"微积分中微分同胚 → 一般曲线坐标系下张量分析 → 有限变形理论 → 涡量与涡动力学"教学路径 研究与实践 阶段性体会

复旦大学 力学与工程科学系 谢锡麟
xiexilin@fudan.edu.cn

2011年 理论与应用力学专业教育教学 复旦大学研讨会
2011年3月25-26日

（1）特殊 → 一般
（2）正本清源、格物致知
（3）学习、研究与教学相融合

05 年春	高等数学 II	
05 暑期		
05 年秋	高等数学 I	张量分析与微分几何基础
06 年春	高等数学 II	
06 暑期		
06 年秋	高等数学 I	张量分析与微分几何基础
07 年春	高等数学 II	张量分析与微分几何基础
07 暑期		经典力学数学名著选讲（数学分析深化）
07 年秋	数学分析 I	张量分析与微分几何基础、应用实变函数与泛函分析基础
08 年春	数学分析 II	张量分析与微分几何基础
08 暑期		经典力学数学名著选讲（数学分析深化）
08 年秋	数学分析 I	张量分析与微分几何基础、应用实变函数与泛函分析基础
09 年春	数学分析 II	张量分析与微分几何基础、涡量与涡动力学基础
09 暑期		经典力学数学名著选讲（数学分析深化）
09 年秋	数学分析 I	张量分析与微分几何基础、连续介质力学基础
10 年春	数学分析 II	连续介质力学基础，应用实变函数与泛函分析基础
10 暑期		经典力学数学名著选讲（数学分析深化）
10 年秋	数学分析 I	张量分析与微分几何基础
11 年春	数学分析 II	涡量与涡动力学基础、应用实变函数与泛函分析基础

- **微积分一流化进程：**

  数学分析 + 经典力学名著选讲 + 流形上的微积分；应用实变函数与泛函分析基础（本研）

- **基于现代张量分析的连续介质力学理论及其在流体力学中的实践**

  张量分析与微分几何基础 + 连续介质力学基础 + 涡量与涡动力学基础（本研）

具有国内外一流水平微积分教学的主要特征 及个人若干教学研究与实践

一般赋范线性空间之间映照的微分学

有限维Euclid空间之间映照的微分学

一维Euclid空间之间映照的微分学

Lebesgue 积分

Riemann 积分

—— 课程《数学分析新讲》(第一、二、三册)，每学期 6 学时(一年制)

① 一维Euclid空间之间映照的微积分； ② 有限维Euclid空间之间映照的微积分 —— 理论建立以映照为基本对象，以极限为基本观点。

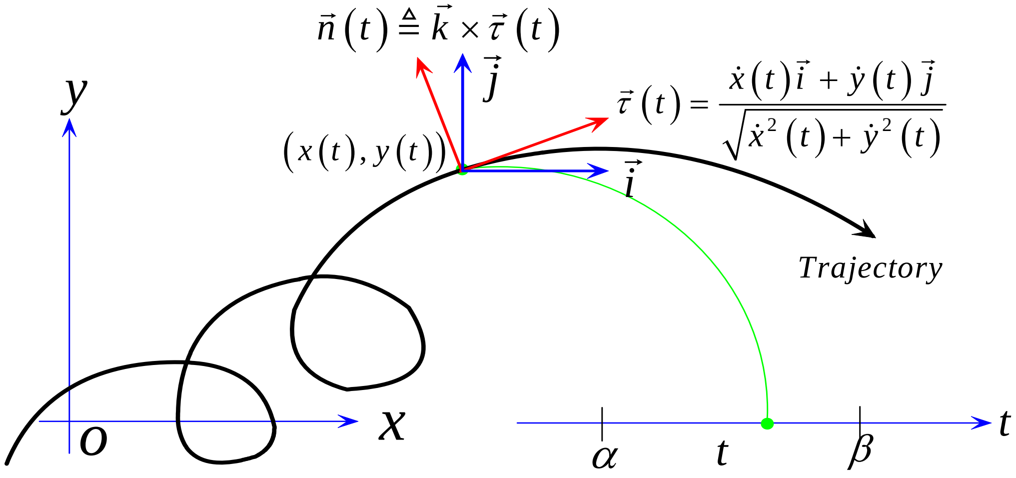
—— 课程《力学数学名著选讲》(有关数学分析深化)，一年级暑期课程，36-54学时

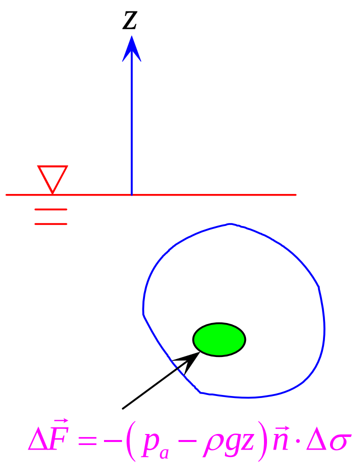
① 按有限维Euclid空间之间映照微分学的建立方法建立一般赋范空间之间映照的微分学；应用方面可以包括矩阵分析基本理论，变分法等。 ② 有限维Euclid空间上微分同胚的有关理论，包括秩定理，Morser定理等。③ 渐近分析

