

所以, $(\nabla \times \vec{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 h_2) \right].$

$(\nabla \times \vec{A})_2, (\nabla \times \vec{A})_3$ 可以类似 (指标轮换) 地定义并推导出. 最后有,



$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = & \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 h_2) \right] \hat{e}_1 + \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (A_3 h_3) \right] \hat{e}_2 \\ & + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 h_1) \right] \hat{e}_3. \end{aligned}$$

(4) Laplace 算符 ∇^2

$$\text{利用 } \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right]$$

$$\text{和 } \nabla u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial s_i} \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} \hat{e}_i, \text{ 得到}$$

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right].$$

球坐标系中, $h_r = 1, h_\theta = r, h_\varphi = r \sin \theta,$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

柱坐标系中, $h_\rho = 1, h_\varphi = \rho, h_z = 1,$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

平面极坐标系中, $h_\rho = 1, h_\varphi = \rho, \nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$

二、分离变量对坐标系的要求

- 1) 方程和边界条件都必须是可分离变量的 (例如两者均是齐次的);
- 2) 既取决于方程的形式和边界条件, 也与**坐标系**的选择有关;
- 3) 选择**坐标系**的原则—便于边界条件处理:

立方系: 直角坐标系;

球面系: 球坐标系; 椭球面系: 椭球坐标系;

平面圆系: 极坐标系; 柱面系: 柱坐标系。

三、圆形区域内 Laplace 方程的定解问题

例 1. 利用分离变量法求解定解问题 (2+0D)

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (0 \leq \rho \leq b) \\ u|_{\rho=b} = f(\varphi), \text{周期性和自然边界条件见后.} \end{cases}$$

设 $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$, 代入方程并分离变量, 得

$$-\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} [\rho R'(\rho)] = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda.$$

由此得到两个方程:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0,$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0,$$

其中, 极角方向的方程 $\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0$ 与周期性边界条件构成 **本征值问题**。这是因为, 一般来说, 场量 $u(\rho, \varphi)$ 是单值的, 应当满足, $u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi)$. 因此 $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. 所以 $\Phi(2\pi) = \Phi(0)$ 和 $\Phi'(2\pi) = \Phi'(0)$ (这些边界条件不同于界面衔接条件). 这一本征值问题的本征值和本征函数分别为

$$\lambda = \lambda_m = m^2, \quad \Phi(\varphi) = \Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

现在解分离变量以后的径向方程 $\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0$ (**Euler 型方程**), 其特点是, n 阶导数的各项又乘以自变量的 n 次方 ($n=0, 1, 2$). 解法如下:

令 $R = \rho^k$, 代入方程后得关于 k 的代数方程, 解出 k 可得方程的特解。

$$k(k-1)\rho^k + k\rho^k - m^2\rho^k = 0, \text{ 消去 } \rho^k, \text{ 得}$$

$$k(k-1) + k - m^2 = 0.$$

解得 $k_{1,2} = \pm m$, 从而得方程的两个特解, $\{\rho^m, \rho^{-m}\}$. 当 $k_1 = k_2 = m = 0$ 时, 则两个特解为 $\{\rho^{k_1}, \rho^{k_1} \ln \rho\} = \{1, \ln \rho\}$. (好比 $J_m(x)$ 和 $N_m(x)$) 当 $\lambda = \lambda_0 = m = 0$ 时,

$$R(\rho) = R_0(\rho) = C'_0 + D'_0 \ln \rho = C'_0(1 + D_0 \ln \rho).$$

当 $\lambda = \lambda_m = m^2 \neq 0$ 时, $R(\rho) = R_m(\rho) = C'_m \rho^m + D'_m \rho^{-m} = C'_m(\rho^m + D_m \rho^{-m})$.

则一般解为

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m(\rho) \Phi_m(\varphi) \\ = A_0(1 + D_0 \ln \rho) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)(\rho^m + D_m \rho^{-m}).$$

*对于本题定解问题的圆内问题 ($0 \leq \rho \leq b$), 有自然边界条件 $u|_{\rho=0} \neq \infty$, 因此,

$D_0 = 0, D_m = 0 (m=1, 2, \dots)$. 这时, 一般解为,

$$u(\rho, \varphi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \rho^m,$$

其中 A_m, B_m 由边界条件给出, 它们是:

$$\text{偶函数部分: } A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad A_m = \frac{1}{\pi a^m} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta,$$

$$\text{奇函数部分: } B_m = \frac{1}{\pi a^m} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta.$$

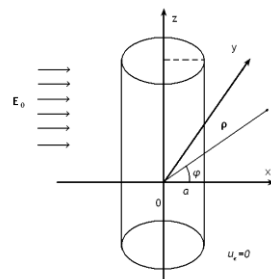
**对于下面例题的圆外问题 ($b \leq \rho \leq \infty$), 上述一般解也适用, 但需要增加边界条件: $u|_{\rho \rightarrow \infty}$ 有界, 或是具体问题需要具体确定。

例 2. 在电场强度为 E_0 的均匀电场中, 放入一个半径为 b 的无限长导体圆柱, 其轴线垂直于 E_0 , 单位长度的带电量为 Q . 求导体圆柱外的电势分布。

解: 分析: 以圆柱的轴线为 z 轴, 显然这是平面问题, 因为这个问题本身与 z 无关(2+0D). 以 E_0 方向为 x 轴方

向取极坐标系, 电势 $u(\rho, \varphi)$ 所满足的定解问题是

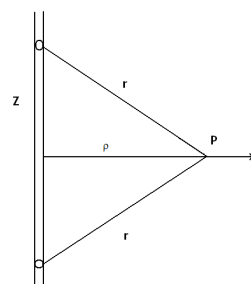
$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, (\rho > b) \\ u|_{\rho=b} = 0; u \approx u_0 - E_0 \rho \cos \varphi - \frac{Q}{2\pi \epsilon_0} \ln \rho (\rho \gg b, \text{见下}). \end{cases}$$



这里我们选取导体表面 $\rho = b$ 为电势零点。第二个边界条件的右端第一项 u_0 是待定常数; 第二项是均匀电场 E_0 的电势 $-E_0 x = -E_0 \rho \cos \varphi$; 第三项是单独一个带电导体在远处所产生的电势, 记为 u_2 . 当 $L \rightarrow \infty$ 时, 无穷多个点电荷在 ρ 处产

生的电势(需要将电势零点位移, 即定义 $\rho = \infty$ 为零电势):

$$\begin{aligned} \Delta V(\rho) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{Qdz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{L/2 + \sqrt{L^2/4 + \rho^2}}{-L/2 + \sqrt{L^2/4 + \rho^2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{L}{-L/2 + (L/2)[1 + (2\rho/L)^2/2]} \\ &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L}{\rho}\right)^2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{L}{\rho} \rightarrow \infty (L \rightarrow \infty), \end{aligned}$$



(对数发散)。虽然新物理量 $\Delta v(\rho) = \frac{1}{L} \Delta V(\rho) = \frac{Q \ln(L/\rho)}{2\pi\epsilon_0 L}$ 不再发散, 但是将

$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln L \rightarrow \infty$ 吸收到 u_2 中, 即 $u_2(\rho) = \Delta V(\rho) - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln L = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho$. 物理上 2D

的对数发散, 见 Chapter. 14.

