1

复变函数与解析函数

1.1 复数的基本概念

为什么需要复数

1. 从数学角度看

实系数方程

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1.1}$$

在实数范围内无解，为使得二次多项式有两个根，引进复数。

数学游戏？不完全是！ —— 完全不是！

回顾数域之拓展： 逐渐引入，扩展

自然数 $\Longrightarrow$ 整数 $\Longrightarrow$ 有理数 $\Longrightarrow$ 实数 $\Longrightarrow$ 复数 $\Longrightarrow$ 四元数？

为使得实系数 n 次多项式存在 n 个根 —— 引入复数

那么，为使得复数系数次多项式存在 n 个根，是否要进一步拓展数域？

不必，封闭，完备：复数系数 n 次多项式有 n 个复数根。

能否进一步扩展？ —— 四元数：（quaternion）

源自19世纪末、20世纪初 Halmilton 等人， a, b, c, d 均为实数

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \tag{1.2}$$

$$\text{乘法不满足交换律：} \quad i\,j \neq j\,i, \qquad i\,j = -j\,i = k \tag{1.3}$$

$$\text{四元数：} \quad q = a\,i + b\,j + c\,k + d \tag{1.4}$$

为何不流行？ —— 1.复数已经封闭； 2.尚没有找到许多应用

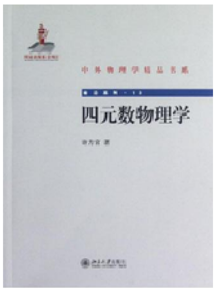
思考：为何没有三元数而直接跳到四元数？

“是故，易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦，八卦定吉凶，吉凶生大业。”

—— 《易传·系辞上传》

注：杨政宁曾预言四元数能在物理上得到应用，有志者可“路漫漫其修远兮，上下左右前后东西南北四面八方无往不利而求索”。

```
(* 把工作目录设置成文件所在的目录 *)
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
Import["fig01.01 quaternion.jpg", ImageSize → 150]
```



那么复数又有何用?

2. 从物理角度看

- 没有复数就没有（很难建立）量子力学（近 50% 的GDP与量子力学有关），量子力学需要复数;
- 当今物理几大方向：对称性、量子化、相位。后两者均需要复数以方便描述；例如：电磁波中有相位，电动力学需要复数。

复数的基本概念

1. 一对有序的实数 (x, y), 符号 i 称为虚数单位，实部 x，虚部 y，虚部为 0 时，完全退化为实数

$$z = x + i\, y, \quad i^2 = -1, \quad \mathrm{Re}[z] = x, \quad \mathrm{Im}[z] = y \tag{1.5}$$

2. 复共轭

$$z = x + i\, y, \quad z^* = x - i\, y, \quad \bar{z} = x - i\, y \tag{1.6}$$

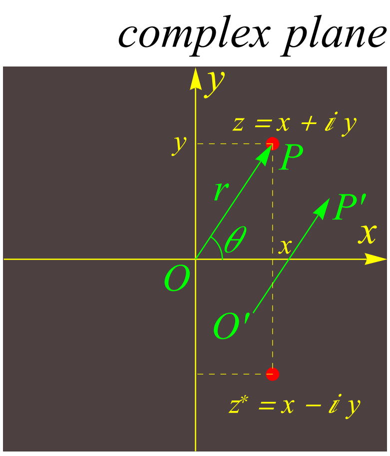
3. 相等：实部虚部分别相等

$$z_1 = x_1 + i\, y_1, \quad z_2 = x_2 + i\, y_2 \quad \text{则：} \quad z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \;\&\; y_1 = y_2 \tag{1.7}$$

复数的表示

1. 代数表示 $z = x + i\, y$

2. 几何表示：复平面上的一个点，如图中的 P 点



3. 矢量表示，如图中的 $\overrightarrow{OP}$ 矢量。自由矢量，长度方向相同即可认为两矢量相等，如图中 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'}$

4. 极坐标表示

模记为 $r = |z|$ 为矢量长度。模 $r = 0$ 时复数的辐角 $\arg[z]$ 不确定，模 $r \neq 0$ 时辐角也可差 $2n\pi$，通常将 $(-\pi, \pi]$ 之间的辐角值称为辐角主值，记为 $\mathrm{Arg}[z]$，故有

$$z = x + i\,y = r\cos\theta + i\,r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \mathrm{Arg}[z], \quad \arg[z] = \mathrm{Arg}[z] + 2n\pi \tag{1.8}$$

a. 有些书以 $\arg[z]$ 表示辐角的主值，从而 (1.8) 式变为：$\mathrm{Arg}[z] = \arg[z] + 2n\pi$。

b. 有些书将辐角主值定义于 $[0, 2\pi)$， 这方便于解析推导。

c. 而在计算机语言中，则将主值取为 $-\pi < \mathrm{Arg}[z] \leqslant \pi$，在介绍复数的根式运算之前，不妨试一试，在 *Mathematica* 中

$$\sqrt{-1+10^{-15}\,i} = i + 5.05\times10^{-16}, \quad \sqrt{-1-10^{-15}\,i} = -i + 5.05\times10^{-16},$$

```
(* ⅈ 的输入 ESCiiESC,   √ 的输入 ctrl-2,      ⅇ 的输入 ESCeeESC, *)
a = Sqrt[-1.0 + 10^-15 ⅈ]; (* Mathematica 认为辐角近似为π *)
b = Sqrt[-1.0 - 10^-15 ⅈ]; (* Mathematica 认为辐角近似为-π *)
{a, b}
```

```
{5.05322×10^-16 + 1. ⅈ, 5.05322×10^-16 - 1. ⅈ}
```