—— 课程《流形上的微积分》， 一年级暑期课程，36-54学时

① 基于有限维Euclid空间上微分同胚的有关理论，本着局部欧氏化的基本思想，建立微分流形的基本概念。② 基于郭仲衡著《张量》有关外积运算等理论建立微分流形上的微积分。③ 微分流形有关理论在力学中的应用。

基本观点 —— 力学所需的数学是认识自然及非自然世界系统的思想和方法，决非仅是数学上的逻辑过程，故力学专业的数学课程，需要包括：①数学定义的实际背景；②数学逻辑，即基于逻辑研究数学定义以获取相关数学结论；③数学结论对具体问题的意义。





Gauss formula

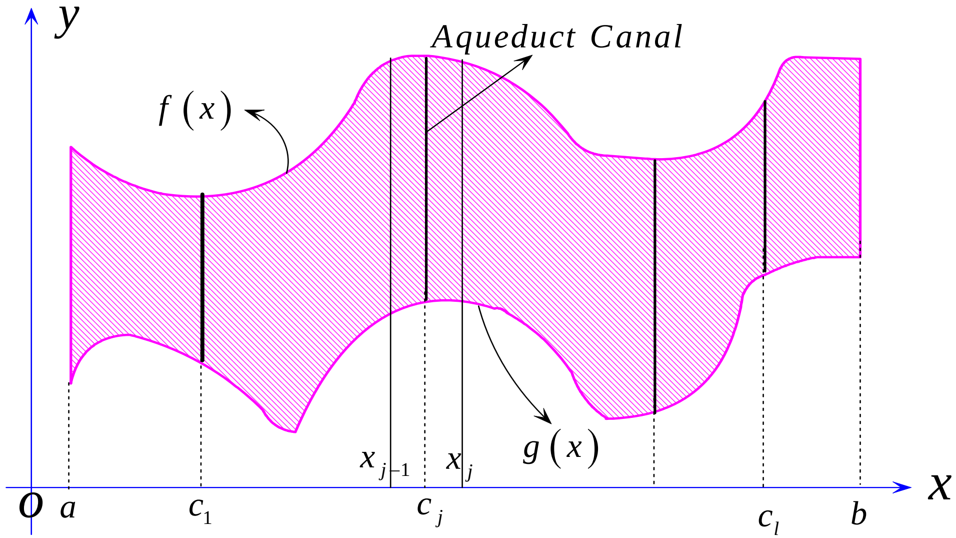
$$\oint_{\partial V} \vec{a} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_V \nabla \cdot \vec{a}\, d\tau$$

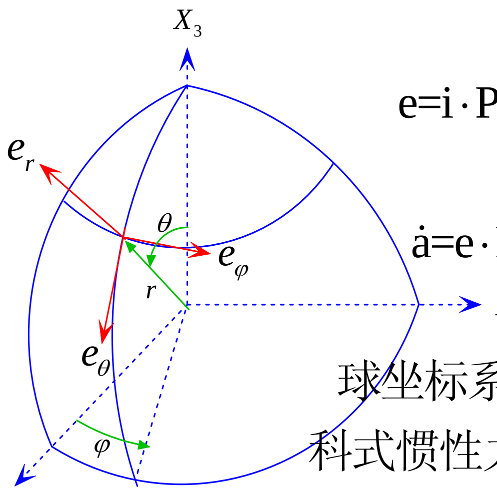
$$\oint_{\partial V} \varphi \vec{n} \cdot d\sigma = \int_V \nabla \varphi d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F} = \rho_{water} g V_{body}$$

$$\begin{cases} a_\tau(t) = \dfrac{dv}{dt}(t),\ v(t) := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \\ a_n(t) = \operatorname{sgn}(\ddot{y}\cdot\dot{x} - \ddot{x}\cdot\dot{y})(t)\cdot\kappa(t)\cdot v^2(t) = \operatorname{sgn}\left(f^{(2)}(x)\cdot\dot{x}(t)\right)\cdot\dfrac{v^2(t)}{\rho(t)} \end{cases}$$





$$\mathrm{e} = \mathrm{i}\cdot\mathrm{P},\ \mathrm{a} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{a}^{\mathrm{e}} = \mathrm{i}\cdot\mathrm{a}^{\mathrm{i}}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\mathrm{a}} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\dot{\mathrm{P}}\cdot\mathrm{a}^{\mathrm{e}} + \mathrm{e}\cdot\dot{\mathrm{a}}^{\mathrm{e}}$$

$$\Downarrow$$

球坐标系下加速度表达式

科式惯性力 ⇒ 地球偏转效应

基本观点 —— **“数学通识” 或者 知识体系中的“工兵”**

—— 我们生活的世界丰富多彩，但上帝也许就用一样东西创造了这些，这就是“数学机制”或“数学通识”(Mathematical Mechanism) —— **以某种数学结构或性质为载体，比定理等结论具有更高的归纳性，跨越不同课程甚至学科。**