用分离变量法, 可得此定解问题的一般解为 (Note: $m = 0, 1, 2, \dots$)

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m(\rho) \Phi_m(\varphi) = A_0 (1 + D_0 \ln \rho) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) (\rho^m + D_m \rho^{-m}).$$

$$\text{由 } u|_{\rho=b} = 0 \text{ 即 } \begin{cases} 1 + D_0 \ln b = 0 \\ b^m + D_m b^{-m} = 0 \end{cases} \text{ 可得, } D_0 = -\frac{1}{\ln b}, \quad D_m = -b^{2m} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Note: 各 m 是相互独立的。于是,

$$u(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{\ln b} (\ln b - \ln \rho) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \left[\rho^m - \left(\frac{b^2}{\rho}\right)^m \right].$$

再利用, $u \approx u_0 - E_0 \rho \cos \varphi - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho$ (当 $\rho \gg a$ 时), 有

$$\frac{A_0}{\ln b} (\ln b - \ln \rho) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \rho^m = u_0 - E_0 \rho \cos \varphi - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho.$$

比较各个 m (m 是相互独立的, 这个方法等价于用正交性积分来确定系数) 关

于 (ρ, φ) 的系数得, $A_0 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln b$, $A_m = \begin{cases} -E_0, & (m=1) \\ 0, & (m=2, 3, \dots) \end{cases}$ $B_m = 0$ ($m = 1, 2, \dots$), 以

及 $u_0 = A_0 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln b$. 这就是信息通过边界传到体内! 从而, 本定解问题的物理

$$\text{解为: } u(\rho, \phi) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{\rho} - E_0 \rho \cos \phi + \frac{E_0 b^2}{\rho} \cos \phi,$$

其中第一项是无限长带电导体所产生的电势，当 $\rho > b$ 时，它犹如电荷集中到轴线 $\rho = 0$ 上所产生的势；第二项是原来的均匀电场 E_0 的电势；第三项是圆柱面上的感应电荷所产生的电势，它对应二维平面上位于原点的电偶极子所产生的势。

四、球坐标系下的分离变量法

1. 球坐标系的稳定问题(Laplace 方程, 3+0D)

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

$$\text{或 } \nabla^2 u = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0.$$

如果问题可分离变量，则令 $u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ ，其中 $Y(\theta, \varphi)$ 将被称为球谐函数（见第六节）。将 $u = RY$ 代入上述 Laplace 方程且乘以 $\frac{r^2}{RY}$ 得两个方程

$$\frac{1}{R} (r^2 R')' = -\frac{1}{Y \sin \theta} (\sin \theta Y_\theta)_\theta - \frac{1}{Y \sin^2 \theta} Y_{\varphi\varphi} \equiv l(l+1).$$

从而有 $r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0$, (Euler 方程, 下节解之)

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta Y_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} Y_{\varphi\varphi} + l(l+1)Y = 0. \quad (\text{球函数方程})$$

再令 $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ ，代入上述球函数方程且乘以 $\frac{\sin^2 \theta}{\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}$ ，得

$$\frac{\sin \theta (\sin \theta \Theta')'}{\Theta} + l(l+1) \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''}{\Phi} \equiv m^2.$$

从而有 $\Phi'' + m^2 \Phi = 0$ ，它与周期边界条件构成本征值问题：

$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, $\Phi'(\varphi + 2\pi) = \Phi'(\varphi)$. $\{\cos m\varphi, \sin m\varphi\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$. 而另一个方程（带参数 l, m ）

$$\sin^2 \theta \Theta'' + \sin \theta \cos \theta \Theta' + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0.$$

记 $\cos \theta = x$ ， $\Theta(\theta) = y(x)$ ，代入上面的方程并除以 $(1-x^2)$ ，得

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0,$$

这是 l 阶缔合(连带)Legendre 方程, 其求解见第六节的球谐函数。若 $m=0$ 有

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0,$$

这正是 l 阶 Legendre 方程。它与自然边界条件 $\Theta(0)$ 和 $\Theta(\pi)$ 有界, 即 $y(x)|_{x=\pm 1}$

有界, 构成了本征值问题。它的本征值和本征函数分别为

$$\lambda_l = l(l+1), \quad y(x) = P_l(x) \quad (l=0, 1, 2, \dots).$$

2. 球坐标系的非稳定问题 (3+1D 振动或输运问题的齐次方程)

$$u_{tt}(\vec{r}, t) - a^2 \nabla^2 u(\vec{r}, t) = 0, \quad \text{或} \quad u_t(\vec{r}, t) - a^2 \nabla^2 u(\vec{r}, t) = 0.$$

如果问题可分离变量, 令 $u(r, \theta, \varphi, t) = T(t)V(r, \theta, \varphi)$, 得

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{\nabla^2 V}{V} \equiv -k^2, \quad \text{或} \quad \frac{T'}{a^2 T} = \frac{\nabla^2 V}{V} \equiv -k^2.$$

从而有 $T'' + a^2 k^2 T = 0$, 或 $T' + a^2 k^2 T = 0$. (这些方程易求解)

以及 $\nabla^2 V + k^2 V = 0$, (**Helmholtz 方程**).

再令 $V(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$, 代入 Helmholtz 方程且乘以 $\frac{r^2}{RY}$ 得,

$$\frac{1}{R} (r^2 R')' + k^2 r^2 = -\frac{1}{Y \sin \theta} (\sin \theta Y_\theta)_\theta - \frac{1}{Y \sin^2 \theta} Y_{\varphi\varphi} \equiv l(l+1).$$

从而有 $Y(\theta, \varphi)$ (见下) 以及 $r^2 R'' + 2rR' + [k^2 r^2 - l(l+1)]R = 0$,

这是 l 阶球 **Bessel 方程**, 对其求解见下章。这个方程还可以简化如下:

令 $kr = x$, $R(r) = S(x)$, 即得(自证):

$$x^2 S'' + 2xS' + [x^2 - l(l+1)]S = 0.$$

进一步作代换, $S(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} y(x)$, 可将其化为 $l + \frac{1}{2}$ 阶 Bessel 方程

(对其求解见下章), 即(自证):

$$xy'' + xy' + \left[x^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] y = 0.$$