5. 指数表示：利用Euler公式，可把复数写成指数形式

$$\text{Euler's formula}: \; e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \text{so}, \quad z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r\,e^{i\theta} \tag{1.9}$$

a. 欧拉公式实际上可以看成复数（实部为零的纯虚数）指数运算的定义。这是在一个扩展的数域上定义指数运算。

b. 本质上是借助泰勒展开式：

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\,\theta)^n}{n!} = \cos\theta + i\sin\theta, \;(\text{请验证之}) \qquad \text{解释了为何不定义}: \; e^{i\theta} = \sin\theta + i\cos\theta$$

c. 同时又满足指数运算规律：$e^{i\theta_1}\,e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$，利于简化运算；

d. 量子力学中还进一步定义了以算符为宗量的指数函数：

$$e^{i\nabla^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(i\,\nabla^2\right)^n}{n!}, \qquad \text{其中：}\; \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\; \text{是个算符}$$

又如：算符 $\hat{l}_z = -i\,\dfrac{\partial}{\partial\phi}$，（$\phi$为球坐标的方位角）借助泰勒展开定义该算符的指数函数 $e^{-i\alpha\hat{l}_z}$

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha\hat{l}_z} f(\phi) &\equiv \left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i\,\alpha\,l_z)^m}{m!}\right] f(\phi) \\ &= \left[1 - i\,\alpha\,l_z + \frac{1}{2!}(-i\,\alpha\,l_z)^2 + \ldots\right] f(\phi) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^m}{m!} f^{(m)}(\phi) = f(\phi-\alpha) \end{aligned}$$

原来算符 $\hat{l}_z$ 的指数函数 $e^{-i\alpha\hat{l}_z}$ 表示绕 z 轴（逆时针）转动了 α 角度

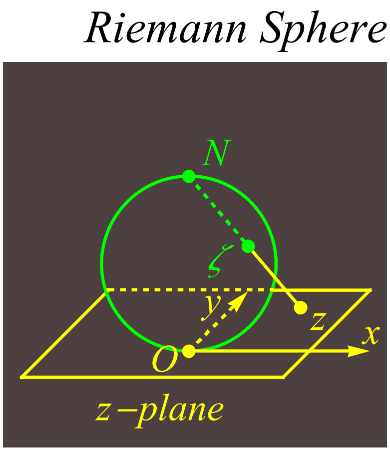
e. 欧拉公式在 $\theta = \pi$ 时有“最美的数学公式”，联系了几个基本数学常数：

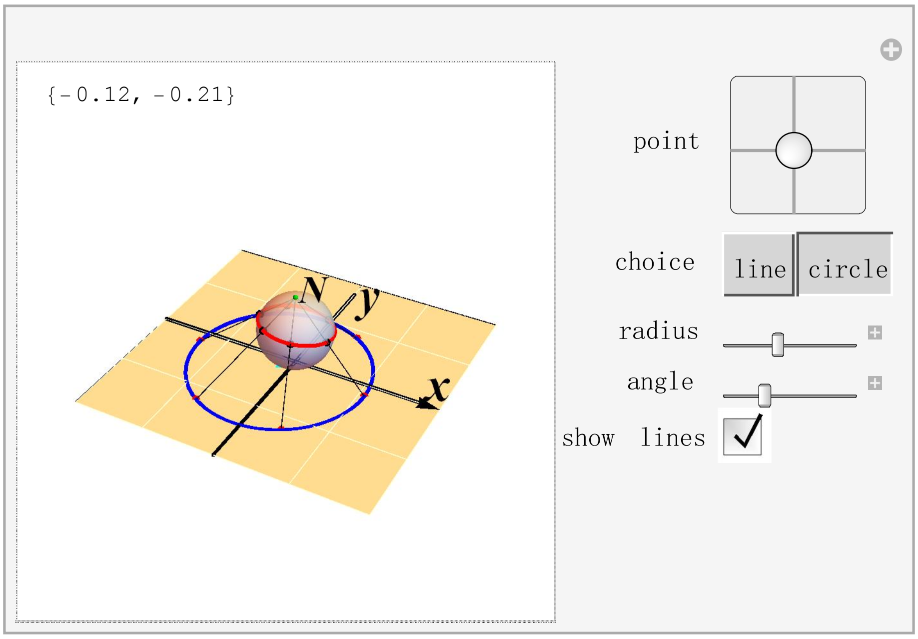
$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$， “无理数”的“虚”“无理数”次方加 1 居然为 0