—— 基于数学通识，追求数理知识体系的**“融会贯通、触类旁通”**

$$\Omega\cdot\vec{a} := \begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix} = \vec{\omega}\times\vec{a} \Rightarrow$$

微积分：*Stokes* 公式
力　学：速度、加速度
合成原理

$$\forall\begin{cases}A\in PSym\\ B\in Sym\end{cases},\ \exists G \text{ 非奇异, s.t. } \begin{cases}G^T AG = I_m\\ G^T BG = [\lambda_1,\cdots,\lambda_m]^T\end{cases} \Rightarrow$$

微分几何：曲面曲率
理论力学：振动模态

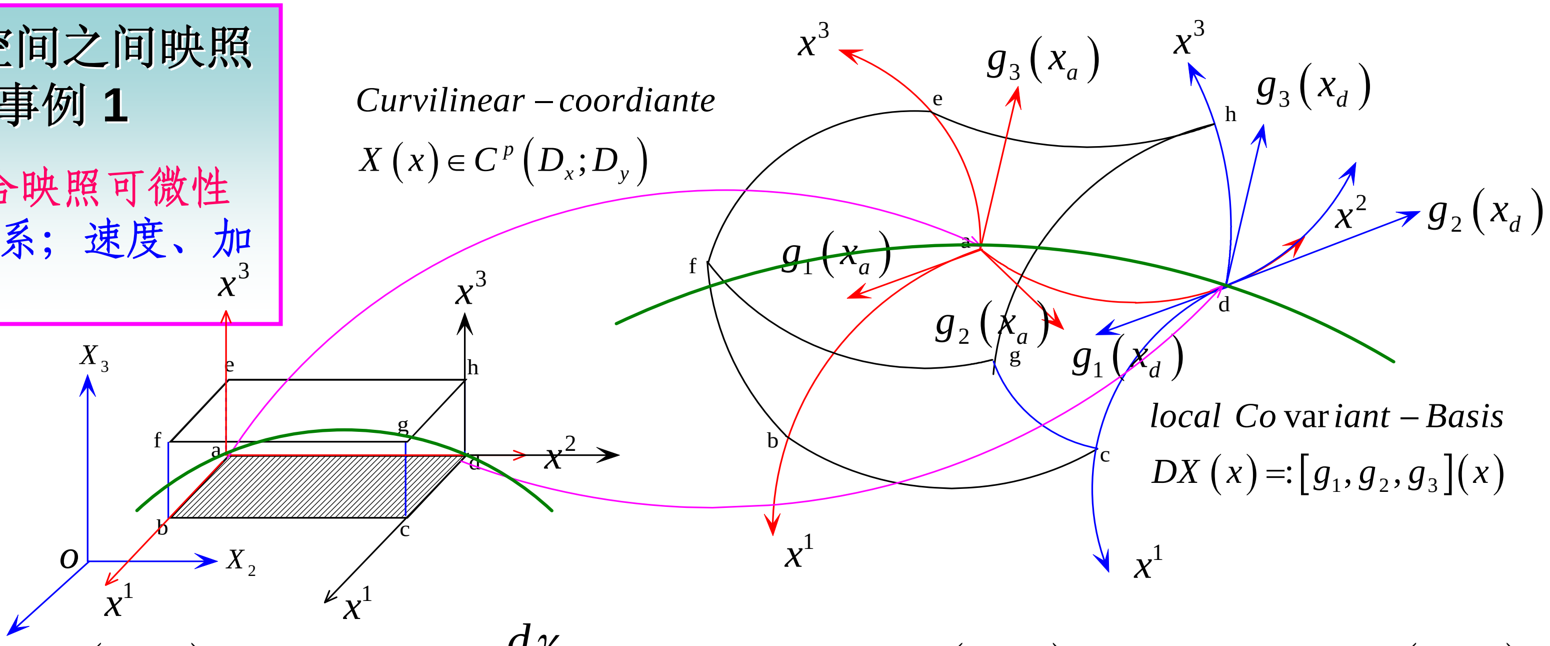
范德蒙行列式 $\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$

计算方法：多项式拟合
数学物理：函数的光滑沿拓

有限维Euclid空间之间映照的微分学 —— 事例 1

映照可微性；复合映照可微性

→ 一般曲线坐标系；速度、加速度局部基表示



$$\gamma_X(t) \triangleq X \circ x(t) \equiv X(x(t)) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \text{速度} \ \frac{d\gamma_X}{dt}(t) = D\gamma_X(t) = DX(x(t)) \cdot Dx(t) = \dot{x}^i(t)\, g_i(x(t))$$

引入：$\hat{v}(x,\dot{x}) := \dot{x}^i g_i(x)$，显然有 $\hat{v}(x(t),\dot{x}(t)) := \dot{x}^i(t)\, g_i(x(t)) = v(t)$.