五、轴对称问题 Legendre 多项式

1. 轴对称问题 Legendre 多项式 (复习)

设物理问题关于球以及某坐标轴是对称的, 以此坐标轴为 z 轴, 取球坐标系。这时场量 $u(r, \theta, \varphi)$ 与 φ 无关, 我们可直接设 $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)$, 将其代入物理方程

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

并分离变量后, 可得径向方程

$$r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0,$$

这个 Euler 方程的解为: $R_l(r) = C_l r^l + D_l \frac{1}{r^{l+1}}$,

注意这个解包含了 $l=0$ 时的解系 $\{1, 1/r\}$. 分离变量后的角度方向的方程为

$$\sin^2 \theta \Theta'' + \sin \theta \cos \theta \Theta' + l(l+1) \sin^2 \theta \Theta = 0.$$

记 $\cos \theta = x$ 和 $\Theta(\theta) = y(x)$, 代入上面方程并除以 $(1-x^2)$, 得

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0, \quad l \text{ 阶 Legendre 方程}$$

(实际上, 这就是 $m=0$ 的情况, 这是因为 $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ 与 φ 无关, 必有 $\Phi(\varphi)$ 与 φ 无关, 因此一定有 $m=0$)。它与自然边界条件

$\Theta(0)$ 和 $\Theta(\pi)$ 有界, 即 $y(x)|_{x=\pm 1}$ 有界, 构成本征值问题。即

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy(x)}{dx} \right] + l(l+1)y(x) = 0, \\ y(\pm 1) \text{有界.} \end{cases}$$

它的本征值和本征函数分别为

$$\lambda = \lambda_l = l(l+1), \quad y(x) = P_l(x) \quad (l = 0, 1, 2, \dots).$$

当 $l = 2n$ 时, $y(x) = P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(4n+2k)!}{2^{2n} k!(2n-k)!(2n-2k)!} x^{2n-2k}$;

当 $l = 2n + 1$ 时, $y(x) = P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(4n+2-2k)! x^{2n+1-2k}}{2^{2n+1} k! (2n+1-k)! (2n+1-2k)!}$.

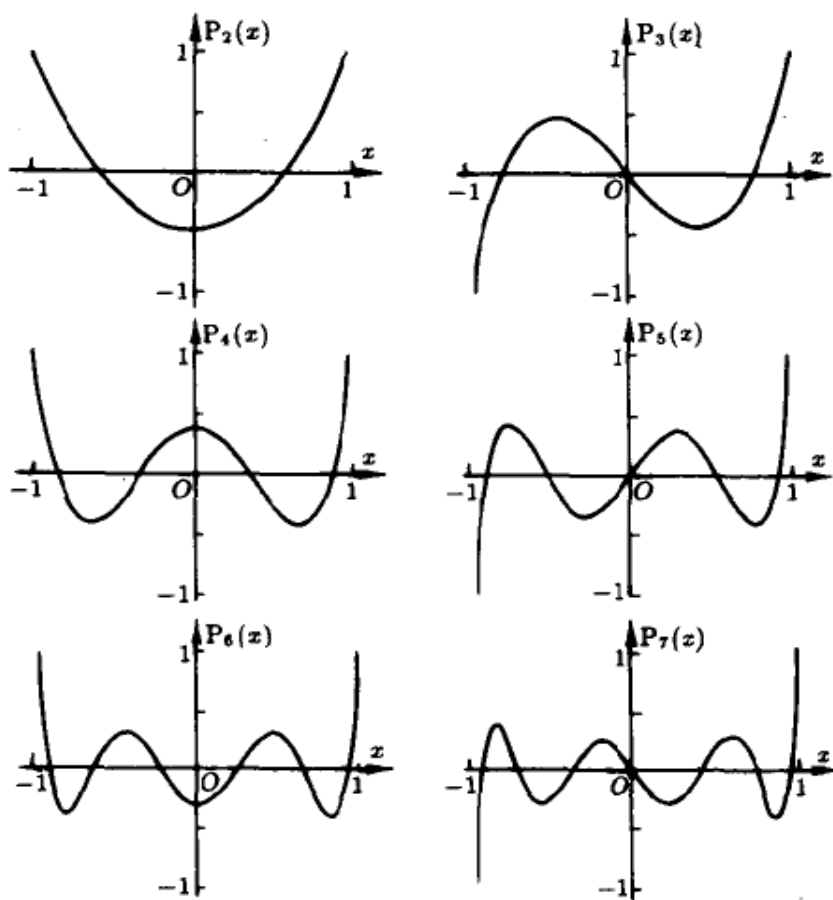
2. Legendre 多项式的常用性质

(1) 特殊值、奇偶性和图形 {Plot [LegendreP[l, x], {x, -1, 1}]}

$$P_l(1) = 1, P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x), P_l(-1) = (-1)^l, P_{2n+1}(0) = 0.$$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$



(2) 微分公式: $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$. Rodrigues 公式

证: 利用二项式定理将 $(x^2 - 1)^l$ 展开, 得

$$(x^2 - 1)^l = \sum_{k=0}^l \frac{l!}{k!(l-k)!} (-1)^k x^{2l-2k}.$$

对上式求导 l 次后, x 的原来幂次 $2l - 2k$ 低于 l 的项变为 0, 而不为零的项必须满足 $2l - 2k \geq l$, 即 $k \leq \frac{l}{2}$. 这样, 当 $l = 2n$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l &= \sum_{k=0}^{\frac{l}{2}} (-1)^k \frac{(2l - 2k)(2l - 2k - 1) \cdots (l - 2k + 1)}{2^l k!(l - k)!} x^{l - 2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{l}{2}} (-1)^k \frac{(2l - 2k)!}{2^l k!(l - k)!(l - 2k)!} x^{l - 2k}. \end{aligned}$$

当 $l = 2n + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l &= \sum_{k=0}^{\frac{l-1}{2}} (-1)^k \frac{(2l - 2k)(2l - 2k - 1) \cdots (l - 2k + 1)}{2^l k!(l - k)!} x^{l - 2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{l-1}{2}} (-1)^k \frac{(2l - 2k)!}{2^l k!(l - k)!(l - 2k)!} x^{l - 2k}. \end{aligned}$$

(3) 积分公式: 由 Legendre 多项式的微分表示式, 并利用 Cauchy 高阶

导数公式, $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$, [$f(\xi) \equiv (\xi^2 - 1)^l$]

得 $P_l(x) = \frac{1}{2^l} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(\xi^2 - 1)^l}{(\xi - x)^{l+1}} d\xi$, 其中 γ 为包含 x 的任一闭曲线, 这叫作施雷夫列 (Schlafli) 积分公式。

若取以 x 点为圆心, 半径为 $|\sqrt{x^2 - 1}|$ 的圆作为积分回路 [先验地

$P_l(x), |x| \leq 1$], 则 $\xi = x + \sqrt{x^2 - 1}e^{i\varphi}$, $d\xi = i\sqrt{x^2 - 1}e^{i\varphi}d\varphi = i(\xi - x)d\varphi$,

$\xi^2 - 1 = 2(\xi - x)(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)$, 于是叫作 Laplace 积分表示式:

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2^l (\xi - x)^l (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^l}{(\xi - x)^{l+1}} i(\xi - x) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^l d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^l d\varphi, \end{aligned}$$

其中 $z = x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi, |z|^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \leq 1$.