6. 球面表示

过复平面原点做一球面与复平面相切，切点为该球面的南极点，北极点标记为N（过原点的直径交球面于N），对任意

在复平面的一点，连该点与北极点交球面于ζ，显然 z 点与 ζ 点一一对应。ζ 点即为复数的球面表示。北极点与复平面上模为无穷大的点对应——复平面上模为无穷大的点是一点：对应于复数球面的北极点。





a. 无穷远点的辐角没有定义；

b. 通常，复平面或全复平面不包含无穷远点，闭复平面或扩充复平面才包含无穷远点；

c. 以下形式的积分仅表示积分路径的不同，不表示有不同的无穷远点。

$$\int_0^{2+i\infty} \text{ versus } \int_0^{-i\infty}$$

复数的代数运算

1. 复数不能比较大小；（参阅吴崇试《数理方法专题》的讨论）

2. 当仅当两个复数的虚部、实部分别相等时，才称两复数相等；

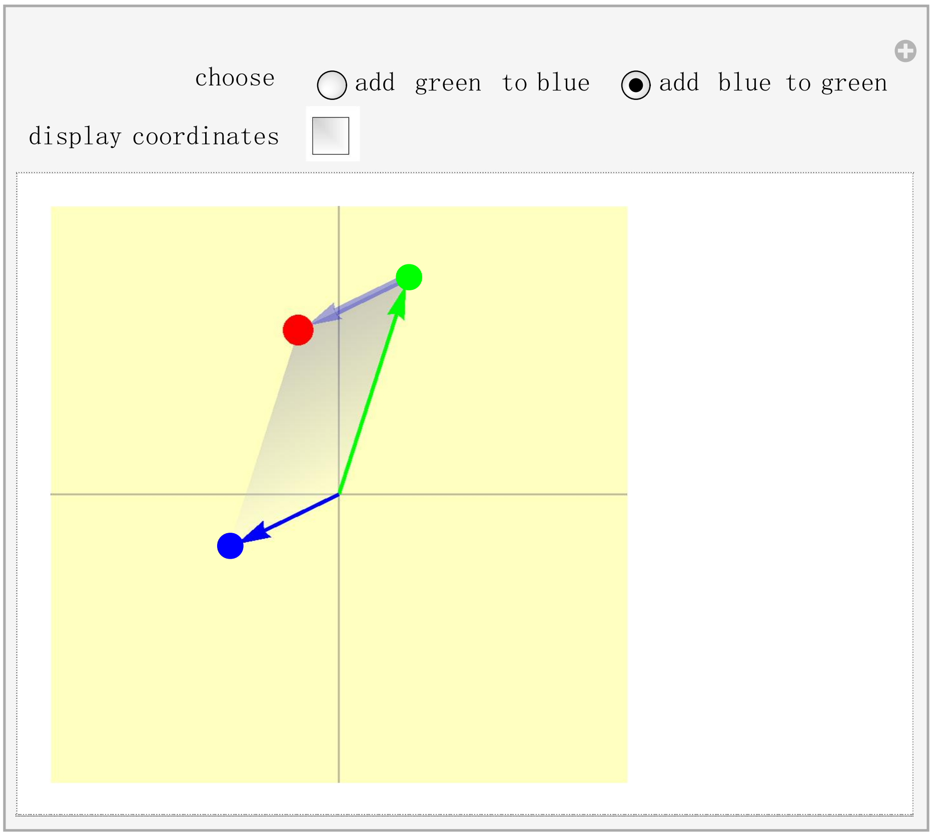
3. 加减法，加法满足交换律、结合律

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i\,(y_1 \pm y_2) \tag{1.10}$$

a. 加减法的几何意义：矢量相加之平行四边形法则；

b. 由三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边：

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2| \tag{1.11}$$



4. 乘法：满足分配律、结合律，交换律

$$z_1 z_2 = (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{1.12}$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{1.13}$$

$$z z^* = r^2 = |z|^2, \qquad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \tag{1.14}$$

a. 乘法的几何意义：长度为二者长度之积，辐角为二者之和。

b. 复数 a 与 z 的乘积 $a z$：把 z 矢量的长度变为 $|a| |z|$，辐角逆时针旋转：$\text{Arg}[a]$

5. 除法：z/a 把 z 矢量的长度变为 $|z|/|a|$，辐角顺时针旋转：$\text{Arg}[a]$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{1.15}$$

6. 乘方：n 为自然数

$$z^n = r^n e^{i n\theta} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n \tag{1.16}$$

a. 后一个等式也称为 Demoivre 定理

7. 开方：乘方的逆运算，n 为自然数

$$\begin{gathered} w = z^n \implies z = w^{1/n} \\ w = z^{1/n} = \left(r e^{i\theta}\right)^{1/n} = r^{1/n} e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1) \end{gathered} \tag{1.17}$$

a. 开方运算是多值的，源自辐角的多值性。

b. 这点与实数不同，对大于 0 的实数，开方可取算术根（只取 $k = 0$ 的根），复数不可以只保留“算术根”。

c. 复数开 n 次方的 n 个根均匀分布于以原点为圆心，$r^{1/n}$ 为半径的圆周上。

复数应用举例—— 第一次亲密接触

例题

求证

$$\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\ldots\sin\frac{(m-1)\pi}{m}=\frac{m}{2^{m-1}},\quad \text{integer } m>1$$