按符合映照（函数）链式求导法则可得：

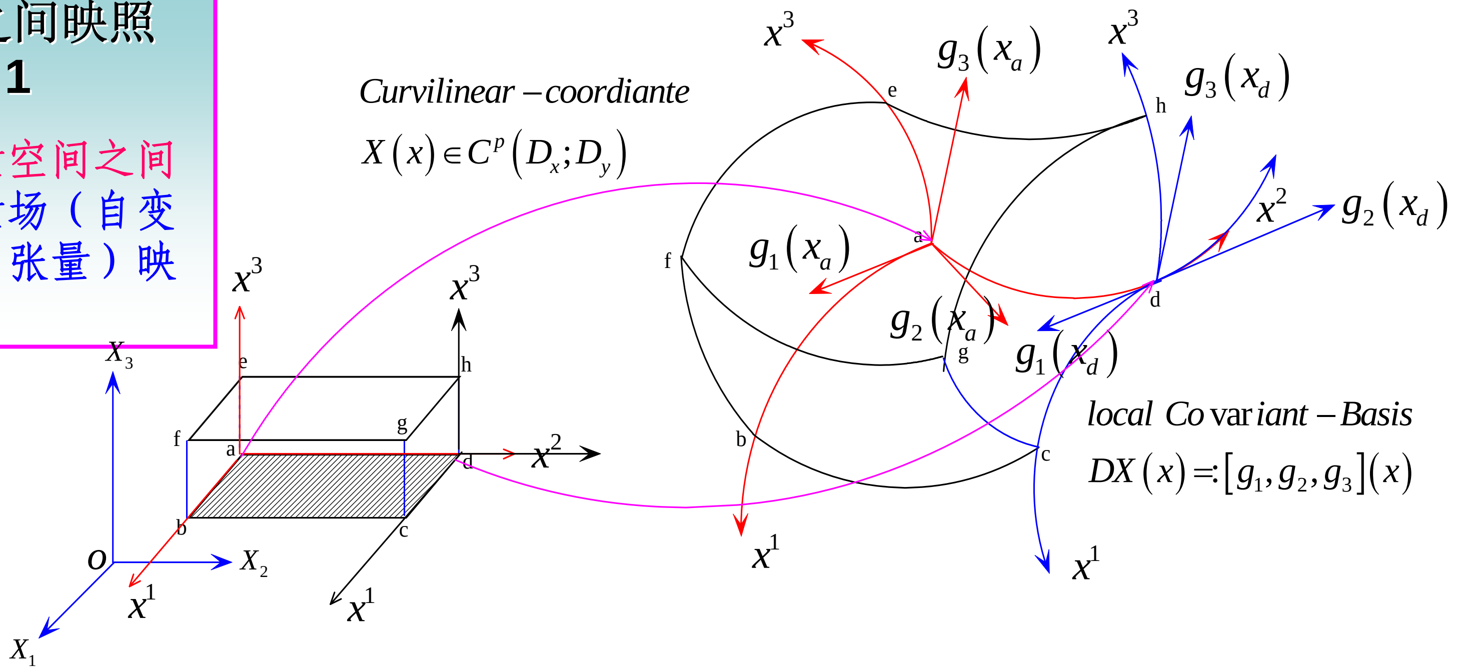
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{v}}{\partial \dot{x}^i}(x,\dot{x}) := g_i(x) \\ \dfrac{\partial \hat{v}}{\partial x^i}(x,\dot{x}) := \dot{x}^j \dfrac{\partial g_j}{\partial x^i}(x) = \dot{x}^j \dfrac{\partial g_i}{\partial x^j}(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \hat{v}}{\partial \dot{x}^i}(x(t),\dot{x}(t)) = g_i(x(t)) \\ \dfrac{\partial \hat{v}}{\partial x^i}(x(t),\dot{x}(t)) = \dot{x}^j(t) \dfrac{\partial g_i}{\partial x^j}(x(t)) = \dfrac{dg_i}{dt}(t) \end{cases}$$

此处，$g_i(t) := g_i(x(t))$。籍此可得：

$$a_i = \left(\frac{dv}{dt}(t), g_i(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{x}^i}(x(t),\dot{x}(t))\right) - \frac{\partial \hat{T}}{\partial x^i}(x(t),\dot{x}(t)), \text{此处，} \hat{T}(x,\dot{x}) := \frac{1}{2}|\hat{v}|^2(x,\dot{x})$$

一般赋范线性空间之间映照之微分学 —— 事例 1

Euclid空间至赋范张量空间之间映照的可微性 → 张量场（自变量 曲线坐标；应变量 张量）映照协变导数



张量场 $\Phi(x) := \Phi^{i\bullet k}_{\bullet j}(x) g_i \otimes g^j \otimes g_k(x) \in T^3(\mathbb{R}^m)$ 可微性，分析要素：

多元函数：$\nabla_l \Phi^{i\bullet k}_{\bullet j}(x+\Delta x) = \nabla_l \Phi^{i\bullet k}_{\bullet j}(x) + \dfrac{\partial \Phi^{i\bullet k}_{\bullet j}}{\partial x^s}(x)\Delta x^s + o(\Delta x) \in \mathbb{R}^1$