(4) 母函数 (生成函数): 引进参量 r , 设

$$F(x, r) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^l, (r < 1), \text{ 将 Laplace 积分表示式代入, 得}$$

$$F(x, r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{l=0}^{\infty} r^l (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi)^l d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\phi}{1 - r(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi)}$$

其中 $r|z| \leq 1$. $\therefore \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 - \varepsilon \cos \phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ ($\varepsilon < 1$), (请自证)

\therefore 当 $r < 1$ 时, 利用留数定理, 可求得该积分等于 $\frac{1}{\sqrt{1 - 2xr + r^2}}$ [习作].

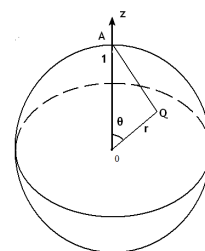
$$\text{因此, } F(x, r) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xr + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^l \quad (r < 1).$$

$F(x, r) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xr + r^2}}$ 称为 Legendre 多项式的生成函数 (母函数)。

*从生成函数可以方便地引出一系列递推公式。

$$\text{**同理, } \frac{1}{\sqrt{1 - 2xr + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) \frac{1}{r^{l+1}} \quad (r > 1).$$

对应的**物理问题**: 在以原点为中心的单位球面与 z 轴的交点处放置一个电量为 $4\pi\varepsilon_0$ 的点电荷, 求球内 (球坐标系) 任意一点 $Q(r, \theta)$ 的电势 $u(r, \theta)$. 一方面,



$$u(r, \theta) \stackrel{\text{余弦定理}}{=} \frac{1}{AQ} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xr + r^2}} \quad (r < 1),$$

其中, $x = \cos \theta$. 另一方面, $u(r, \theta, \phi)$ 应满足方程 $\nabla^2 u = 0$ ($r < 1$), 且与 ϕ 无

$$\text{关 (轴对称问题), } u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l r^l + D_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(x) \quad (r < 1).$$

由于原点处不存在电荷, $u|_{r=0}$ 应是有限的, 必须有 $D_l = 0$, 所以上式成为

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(x) r^l \quad (r < 1).$$

$$\text{因此, } \frac{1}{\sqrt{1 - 2xr + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(x) r^l \quad (r < 1).$$

为定出系数 C_l , 取 $x = \cos \theta = 1$, 并注意到 $P_l(1) = 1$, 有 $\frac{1}{1 - r} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l$.

所以, $C_l = 1 (l = 0, 1, 2, \dots)$. 因此,

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)r^l \quad (r < 1).}$$

将上式中的 r 换成 $\frac{1}{r}$, 即得, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\frac{1}{r^{l+1}} \quad (r > 1).}$

或类似地讨论球外问题也可得到上式。(为何要多此一举? 左边的意义是清楚的, 要右边干吗? --表示理论, 今日科学亦如此!)

(5) 递推公式

$$** \quad (2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) \quad (l = 1, 2, 3, \dots).$$

证明: 将式 $\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)r^l$ 两边对 x 求导, 有

$$\sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)r^l = \frac{r}{(1-2xr+r^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} \frac{r}{1-2xr+r^2},$$

将 $\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)r^l$ 代入上式, 然后两边乘以 $1-2xr+r^2$, 得到,

$$(1-2xr+r^2) \sum_{l=0}^{\infty} P'_l(x)r^l = r \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)r^l,$$

比较两端 r^{l+1} 的系数 $[\{r^l\} (l = 0, 1, 2, \dots)$ 相互独立], 得

$$P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2xP'_l(x) + P'_{l-1}(x).$$

再将式 $\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)r^l$ 两边对 r 求导, 有

$$\sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)r^{l-1} = \frac{x-r}{(1-2xr+r^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} \frac{x-r}{1-2xr+r^2}.$$

将 $\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)r^l$ 代入上式, 然后两边乘以 $1-2xr+r^2$, 得到

$$(1-2xr+r^2) \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)r^{l-1} = (x-r) \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)r^l.$$

对 x 求导, 经整理后得

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)P_l(x)r^l = \sum_{l=0}^{\infty} lP'_l(x)r^{l-1} - \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)xP'_l(x)r^l + \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)P'_l(x)r^{l+1}.$$

比较两端 r^l 项的系数, 得到

$$(2l+1)P_l(x) = (l+1)P'_{l+1}(x) - (2l+1)xP'_l(x) + lP'_{l-1}(x).$$

与前述 $P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2xP'_l(x) + P'_{l-1}(x)$

消去 $xP'_l(x)$ 项, 得, $(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$, $(l=1, 2, 3, \dots)$.

$$** \quad xP_l(x) = \frac{1}{2l+1} [lP'_{l-1}(x) + (l+1)P'_{l+1}(x)], \quad (l=1, 2, 3, \dots).$$

证明思路: 将母函数表达式对 r 求导, 乘以 $1-2xr+r^2$, 再应用母函数表达式, 比较系数即得。

$$** \quad P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2xP'_l(x) + P'_{l-1}(x).$$

$$** \quad (2l+1)P_l(x) = (l+1)P'_{l+1}(x) - (2l+1)xP'_l(x) + lP'_{l-1}(x).$$

$$** \quad P_l(x) = \frac{1}{2l+1} [P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)], \quad (l=1, 2, 3, \dots).$$

.....