Mathematica 可直接给出结果:

```
f[m_] := Product[Sin[n π/m], {n, 1, m - 1}]
FullSimplify[f[m]]
```

```
2^(1-m) m
```

证明： z^m-1 有 m 个根均匀分布于单位圆圆周上 $e^{i\frac{2k\pi}{m}}$，其中 $k=0,1,2,\ldots,(m-1)$，因此

$$z^m-1=\prod_{k=0}^{m-1}\left(z-e^{i\frac{2k\pi}{m}}\right)=(z-1)\prod_{k=1}^{m-1}\left(z-e^{i\frac{2k\pi}{m}}\right)$$

$$\frac{z^m-1}{z-1}=1+z+z^2+\ldots+z^{m-1}=\prod_{k=1}^{m-1}\left(z-e^{i\frac{2k\pi}{m}}\right)$$

对最后一个等式（蓝色部分），令 $z=1$，则有：

$$m=\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-e^{i\frac{2k\pi}{m}}\right),\qquad \text{取复共轭：}\ m=\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-e^{-i\frac{2k\pi}{m}}\right)$$

两个等式相乘

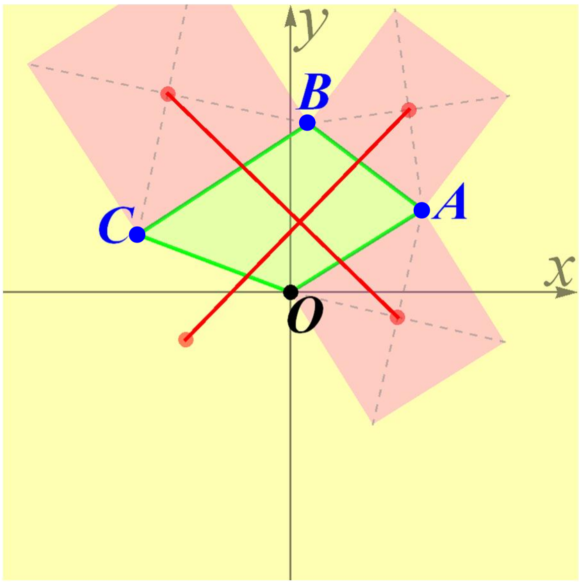
$$m^2=\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-e^{i\frac{2k\pi}{m}}\right)\left(1-e^{-i\frac{2k\pi}{m}}\right)=\prod_{k=1}^{m-1}2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{m}\right)=\prod_{k=1}^{m-1}2^2\sin^2\frac{k\pi}{m}$$

两边开方即得。

例题

求证：任意四边形的边外接四个正方形，对边正方形中心的连线相互垂直且相等。

显示复数



利用复数的矢量表示，矢量也可以用复数表示，设

$\overrightarrow{OA} = 2a$, $\overrightarrow{AB} = 2b$, $\overrightarrow{BC} = 2c$, $\overrightarrow{CO} = 2d$,

$a + b + c + d = 0$ 其中 a, b, c, d 为复数

OA边的外接正方形中心 A' 表为： $a - i\,a$ $\overline{OA}$的一半 a 加上该矢量顺时针转 $\frac{\pi}{2}$

AB边的外接正方形中心 B' 表为： $2a + b - i\,b$

BC边的外接正方形中心 C' 表为： $2a + 2b + c - i\,c$

CO边的外接正方形中心 D' 表为： $2a + 2b + 2c + d - i\,d$

矢量 $\overrightarrow{A'C'}$ 可表为： $z_1 = (2a + 2b + c - i\,c) - (a - i\,a) = (a + 2b + c) - i(c - a)$

矢量 $\overrightarrow{B'C'}$ 可表为： $z_2 = (2a + 2b + 2c + d - i\,d) - (2a + b - i\,b) = (b + 2c + d) - i(d - b)$

要证明垂直且相等，须证明：$z_2/z_1 = \pm i$ （正负号可由图形判断）

```
Clear[a, b, c, d];
z1 = (a + 2 b + c) - i (c - a);
z2 = (b + 2 c + d) - i (d - b);
Simplify[ z2 - i z1, a + b + c + d == 0]
```

```
0
```

例题

求积分

$$\int_{-\infty}^{-1}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{17} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}} \cos(17x)\,dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{-1}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{17} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}} e^{i\,17x}\,dx$$

分析： 显然，无法通过求原函数求得该定积分的值。只有通过数值计算。

一般的数值计算程序，运算过程仅保留15位有效数字，

而上述积分的被积函数的绝对值在 $(-\infty,-1]$ 间达 10^{23}，积分结果 数量级仅为 1。

从而该积分实际上为一些 10^{23} 的数相加减，得到 10^1 的数。

有效数字损失 22 位，任何仅有15位有效数字的算法均无法得到可靠结果。

Mathematica 编程练习

验证：对复平面上任意 n 个互不相等的有限远点 z_k, $k=1, 2, \ldots, n$, $(n \geq 2)$，有恒等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\prod_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{n}(z_k - z_m)} = 0$$