向量值映照：$g_i(x+\Delta x) = g_i(x) + \dfrac{\partial g_i}{\partial x^s}(x)\Delta x^s + o(\Delta x) = g_i(x) + \Gamma^t_{si}(x) g_t(x)\Delta x^s + o(\Delta x) \in \mathbb{R}^m$

向量值映照：$g^j(x+\Delta x) = g^j(x) + \dfrac{\partial g^j}{\partial x^s}(x)\Delta x^s + o(\Delta x) = g^j(x) - \Gamma^j_{st}(x) g^t(x)\Delta x^s + o(\Delta x) \in \mathbb{R}^m$

简单张量范数：$\left|\xi \otimes \eta \otimes \xi\right|_{T^3(\mathbb{R}^m)} = \left|\xi\right|_{\mathbb{R}^m} \cdot \left|\eta\right|_{\mathbb{R}^m} \left|\zeta\right|_{\mathbb{R}^m}$

$$\Rightarrow \Phi(x+\Delta x) = \Phi(x) + \nabla_l \Phi^{i\bullet k}_{\bullet j}(x) g_i \otimes g^j \otimes g_k(x) \cdot \Delta x^l + o(\Delta x) \in T^3(\mathbb{R}^m)$$

$$= \Phi(x) + \left[\nabla_l \Phi^{i\bullet k}_{\bullet j}(x) g_i \otimes g^j \otimes g_k \otimes g^l(x)\right] \cdot \left[\Delta x^q g_q(x)\right] + o(\Delta x) = \Phi(x) + (\Phi \otimes \nabla)(x) \cdot \Delta X + o(\Delta x)$$

正本清源、格物致知 —— 以方法论的思想梳理和掌握 理论 = 思想 + 方法（应用）

正本清源、格物致知 —— 事例 1 Euclid空间中场论恒等式的推导

1.Ricci引理：$\begin{cases} \dfrac{\partial \in}{\partial x^l}(x) = \dfrac{\partial}{\partial x^l}\left(\in^{ijk}(x) g_i \otimes g_j \otimes g_k(x)\right) = \nabla_l \in^{ijk}(x) g_i \otimes g_j \otimes g_k(x) = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x^l}(x) = \dfrac{\partial}{\partial x^l}\left(g_{ij}(x) g^i \otimes g^j(x)\right) = \nabla_l g_{ij}(x) g^i \otimes g^j(x) = 0 \end{cases}$

2.$\in^{ijk} \cdot \in_{ipq} = \delta_p^j \delta_q^k - \delta_p^k \delta_q^j$

3.*Euclid*空间基本性质：$\nabla_p \nabla_q = \nabla_q \nabla_p$

正本清源、格物致知 —— 事例 2 完整基下定义的张量梯度在非完整基下的表示，亦即“非完整基下，形式意义上的协变导数”

基本依据：

$$\nabla \otimes \Phi(x) := \nabla_l \Phi_{\cdot j}^{i \cdot k}(x) g^l \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k(x) =: \nabla_{(\theta)} \Phi_{\cdot (\beta)}^{(\alpha) \cdot (\gamma)}(x) g^{(\theta)} \otimes g_{(\alpha)} \otimes g^{(\beta)} \otimes g_{(\gamma)}(x)$$

此处：$\nabla_{(\theta)} \Phi_{\cdot (\beta)}^{(\alpha) \cdot (\gamma)}(x) = C_{(\theta)}^l C_i^{(\alpha)} C_{(\beta)}^j C_k^{(\gamma)}(x) \cdot \nabla_l \Phi_{\cdot j}^{i \cdot k}(x)$