递推公式一般用来计算含 $P_l(x)$ 的积分, 以及用来由低阶 Legendre 多项式得到高阶 Legendre 多项式的表达式。例如:

已知 $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, 由递推公式

$$xP_l(x) = \frac{1}{2l+1} [lP'_{l-1}(x) + (l+1)P'_{l+1}(x)], \quad (l=1, 2, 3, \dots),$$

$$\text{可得, } P_2(x) = \frac{1}{1+1} [(2 \cdot 1 + 1)xP'_1(x) - 1 \cdot P'_0(x)] = \frac{1}{2} (3x^2 - 1).$$

(6) 正交性和完备性

在区间 $x[-1,1]$ 上, $\{P_l(x)\}$ 为正交完备集: $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0, (m \neq n)$;

或 $x = \cos \theta: \int_0^\pi P_m(\cos \theta)P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0, (m \neq n)$. 这是 S-L 本征值问题, 前面已经告之, 下面证明模方

$$\|P_l(x)\|^2 = \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1};$$

证明: 在上述第二个递推公式 $xP_l(x) = \frac{1}{2l+1} [lP'_{l-1}(x) + (l+1)P'_{l+1}(x)]$ 中

$(l \geq 1)$ 令 $l-1$ 代替 l , 乘以 $(2l+1)P_l(x)$, 得

$$(2l+1)(2l-1)xP_l(x)P_{l-1}(x) = (2l+1)(l-1)P_{l-2}(x)P_l(x) + (2l+1)l[P_l(x)]^2.$$

又将上面的递推公式直接乘以 $(2l-1)P_{l-1}(x)$, 得

$$(2l+1)(2l-1)xP_l(x)P_{l-1}(x) = (2l-1)l[P_{l-1}(x)]^2 + (2l-1)(l+1)P_{l-1}(x)P_{l+1}(x).$$

两式相减, 得

$$l(2l+1)[P_l(x)]^2 - l(2l-1)[P_{l-1}(x)]^2 - (2l-1)(l+1)P_{l-1}P_{l+1} + (2l+1)(l-1)P_lP_{l-2} = 0$$

$$(l \geq 2).$$

将此式在区间 $x[-1, +1]$ 积分, 并利用正交性得

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{2l-1}{2l+1} \int_{-1}^1 [P_{l-1}(x)]^2 dx.$$

以此为递推公式, 可得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx &= \frac{2l-1}{2l+1} \int_{-1}^1 [P_{l-1}(x)]^2 dx \\ &= \frac{2l-1}{2l+1} \frac{2l-3}{2l-1} \int_{-1}^1 [P_{l-2}(x)]^2 dx \\ &= \dots = \frac{3}{2l+1} \int_{-1}^1 [P_1(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1}. \end{aligned}$$

计算中要求 $l \geq 2$, 但由验算知 $l = 0, 1$ 也成立。 $\int_{-1}^{+1} P_l(x)P_m(x)dx = \frac{1}{l+1/2} \delta_{lm}.$

(7) 广义 Fourier 级数

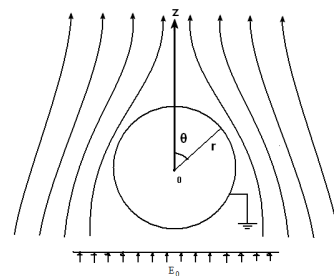
定义在区间 $x[-1, 1]$ 上的任何平方可积函数 $f(x)$, 均可按 $\{P_l(x)\}$ 展为收敛的广义 Fourier 级数:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(x),$$

$$C_l = \frac{1}{\|P_l(x)\|} \int_{-1}^1 f(x)P_l(x)dx = (l + \frac{1}{2}) \int_{-1}^1 f(x)P_l(x)dx.$$

例 1. 在匀强电场 (电场强度为 \vec{E}_0) 中, 放入一个半径为

b 、带电量为 Q 的导体球。求球体外的电势分布。



解：分析：以球心为原点，以 \vec{E}_0 方向为 z 轴取球坐标系。显然电势 $u(r, \theta, \varphi)$

与 φ 无关，并且 $r > b$ （而不是图中的 $r > b$ ）。现在的定解问题是

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0, (r > b) \\ u|_{r=b} = 0, \quad u|_{r \rightarrow \infty} = u_0 - E_0 r \cos \theta. \end{cases}$$

这里我们选取球面 $r=b$ 为电势零点。 u_0 是待求常数，
 $-E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ 是均匀电场 E_0 的电势。单独一个带电球体在无穷远处所产生的电势为零（如此选择电势零点是因为其自身处的电势发散）。

用分离变量法，可得此定解问题的一般解为[eigenvalue $l(l+1)$,
 eigenfunction $\{P_l(x)\}$, Euler solution $\{r^l, r^{-l-1}\}$, independents on t and φ .]

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l r^l + D_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l r^l + D_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

将该通解代入边界条件 $u|_{r=b} = 0$ ，得到

$$D_l = -b^{2l+1} C_l \quad (l = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\text{因此, } u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \left(r^l - \frac{b^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

并非所有 $C_l = 0$ 。再将这个形式的解代入边界条

件 $u|_{r \rightarrow \infty} = u_0 - E_0 r \cos \theta$ ，得

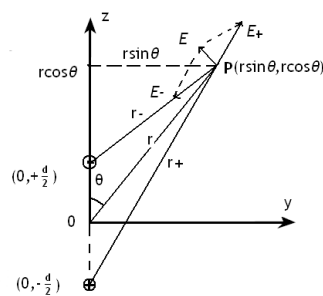
$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos \theta) = u_0 - E_0 r \cos \theta \quad (r \rightarrow \infty)$$

所以， $C_0 = u_0$ ， $C_1 = -E_0$ ， $C_l = 0$ ($l = 2, 3, \dots$)。

于是得到这个定解问题的解为

$$u(r, \theta) = u_0 - \frac{b}{r} u_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 b^3}{r^2} \cos \theta.$$

物理意义：第三项显然是均匀电场 E_0 的电势，第四项是球面上的感应电荷所产生的场，相当于在球心处有一电偶极矩为 $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 b^3 \vec{E}_0$ 的电偶极子



(自证)。下面来看前二项的物理意义:

首先求出球外电场的径向分量:

$$E_r = -\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{b}{r^2}u_0 + E_0 \cos \theta + \frac{2E_0 b^3}{r^3} \cos \theta.$$

在球面附近, $E_r|_{r=b} = -\frac{1}{b}u_0 + 3E_0 \cos \theta$, 将此结果代入 Gauss 定理:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \text{ 其中 } S \text{ 是包围球体且半径趋于 } b \text{ 的球面, } dS = b^2 2\pi \sin \theta d\theta, \text{ 得到}$$

$$u_0 = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 b} \text{ (静像法告诉我们此常数的物理意义是显而易见的, 引进它是为了}$$

$$u|_{r=b} = 0). \text{ 由此可见解的第二项, } -\frac{b}{r}u_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \text{ 正是球体作为点电荷在空间产}$$

$$\text{生的电势。总之, } u(r, \theta) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 b^3}{r^2} \cos \theta.$$

例 2. 半径为 b 的均匀带电细圆环所带总电量为 $4\pi\epsilon_0 Q$. 求空间的电势分布。

解: 以圆环中心为原点取球坐标系, 它的 z 轴与圆环平面垂直。显然电势

$u(r, \theta, \varphi)$ 与 φ 无关。现在的定解问题分为球内、外两个, 一个是

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0, & (r < b) \\ u|_{r \rightarrow 0} \neq \infty. \end{cases}$$

$$\text{另一个是 } \begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0, & (r > b) \\ u|_{r \rightarrow \infty} \neq \infty. \end{cases}$$