复数序列的极限

按一定顺序排列的复数，$z_n = x_n + i\,y_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$，称为复数序列。

- 聚点：$\forall\,\varepsilon > 0$，$\exists$ 无穷多个 z_n 满足 $|z - z_n| < \varepsilon$，则 z 称为序列的一个聚点。
- 极限：$\forall\,\varepsilon > 0$，$\exists\,N(\varepsilon) > 0$ 使得当 $n > N$ 时恒有 $|z - z_n| < \varepsilon$，则称 z 为复数序列的极限。记为 $\lim_{n\to\infty} z_n = z$

一个序列可以由多个聚点，如：$\frac{1}{3}, -\frac{2}{4}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{6}, \ldots, (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}, \ldots$ 就有两个聚点：± 1，当极限存在时，极限是序列唯一的聚点。

实数序列中，最大的聚点称为序列的上极限，记为：$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$，最小的聚点称为下极限，记为：$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$

定理：极限存在充要条件：Cauchy判据

$\forall\,\varepsilon > 0$，$\exists\,N(\varepsilon) > 0$，使得当 $n > N$ 时，对任意正整数 p，恒有 $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$。

- 极限趋于无穷：$\forall\,M > 0$，$\exists\,N(M) > 0$，使得当 $n > N$ 时，恒有 $|z_n| > M$。记为 $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$。

1.2 复变函数 复变函数的极限与连续

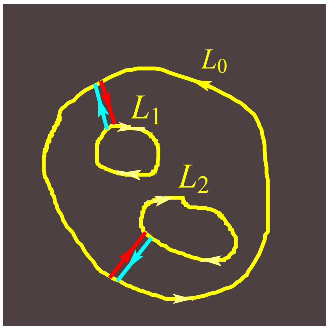
区域

函数的概念推广到复数数域，自变量是复数，取值范围在复平面的某个区域，与二元函数有点相似（但又不是二元函数）。

一些概念：

- 点集：复平面上任意一些点的集合。
- 邻域：点 z_0 的 ε 邻域是指满足 $|z - z_0| < \varepsilon$ 的点集，以 z_0 为中心，ε 为半径的圆内。
  - 去心邻域（无心邻域）：满足 $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ 的点集。
- 内点：点集 S 的内点指的是可以找到该点的一个邻域，使得该邻域的点都属于点集 S。

- 开区域：两个条件：a. 每一点都是内点；b. 点集中的任意两点均可用一条属于该点集的点构成的曲线或折线相连。
  - 例： $|z| < a$ 是一个开区域。
- 边界点：不属于开区域 D，但其任一邻域均包含属于 D 与不属于 D 的点。
- 闭区域：开区域 + 边界点，记为 $\overline{D}$。
  - 例： $|z| < R$ 是一个开区域； $|z| = R$ 为边界点； $|z| \le R$ 是一个闭区域。
- 全平面：不包括无穷远点的整个复平面，也称复平面。
- 闭平面：包含无穷远点的整个复平面，也称扩充复平面。
- 单连通区域：边界一条简单闭合曲线构成的区域，如 $|z| < R$
- 复连通区域：边界由多于一条闭合曲线构成，如：$R_1 < |z| < R_2$.
  - 关于单连通与复连通： 区域 D 中任意一条闭合曲线，能否通过连续变形缩成一个点，在变形过程中，该曲线上的任意点始终不落在区域 D 之外。
  - 可以通过做割线把复连通区域变为单连通区域。



几点补充：

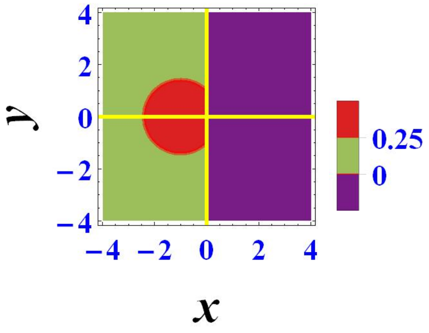
- 通常用 G 来表示开区域， $\overline{G}$ 来表示闭区域， $\overline{G} = G + C$， C 为边界点；
- 对复平面，无穷远点称为其边界点，对扩充复平面，无穷远点是内点；
- 扩充复平面是唯一一个无边界点的区域；
- 有限远点 z_0 的 δ 邻域为满足 $|z - z_0| < \delta$ 的所有点；
- 无穷远点的 δ 邻域为满足 $|z| > 1/\delta$ 的点，即：以原点为中心，$1/\delta$ 为半径的圆之外的点集；
- 区域边界正向：沿着边界走，区域在左手边

例题

试画出 $0 < \arg\left[\frac{z-i}{z+i}\right] < \frac{\pi}{4}$ 的区域

$$w = \frac{z-i}{z+i} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} - \frac{2\,x\,i}{x^2+(y+1)^2} = u + i\,v$$

依题意： $u > 0$, $0 < v < u$, 得：$x^2+y^2-1 > 0$, $-2\,x > 0$, $x^2+y^2-1 > -2\,x$，得到如图绿色区域。



复变函数

对于复变量在某一个区域取的每一个复数值 $z = x + i\,y$ [或每一对 (x, y) 值]，按照一定的规律，有一个或多个复数值 $w = u + i\,v$ 与之相对应，则称 w 是 z 的函数，记为 $w = f(z)$

$$w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) \tag{1.18}$$

印象：两个二元实变函数的有序组合。许多性质是二元函数的推广。仅仅是两个二元实变函数的简单推广？NO!