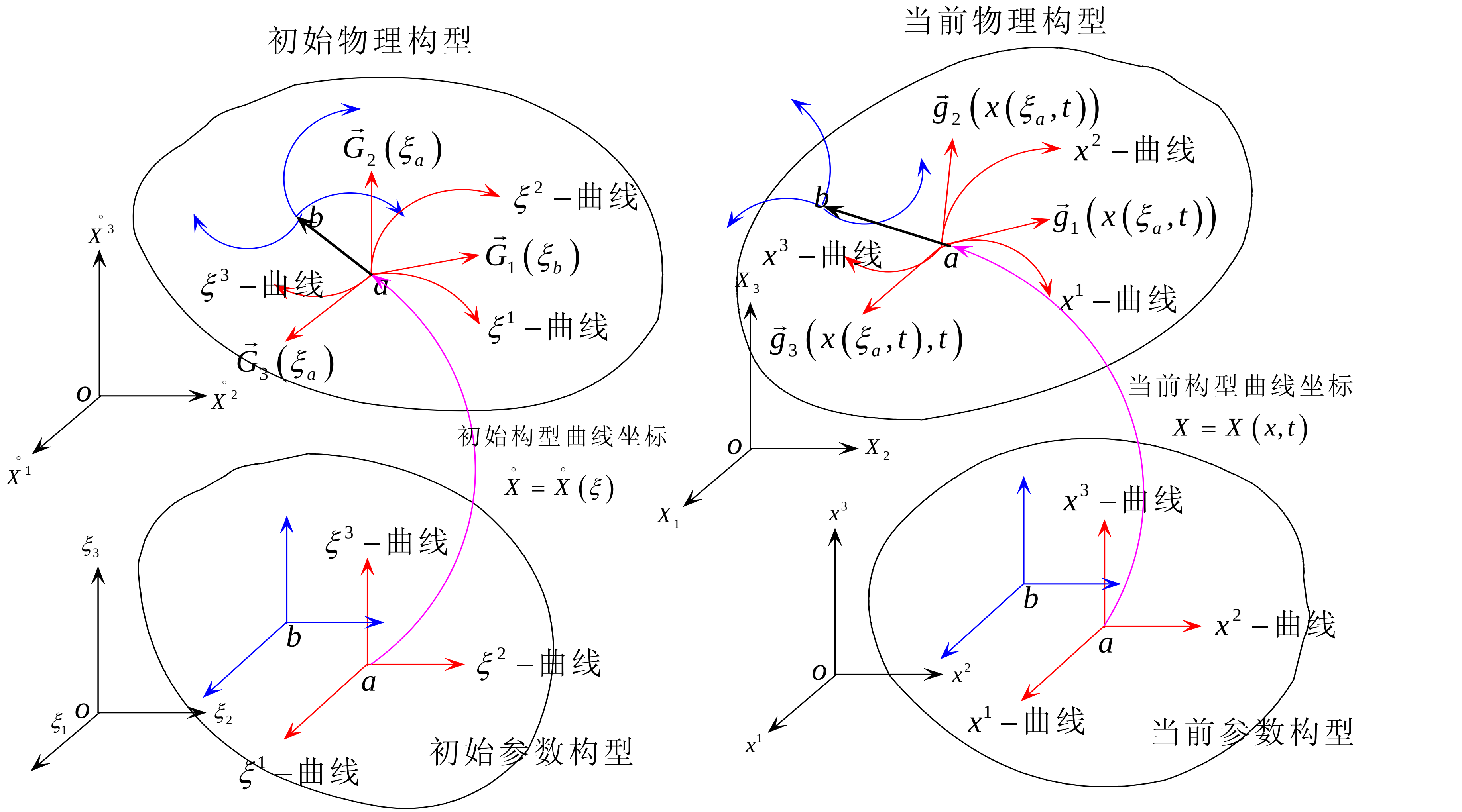
分析思想：

1.形式导数：$\partial_{(\theta)} := C_{(\theta)}^l \partial_l$

2.*Christoffel*符号：$\Gamma_{(\alpha)(\beta)}^{(\theta)}(x) := C_k^{(\theta)} C_{(\alpha)}^i C_{(\beta)}^j(x) \cdot \Gamma_{ij}^k(x) - C_{(\alpha)}^i C_{(\beta)}^j(x) \cdot \dfrac{\partial C_j^{(\theta)}}{\partial x^i}(x)$

3.协变导数：$\nabla_{(\theta)} \Phi_{\cdot (\beta)}^{(\alpha) \cdot (\gamma)}(x) := \partial_{(\theta)} \Phi_{\cdot (\beta)}^{(\alpha) \cdot (\gamma)}(x) + \Gamma_{(\theta)(\mu)}^{(\alpha)} \Phi_{\cdot (\beta)}^{(\mu) \cdot (\gamma)}(x) - \Gamma_{(\theta)(\beta)}^{(\mu)} \Phi_{\cdot (\mu)}^{(\alpha) \cdot (\gamma)}(x) + \Gamma_{(\theta)(\mu)}^{(\gamma)} \Phi_{\cdot (\beta)}^{(\alpha) \cdot (\mu)}(x)$