用分离变量法, 可得此定解问题的一般解为

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l r^l + D_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l r^l + D_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

由边界条件, 可得

$$u(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos \theta), & (r < a) \\ \sum_{l=0}^{\infty} D_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). & (r > a) \end{cases}$$

为定出其中的系数，需具体计算 z 轴上的电势，即 $u|_{\theta=0}$ 和 $u|_{\theta=\pi}$ 。

$$u|_{\theta=0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi\epsilon_0 Q}{2\pi b} \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2}} b d\phi = \frac{Q}{\sqrt{r^2 + b^2}} \quad (\text{注意在 } z \text{ 轴正半轴上 } r = z).$$

直接展其为 Laurent 级数，或者利用 $P_{2n+1}(0) = 0, P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ ，有

$$u|_{\theta=0} = \frac{Q}{\sqrt{r^2 + b^2}} = \begin{cases} \frac{Q}{b} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{r}{b}\right)^{2n} \right], & (r < b) \\ \frac{Q}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{b}{r}\right)^{2n} \right], & (r > b) \end{cases}$$

$$\text{与 } u(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos \theta), & (r < a) \\ \sum_{l=0}^{\infty} D_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), & (r > a) \end{cases} \quad \text{在 } \theta = 0 \text{ 的形式做比较，得}$$

$$C_0 = \frac{Q}{b}, C_{2n+1} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), C_{2n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{Q}{b^{2n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$D_0 = Q, D_{2n+1} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), D_{2n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} b^{2n} Q \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$\text{最后得到, } u(r, \theta) = \begin{cases} \frac{Q}{b} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{r}{b}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right], & (r < b) \\ \frac{Q}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{b}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right]. & (r > b) \end{cases}$$

这个解的表达式只含有偶数阶的 $P_l(\cos \theta)$ ，偶数阶 $P_l(\cos \theta)$ 是对称的，

$$\text{所以它也满足条件 } u|_{\theta=\pi} = \frac{Q}{\sqrt{r^2 + b^2}}.$$

六、非轴对称问题 球谐函数

1. 缔合（连带）Legendre 函数

在球坐标系中，Laplace 方程为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0.$$

令 $u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$ ，其中 $Y(\theta, \varphi)$ 称为球谐函数，则

$$\frac{1}{R}(r^2 R')' = -\frac{1}{Y \sin \theta}(\sin \theta Y_\theta)_\theta - \frac{1}{Y \sin^2 \theta} Y_{\phi\phi} = l(l+1).$$

从而有

$$r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0, \quad (\text{Euler 方程})$$

$$\frac{1}{\sin \theta}(\sin \theta Y_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} Y_{\phi\phi} + l(l+1)Y = 0. \quad (\text{球函数方程})$$

再令 $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 则

$$\frac{\sin \theta (\sin \theta \Theta')'}{\Theta} + l(l+1) \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''}{\Phi} = m^2.$$

从而有 $\Phi'' + m^2\Phi = 0$, 这个方程与周期性边界条件 $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ 和 $\Phi'(\varphi + 2\pi) = \Phi'(\varphi)$ 构成本征值问题。本征值和本征函数分别为:

$$\lambda = \lambda_m = m^2, \quad \Phi = \Phi_m = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

在一般情况下, 即没有球极(轴)对称性, $m \neq 0, \Phi(\varphi) \neq 1$, 还有方程

$$\sin^2 \theta \Theta'' + \sin \theta \cos \theta \Theta' + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0.$$

记 $\cos \theta = x$, $\Theta(\theta) = y(x)$, 代入上面方程并除以 $(1-x^2)$, 得

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0, \quad l \text{ 阶缔合 Legendre 方程}.$$

$x=0$ 是方程的常点, 当然可以直接用幂级数方法求解。然而, 同 Legendre 方程一样, 它与自然边界条件 $\Theta(0), \Theta(\pi)$ 有界, 即 $y(x)|_{x=\pm 1}$ 有界, 一同构成本征值问题。即

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy(x)}{dx} \right] + \left[-\frac{m^2}{1-x^2} + l(l+1) \right] y(x) = 0, \\ y(\pm 1) \text{ 有界.} \end{cases}$$

因此, 只有特定的 l 值时, 它才有本征函数解。这时, 利用 Legendre 方程的结果, 就比较容易得出连带 Legendre 方程的本征函数解:

令 $y(x) = (1-x^2)^{m/2} v(x)$, 于是得 (练习)

$$(1-x^2)v''(x) - 2(m+1)xv'(x) + [l(l+1) - m(m+1)]v(x) = 0.$$

另一方面，将 Legendre 方程

$$(1-x^2)P_l''(x) - 2xP_l'(x) + l(l+1)P_l(x) = 0$$

利用 Leibniz 求导公式，对 x 求导 m 次后，得（练习）

$$(1-x^2)P_l^{(m+2)}(x) - 2(m+1)xP_l^{(m+1)}(x) + [l(l+1) - m(m+1)]P_l^{(m)}(x) = 0.$$

将此与 $v(x)$ 的方程比较，即可看出，

$$v(x) = P_l^{(m)}(x) \equiv \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

因此，连带 Legendre 方程的解为

$$y(x) = (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x).$$

用符号 $P_l^m(x)$ 表示 m 阶 l 次 (m order, l degree) 连带 Legendre 多项式，即

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

当 $m/2$ 不等于整数时， $P_l^m(x)$ 是多值函数，枝点在 $x = \pm 1, \infty$ （它们都是 Legendre 方程的正则奇点）。

当 $m = 0$ 时， $P_l^0(x) = (1-x^2)^{0/2} P_l^{(0)}(x) = P_l(x)$ 就是 Legendre 多项式。

此外，由于 $P_l(x)$ 的最高次幂是 x^l ，因而当 $m > l$ 时， $P_l^m(x) \equiv 0$ 。

综上所述，在固定 $m = 0, 1, 2, \dots, l$ 的情况下，连带 Legendre 方程所构成的本征值问题的本征值和本征函数分别为： $\lambda_l = l(l+1)$ ， $y(x) = P_l^m(x)$ 。在量子力学中， $\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$); $\hat{L}_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = m\hbar Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 。

2. 连带 Legendre 多项式的性质

(1) 微分公式

$$\boxed{P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l} \text{ Rodrigues 公式.}$$

(2) m 可取负值

连带 Legendre 方程在 m 换成 $-m$ 时不变，所得函数

$$P_l^{-m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l \quad (m > 0)$$

也应是方程的解。当然不能直接用 $P_l^{-m}(x) = (1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{-m}}{dx^{-m}} P_l(x) (m > 0)$, 这是因为这种求导数没有意义。