- 如果一个 z 值对应于一个 w 值，称为单值函数，如：$w = z^2$；

- 如果一个 z 值对应于多个 w 值，称为多值函数，如：$w = z^{1/2} = \sqrt{z}$；

- 与实变函数之不同，这里的函数定义规定对应“一个或多个复数值”，而实变函数中函数的定义通常是：有确定的值与之对应，确定，隐含着一个值而非多个值。

  - 多值函数例：开根。$y = f(x) = \sqrt{x}$，可以规定取正根，定义出根式函数。对复变函数，$w = f(z) = \sqrt{z} = z^{1/2}$ 起源于平方函数的开根，当然有两个根

    $w = \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)},\ \ k = 0, 1$
  - 能否像实变函数那样规定根式函数只取 $k = 0$ 对应的根？不能。因为若规定只取 $k = 0$ 对应的根，就等价于确定了复变量 z 的辐角，对复平面上的一点，不再让其辐角有 $\pm 2\,k\,\pi$ 的自由度。那么，在今后做积分时，若积分路径是沿圆心于原点的圆逆时针绕一周回到起点，复变量 z 在复平面上尽管回到起点，但其之辐角显然比起绕圆一周之前增加了2π，因此，不能剥夺复变量 z 的辐角有 $\pm 2\,k\,\pi$ 的自由度。绕圆一周根式的函数值显然不再为原来的数值（因为辐角增加了 $2\,\pi$）。不能将函数值确定为原来的值，也就是说，开平方的根式函数可能有两个值，不能“拿衣服”地舍去其中某个值，是多值函数。
  - 也可这样理解，对实变开平方函数，积分只能在实轴上跑，$x < 0$ 区间是不能到达的，相当于规定了不可逾越的边界。因此在规定了 $x = 0$ 是不可逾越的边界之后，我们就可以放心地取正根单值函数。对复变函数，由上讨论知不可能只取单值函数（否则会出现不自洽），那么是否也可以在规定某些不可逾越的边界，函数退化为单值函数？的确如此，所谓多值函数的割线正是规定了一条不可逾越的鸿沟，之后，函数就退化为单值函数了。例如，规定负实轴为割线，则在复平面上，$w = \sqrt{z}$ 即退化为单值函数，可利用单值函数的性质。我们将先讨论单值函数。

- 定义域：自变量在 z 平面内的取值区域。

- 值域：函数值 w 平面内的取值区域。

- 对自变量在 z 平面内沿某条曲线 L 变动，函数值在 w 平面内沿另一条曲线 L' 变动，对单值函数，L 与 L' 的点由 $w = f(z)$ 确定了一一对应关系。这种对应称为从 z 平面到 w 平面的一个映射。这就是复变函数的几何意义。

例题

$w = 1/z$ 函数，将曲线 $|z-a| = |a|$ 映射成 w 平面内的什么曲线

解法：由函数关系 $w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ 反求出 $z = g(w) = x(u, v) + i\, y(u, v)$，

把 $z = g(w)$ 代入 z 平面的曲线方程，即得关于 u，v 的方程，此即 w 平面内的曲线方程。

$$z = \frac{1}{w} \text{代入原曲线方程} \implies \left|\frac{1}{w} - a\right| = |a| \implies \left(\frac{1}{w} - a\right)\left(\frac{1}{w^*} - a^*\right) = |a|^2$$

$$\implies a\, w + a^*\, w^* = 1 \implies 2\,\mathrm{Re}(a\, w) = 1 \xrightarrow[a=|a|(\cos\phi_a + i\sin\phi_a)]{w=u+i\,v} 2\,|a|\,(u\cos\phi_a - v\sin\phi_a) = 1\,,$$

其中 ϕ_a 为复数 a 的辐角

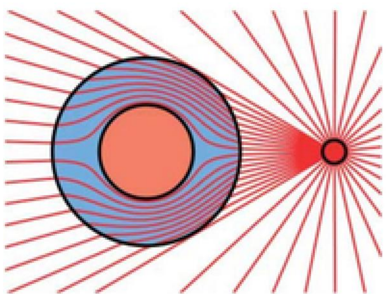
$$\implies u\cos\phi_a - v\sin\phi_a = \frac{1}{2\,|a|} \implies \text{直线方程}$$