正本清源、格物致知 —— 事例 3 观点：“r阶张量”最多可有“r点形式”，亦即构成对应的简单张量的向量取自不同的r个基，以变形梯度（二阶张量）为例。

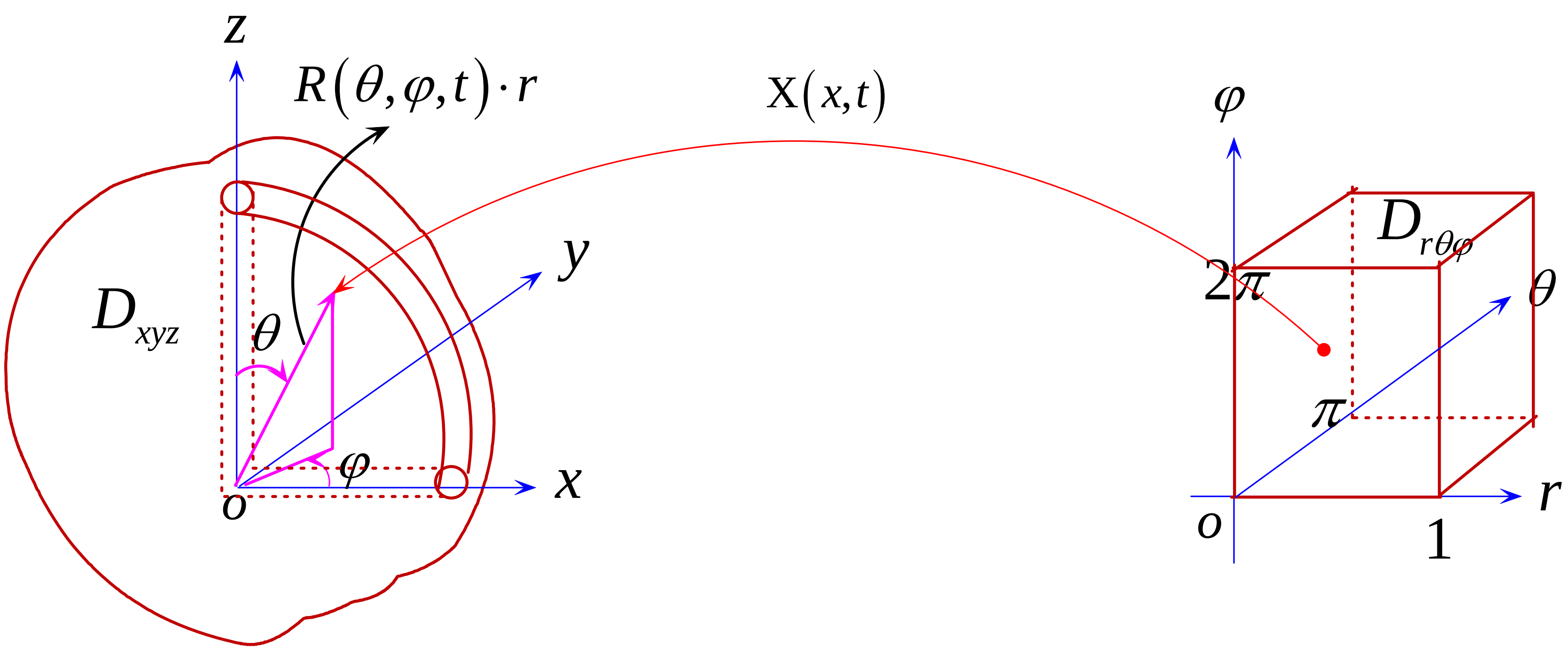


$$\vec{r}_{ab}\Big|_{当前物理构型} = X\left(x\left(\xi+\Delta\xi\right)\right) - X\left(x\left(\xi\right)\right) = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^A}\left(\xi,t\right) g_i\left(x\right)\cdot\Delta\xi^A = \left[\frac{\partial x^i}{\partial \xi^A}\left(\xi,t\right) g_i\left(x\right)\otimes G^A\left(\xi\right)\right]\cdot\left(\Delta\xi^B G_B\left(\xi\right)\right)$$

$$\vec{r}_{ab}\Big|_{当前物理构型} \doteq F\cdot\vec{r}_{ab}\Big|_{初始物理构型} = \left[\frac{\partial x^i}{\partial \xi^A}\left(\xi,t\right) g_i\left(x\right)\otimes G^A\left(\xi\right)\right]\cdot\vec{r}_{ab}\Big|_{初始物理构型}$$

学习、研究与教学的相互融合 —— 事例 1 “当前物理构型对应之曲线坐标系不显含时间情形” → “当前物理构型对应之曲线坐标系显含时间情形” —— 以期研究“边界的变形运动对流动空间动力学的影响”，映照观点。

$$\mathrm{X}(x,t): D_{r\theta\varphi} \ni x = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix} \to \mathrm{X}(x,t) \equiv \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix}(x,t) \triangleq \begin{bmatrix} R(\theta,\varphi,t)\cdot r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ R(\theta,\varphi,t)\cdot r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ R(\theta,\varphi,t)\cdot r\cdot\cos\varphi \end{bmatrix}$$



学习、研究与教学的相互融合 —— 事例 2 "当前物理构型对应之曲线坐标系显含时间情形" 下速度梯度的主要性质；对比与不显含时间情形的有关结论。

$$X(\xi,t)=X\left(x(\xi,t),t\right)$$

$$v=\dot{X}\triangleq\frac{\partial X}{\partial t}(\xi,t)=\frac{\partial X}{\partial x^i}(x,t)\frac{\partial x^i}{\partial t}(\xi,t)+\frac{\partial X}{\partial t}(x,t)$$

$$=\frac{\partial x^i}{\partial t}(\xi,t)\,g_i(x,t)+\frac{\partial X}{\partial t}(x,t)$$

$$\therefore v=\dot{x}(\xi,t)\,g_i(x,t)+\frac{\partial X}{\partial t}(x,t)$$

$$v^i=\frac{\partial x^i}{\partial t}(\xi,t)+\left(\frac{\partial X}{\partial t}(x,t)\right)^i$$

$$F=\frac{\partial x^i}{\partial \xi^A}(\xi,t)\,g_i(x,t)\otimes G^A(\xi)$$

$$\dot{F}=\left(v\otimes\Box\right)\bullet F$$

$$\left|F\right|=\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}}\det\left[\frac{\partial x^i}{\partial \xi^A}\right]$$