作为二阶常微分方程, 连带 Legendre 方程可以有两个线性独立解。满足自然边界条件的解一般只有一个, 例如 Bessel 方程 $x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$, 解为 $y(x) = AJ_m(x) + BN_m(x) (m = 0, 1, 2, \dots)$. $y(0)$ 有限的解为 $y(x) = J_m(x)$. 这是因为 $N_m(x) \propto \ln x$. 但是当考虑的问题不包括 $x = 0$ 时, 需要两个线性独立解的组合。

与求 Bessel 方程一样, 由于 Legendre 方程 $(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$ 的指标 $s_1 = s_2 = 0$, 所以第二解为 (γ 为 Euler 函数, ψ 为 Γ 函数的对数导数)

$$Q_l(x) = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{x+1}{x-1} - 2\gamma - 2\psi(l+1) \right) P_l(x) + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\Gamma(l+n+1)}{(n!)^2 \Gamma(l-n+1)} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{x-1}{2} \right)^n.$$

(吴崇试, 数学物理方法, 北京大学出版社, 2003, p.226). 还有

$$Q_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_l(x).$$

$P_l^{-m}(x)$ 与 $P_l^m(x)$ 满足同样一个方程, 并且本征值也一样, $P_l^{-m}(x)$ 应当就是 $P_l^m(x)$, 两者最多差一个常数因子 $P_l^{-m}(x) = CP_l^m(x)$. 为了求出常数 C , 利用乘积函数的 n 次微商的 Leibnitz 公式:

$$\frac{d^n}{dx^n} (uv) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}} \frac{d^k v}{dx^k}, \text{ 有 } (m > 0)$$

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l = \sum_{k=0}^{l+m} C_{l+m}^k \frac{d^k (x-1)^l}{dx^k} \frac{d^{l+m-k} (x+1)^l}{dx^{l+m-k}}.$$

要使上述两个微商不同时为零, 必须满足 $k \leq l$ 和 $l+m-k \leq l$, 即 $m \leq k \leq l$, 所以

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l = \sum_{k=m}^l C_{l+m}^k \frac{l!(x-1)^{l-k}}{(l-k)!} \frac{l!(x+1)^{k-m}}{(k-m)!}.$$

作求和指标代换 $k = n + m$, 有

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l = \sum_{n=0}^{l-m} C_{l+m}^{n+m} \frac{l!(x-1)^{l-n-m}}{(l-n-m)!} \frac{l!(x+1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{l-m} \frac{(l+m)!(l!)^2(x-1)^{l-n-m}(x+1)^n}{(n+m)!(l-n)!(l-n-m)!n!}.$$

同样利用 Leibnitz 公式有

$$\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l = \sum_{n=0}^{l-m} C_{l-m}^n \frac{l!(x-1)^{l-n}}{(l-n)!} \frac{l!(x+1)^{n+m}}{(n+m)!} = (x^2-1)^m \sum_{n=0}^{l-m} \frac{(l-m)!(l!)^2(x-1)^{l-n-m}(x+1)^n}{n!(l-n-m)!(l-n)!(n+m)!}.$$

二微商式子相比较得 $C = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$. 因此,有

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x).$$

(3) 积分公式

施雷夫列 (Schlafli) 积分公式:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{(l+m)!}{2^l l!} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(\xi^2-1)^l}{(\xi-x)^{l+m+1}} d\xi$$

其中, γ 为包含 x 的任一闭曲线。

Laplace 积分表示式:

$$P_l^m(x) = \frac{i^m}{2\pi} \frac{(l+m)!}{l!} \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} \left(x + \sqrt{x^2-1} \cos \varphi\right)^l d\varphi.$$

[证明方式同 Legendre 多项式的积分公式].

(4) 递推公式

$$** (l-m+1)P_{l+1}^m(x) - (2l+1)xP_l^m(x) + (l+m)P_{l-1}^m(x) = 0 \quad (l=1,2,3,\dots).$$

[证明思路: 由 Legendre 多项式的递推公式

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0 \text{ 求导 } m \text{ 次, 再利用}$$

$$P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l, \text{ 然后乘以 } (1-x^2)^{m/2} \text{ 即证}].$$

$$** P_{l+1}^{m+1}(x) - P_{l-1}^{m+1}(x) = (2l+1)(1-x^2)^{1/2} P_l^m(x)$$

[证明思路: 将式 $P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l$ 对 x 求导 m 次, 乘以 $(1-x^2)^{m/2}$

即证。]

.....

(5) 正交性和模

对于同一 m , $\{P_l^m(x)\} (l = m, m+1, \dots)$ 在区间 $x[-1, +1]$ 上为正交完备集:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = 0 \quad (l \neq l');$$

或 $x = \cos \theta$: $\int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) P_{l'}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad (l \neq l')$.

模方: $\|P_l^m(x)\|^2 \equiv \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}$.

证明: 在递推公式 $(l-m+1)P_{l+1}^m(x) - (2l+1)xP_l^m(x) + (l+m)P_{l-1}^m(x) = 0$

中 ($l \geq 1$) 令 $l-1$ 代替 l , 乘以 $(2l+1)P_l^m(x)$, 得

$$\begin{aligned} & (2l+1)(2l-1)xP_l^m(x)P_{l-1}^m(x) \\ & = (2l+1)(l+m-1)P_l^m(x)P_{l-2}^m(x) + (2l+1)(l-m)[P_l^m(x)]^2. \end{aligned}$$

又将上面的递推公式直接乘以 $(2l-1)P_{l-1}^m(x)$, 得,

$$\begin{aligned} & (2l+1)(2l-1)xP_l^m(x)P_{l-1}^m(x) \\ & = (2l-1)(l-m+1)P_l^m(x)P_{l-1}^m(x) + (2l-1)(l+m)[P_{l-1}^m(x)]^2. \end{aligned}$$

两式相减, 得

$$\begin{aligned} & (2l+1)(l-m)[P_l^m(x)]^2 - (2l-1)(l+m)[P_{l-1}^m(x)]^2 \\ & - (2l-1)(l-m+1)P_l^m(x)P_{l-1}^m(x) + (2l+1)(l+m-1)P_l^m(x)P_{l-2}^m(x), \quad (l \geq 2) \end{aligned}$$

将此式在区间 $x[-1, +1]$ 积分, 并利用正交性得

$$\int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx = \frac{(2l-1)(l+m)}{(2l+1)(l-m)} \int_{-1}^1 [P_{l-1}^m(x)]^2 dx.$$