$w = 1/z$ 把一个圆映射成一条直线，当然反过来，也可以把一条直线映射成一个圆 —— 数学游戏？不完全是！

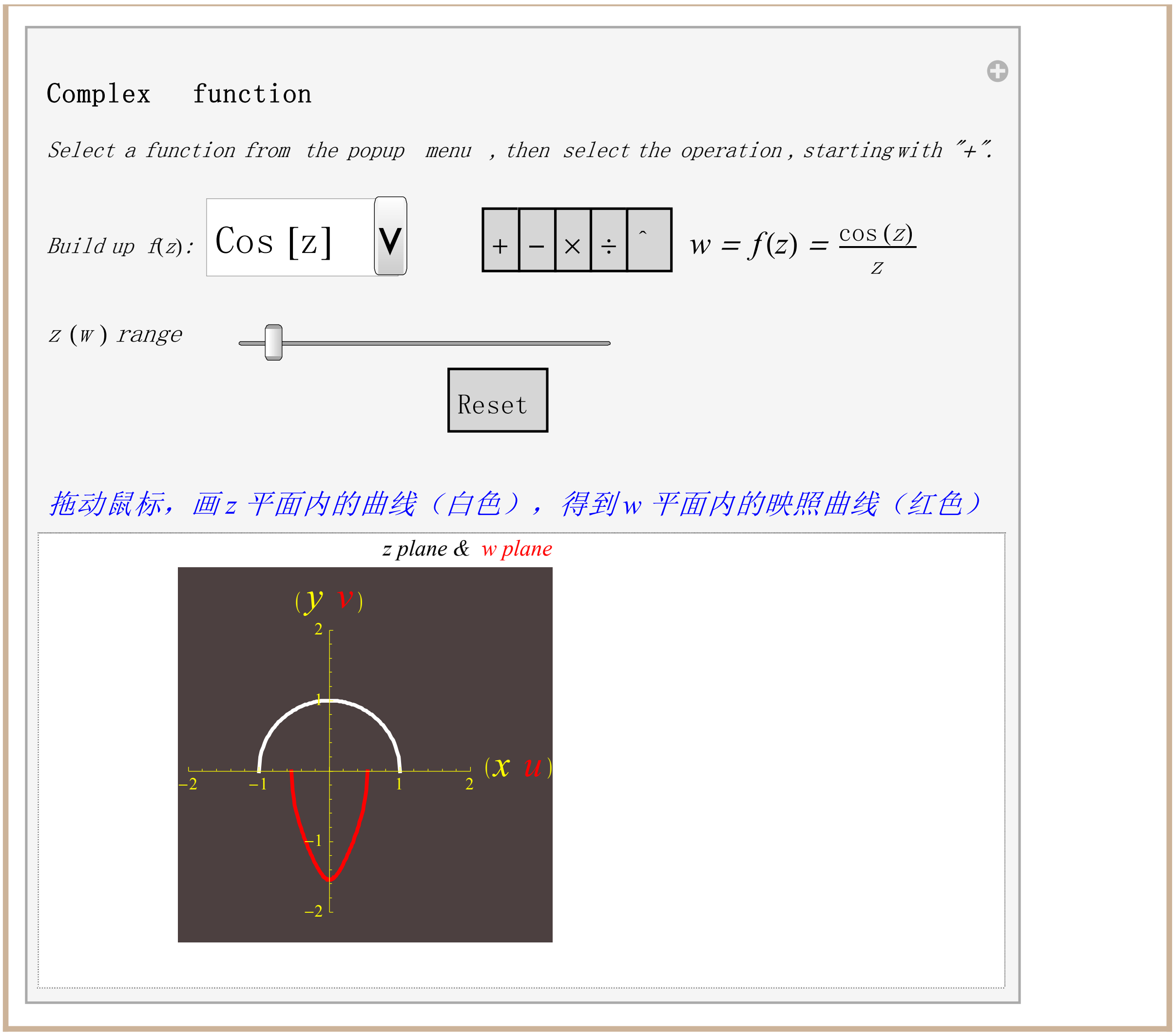
- 变换光学

  - 光在真空中沿直线传播，数学上意味着真空中的 Maxwell 方程存在直线传播解。
  - 设真空中坐标为 (x, y)，在另一个经过 $w = 1/z$ 变换的空间，空间坐标为 (u, v)。
  - 在(x, y) 空间 Maxwell 方程为 Eq1，在 (u, v) 空间，经坐标变换，以 (u, v) 自变量，Maxwell 方程变为 Eq2。
  - (x, y) 空间的一条直线到 (u, v) 空间变为一条曲线，也就表明，Eq1存在直线解，Eq2 必存在曲线解，
  - 故在 (u, v) 空间，光满足Eq2，光沿曲线传播。如何构造 (u, v) 空间？
  - 如果能将物理空间中的 Maxwell 方程变为 Eq2，则在该物理空间中光也沿曲线传播，但能否实现？
  - 理论上可行——通过调节空间每一点的介电常数 ε 和磁导率 μ，使得在真实物理空间中 Maxwell 方程变为 Eq2 形式。
  - 如何确定空间每一点的介电常数 ε 和磁导率 μ，使得 Maxwell 方程变为 Eq2 形式？
  - 将新坐标 $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ 中的 Maxwell 方程，与真空中的 Maxwell 方程比较，不同之处可以归结为介电常数 ε 和磁导率 μ。
  - 让光沿设计的曲线传播有何好处：光可以绕过某物体传播，在该物体就相当于视而不见了——隐身斗篷。

```
(* 把工作目录设置成文件所在的目录 *)
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
Import["fig01.02 cloaking.jpg", ImageSize → 200]
```