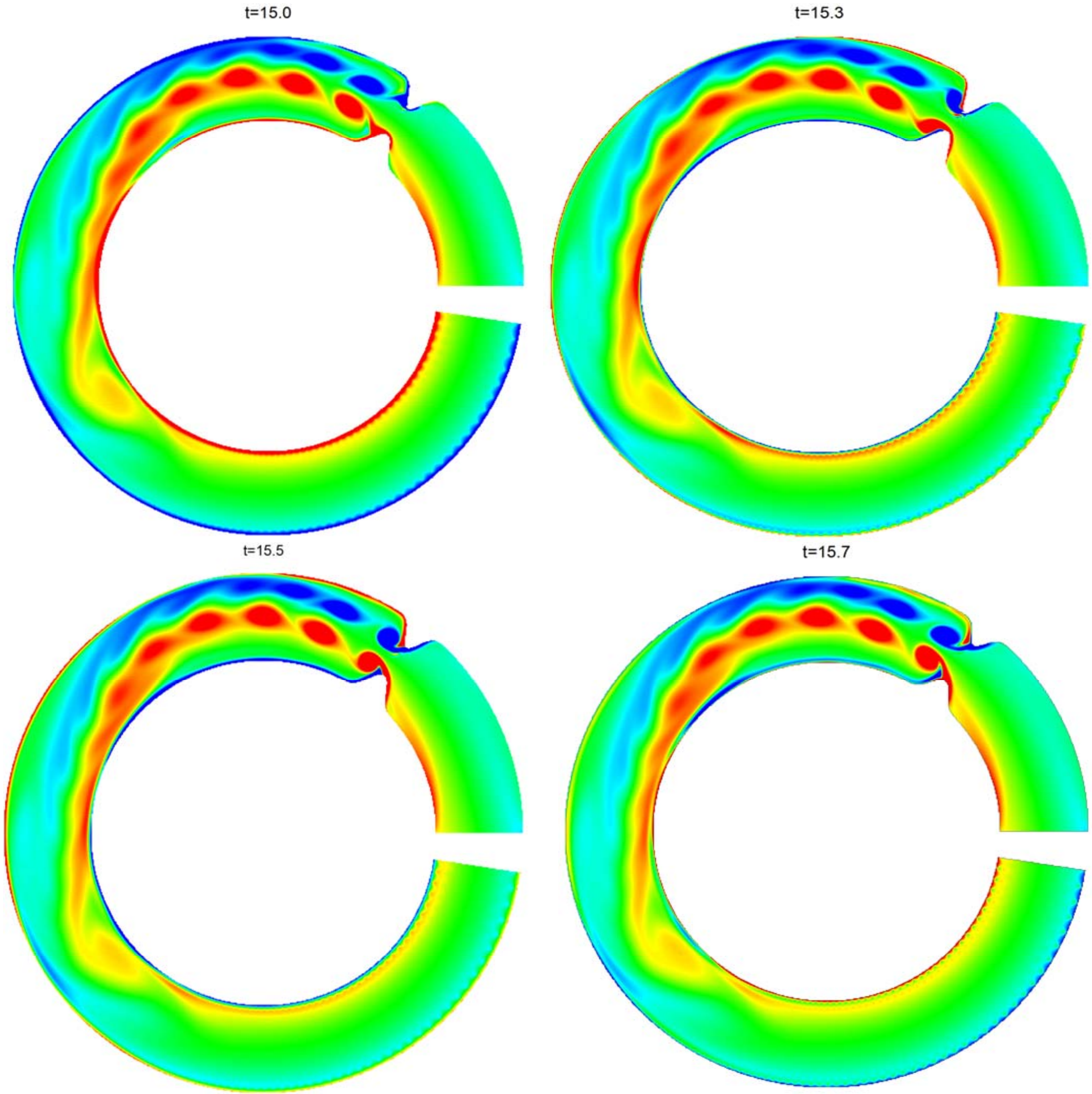
$$\dot{\overline{\left|F\right|}}=\theta\left|F\right|$$

$$\dot{\overline{\Phi}}\triangleq\frac{\partial\Phi}{\partial t}(\xi,t)=\frac{\partial\Phi}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(x,t)\frac{\partial x^i}{\partial t}(\xi,t)$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial t}(x,t)+\left[v^i(x,t)-\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^i(x,t)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(x,t)$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial t}(x,t)+v\bullet\Box\otimes\Phi-\frac{\partial X}{\partial t}(x,t)\bullet\Box\otimes\Phi$$

和谐自然 唯美力学



谨致各位 吉祥如意