以此为递推公式, 可得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx & = \frac{(2l-1)(l+m)}{(2l+1)(l-m)} \int_{-1}^1 [P_{l-1}^m(x)]^2 dx \\ & = \frac{(2l-1)(2l-3)(l+m)(l+m-1)}{(2l+1)(2l-1)(l-m)(l-m-1)} \int_{-1}^1 [P_{l-2}^m(x)]^2 dx \\ & = \dots = \frac{(2m+1)(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!(2m)!} \int_{-1}^1 [P_m^m(x)]^2 dx \\ & = \frac{2(l+m)!}{2l+1(l-m)!}. \end{aligned}$$

计算中应注意 $l \geq m$ ，并且利用了 $\int_{-1}^1 [P_m^m(x)]^2 dx = \frac{2[(2m)!]^2}{(2m+1)!}$ ：

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [P_m^m(x)]^2 dx &= \left[\frac{1}{2^m m!} \right]^2 \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \left[\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} (x^2-1)^m \right]^2 dx \\ &= \frac{[(2m)!]^2}{2^{2m} (m!)^2} \int_0^\pi \sin^{2m+1} \theta d\theta = \frac{2[(2m)!]^2}{2^{2m} (m!)^2} \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} \theta d\theta \\ &= \frac{2[(2m)!]^2}{2^{2m} (m!)^2} \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2(m-1)}{2m-1} \cdot \frac{2(m-2)}{2m-3} \cdots \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2[(2m)!]^2}{2^{2m} (m!)^2} \frac{2^2 m!}{(2m+1)!!} = \frac{2[(2m)!]^2}{(2m)!!(2m+1)!!} = \frac{2[(2m)!]^2}{(2m+1)!}. \end{aligned}$$

上面第二等式完成微分，第三等式分部积分 $m-1$ 次。因而正交归一了。

(6) 广义 Fourier 级数

定义在区间 $x[-1,+1]$ 上的任何平方可积函数 $f(x)$ ，均可按

$\{P_l^m(x)\} (l \geq m)$ 展为平均收敛的广义 Fourier 级数：

$$f(x) = \sum_{l=m}^{\infty} C_l P_l^m(x),$$

$$C_l = \frac{1}{\|P_l^m\|^2} \int_{-1}^1 f(x) P_l^m(x) dx = (l + \frac{1}{2}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^1 f(x) P_l^m(x) dx.$$

$$\text{或者, } f(\theta) = \sum_{l=m}^{\infty} C_l P_l^m(\cos \theta), \quad C_l = (l + \frac{1}{2}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^\pi f(\theta) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

3. 球谐函数

$$\text{Laplace 方程: } \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta Y_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} Y_{\varphi\varphi} + l(l+1)Y = 0 \quad (\text{球函数方程})$$

和自然边界条件：

$$\begin{cases} Y(\theta, \varphi) \text{ 是单值的 [即 } \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \text{ 和 } \Phi'(\varphi + 2\pi) = \Phi'(\varphi)], \\ Y(\theta, \varphi) \text{ 是有限的,} \end{cases}$$

所构成的本征值问题的本征值和本征函数分别是

$$\lambda_l = l(l+1), \quad \lambda_m = m^2, \quad P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l).$$

$$P_l^m(\cos \theta) \text{ 和 } e^{im\varphi} \text{ 的归一化常数分别是 } \sqrt{\frac{(l+1/2)(l-m)!}{(l+m)!}} \text{ 和 } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

将函数 $P_l^m(\cos \theta)e^{im\varphi}$ 归一化后记为

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

$$(l = 0, 1, 2, \dots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l)$$

称为**球谐函数**(不同教材定义的形式有少许不同), l 称为球谐函数的次。

l 次球谐函数共有 $2l+1$ 个(λ_l 的简并度), 即 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ($m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$).

量子力学: $\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi);$

$$\hat{L}_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = m\hbar Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

正交归一化关系: $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$

二重广义 Fourier 级数:

定义在区间 $(0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ 上的任何平方可积函数 $f(\theta, \varphi)$,

均可按 $\{Y_{lm}(\theta, \varphi)\}$ 展为平均收敛的广义 Fourier 级数:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$C_{lm} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

低阶球谐函数: $Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$

$$\begin{cases} Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{20}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2 \theta - 1), \\ Y_{2,\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}, \\ Y_{2,\pm 2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm i2\varphi}. \end{cases}$$

例：在给定中心势场 $V(r)$ 的情况下，求解微观粒子的定态 Schrodinger 方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(r,\theta,\varphi)+V(r)\psi(r,\theta,\varphi)=E\psi(r,\theta,\varphi),$$

其中， μ 是粒子的质量， $\psi(r,\theta,\varphi)$ 是定态波函数， E 是能量。

解：

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi-[E-V(r)]\psi$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}(r^2\psi_r)_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\theta\psi_\theta)_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\psi_{\varphi\varphi}\right]-[E-V(r)]\psi=0.$$

令 $\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$ ， $Y(\theta,\varphi)$ 称为球谐函数。

$$\frac{1}{R}(r^2R')'+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}[E-V(r)]=-\frac{1}{Y\sin\theta}(\sin\theta Y_\theta)_\theta-\frac{1}{Y\sin^2\theta}Y_{\varphi\varphi}=l(l+1).$$

从而有

$$r^2R''+2rR'-\left[l(l+1)-\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}E+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}V(r)\right]R=0;$$

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta Y_\theta)_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}Y_{\varphi\varphi}+l(l+1)Y=0. \quad (\text{球函数方程})$$

后一方程与自然边界条件

$$\begin{cases} Y(\theta,\varphi) \text{ 是单值的 [即 } \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi) \text{ 和 } \Phi'(\varphi+2\pi)=\Phi'(\varphi)], \\ Y(\theta,\varphi) \text{ 是有限的,} \end{cases}$$

构成本征值问题： $\lambda_m=m^2$ ， $\lambda_l=l(l+1)$ ， $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ ($l=0,1,2,\dots$; $m=0,\pm 1,\pm 2,\dots,\pm l$)。

同时，由 $R(r)$ 所满足的方程

$$r^2R''+2rR'-\left[l(l+1)-\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}E+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}V(r)\right]R=0$$

附加一定的边界条件可以求得能量 E_n 和对应的本征函数 $R_n(r)$ 。具体的求解过程

依赖于势函数 $V(r)$ 的具体形式。例如， $V(r)=E=0$, Laplace 方程，其解

$R(r)=\{r^l, r^{-l-1}\}$ 见上； $V(r)=0, E \neq 0$, Helmholtz 方程，其求解过程见下章：

$R(r)=y(x)/\sqrt{x}$, $x=\sqrt{2\mu E}r/\hbar$, $y(x)=J_{l+1/2}(x)=j_l(x)$ ；自然界中最常见并且严格

可解的库伦势、引力势和谐振子势等，其求解过程和物理意义见量子力学教程)。

HW:12.4;12.8;12.9;12.13.