- Mathematica 程序 z01-07 mapping.nb 给出通过一些常见的复变函数 $w = f(z)$，将 z 空间任意画一条曲线，映照到 w 空间的一些例子。



- 🏵 *Mathematica* 编程小课题：对一般的复变函数 $w=f(z)$，将 z 空间给定的一条曲线映照到 w 空间。

💡 复变函数的极限

- 极限：$w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 是在 z_0 的一个去心邻域有定义的单值函数，$\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta(\varepsilon)$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$，则称 w_0 为函数 $f(z)$ 在 $z\to z_0$ 时的极限，记为：$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$。

  - 从定义可以看出，极限值 w_0 与 $z\to z_0$ 的方式无关，若 $z\to z_0$ 方式不同导致 $f(z)$ 的极限值不同，则称 $f(z)$ 的极限不存在。
  - 对实函数 $f(x)$，要求左右极限相等且左极限等于右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，对复变函数，要求与 $z\to z_0$ 的方式无关。
  - 由 $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 是一对有序的二元实变函数，故极限性质是二元实变函数的推广，尚且没有新的特性。
  - 如果 f 和 g 的极限都存在，则：

$$\lim_{z\to z_0}(f\pm g)=\lim_{z\to z_0} f\pm\lim_{z\to z_0} g,\qquad \lim_{z\to z_0} f\,g=\lim_{z\to z_0} f\,\lim_{z\to z_0} g,\qquad \lim_{z\to z_0}\frac{f}{g}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0} f}{\lim\limits_{z\to z_0} g}\quad \text{if}\ \lim_{z\to z_0} g\neq 0$$

复变函数的连续

- 函数连续的定义：函数值等于极限值

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{1.19}$$

- ε - δ 定义：函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的一个邻域有定义，$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta(\varepsilon, z_0)$，使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$，则称函数 $w = f(z)$ 在 z_0 连续。

- 复变函数连续等价于两个二元实变函数：$u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 均连续 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0)$。

- 如果函数在区域 D 内的每一点都连续，则称函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续。

- 一致连续：函数 $w = f(z)$ 在区域 D 或闭区域 $\overline{D}$ 有定义，对区域内的任意一点 z_0 和 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)$，（特别注意要求能够找到一个与 z_0 无关的 δ ）使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$，则称函数 $w = f(z)$ 在该区域一致连续。
    - 一致连续也可表述为：$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$，使得对区域内满足 $|z_1 - z_2| < \delta$ 的任意两点 z_1, z_2，恒有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$。证明非一致连续时常用此性质。
    - 连续是对每个点而言，一致连续是对整个区域而言；
    - 一致连续要求能找到与 z_0 无关的 δ，找到了才能称一致连续；
    - 若函数 $f(z)$ 在一个闭区域 $\overline{D}$ 内连续（即对 $\forall\, z \in \overline{D}$ 均连续），则 $f(z)$ 在该闭区域内必然一致连续；
    - 一致连续的重要性将在复变函数的积分中显现。

- 若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 z_0 点连续，则其和、差、积、商（分母 $\neq 0$）也连续；

- 连续函数的有限次复合仍为连续函数，例如：$f(z) = \sin\left(z^2 + 1\right)$。

以上性质与二元实变函数完全相同，因为到连续这一概念，复变函数也还显现出任何特别之处（一致连续也非复变函数的新概念）。

例题

若 $f(z)$ 在 z_0 连续且 $w_0 = f(z_0) \neq 0$，则必可找到 z_0 的一个邻域，使得在此邻域内，$f(z) \neq 0$。

证：$f(z)$ 在 z_0 连续，故对 $\varepsilon = |f(z_0)|/2$，$\exists\ \delta$，使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时，$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon = |f(z_0)|/2$，

也即，存在一个邻域 $|z - z_0| < \delta$，使得 $|f(z_0)| - |f(z)| \leq |f(z) - f(z_0)| < |f(z_0)|/2$

$\Longrightarrow\ |f(z_0)| - |f(z)| \leq |f(z) - f(z_0)| < |f(z_0)|/2 \quad \Longrightarrow \quad |f(z)| > |f(z_0)|/2 > 0$

例题

试证：$f(z) = z^2$ 在 $|z| < 1$ 区域一致连续

证：要证一致连续，需要找一个与 z_0 无关的 δ。

$\forall\, \varepsilon > 0$，需要证明 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ 成立的充分条件是 $|z - z_0| < \delta$，且 δ 与 z_0 无关。下导之。

注意箭号的取向，表明从右边可推得左边，但从左不一定得到右。

$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \ \Longleftarrow\ \left|z^2 - z_0^2\right| < \varepsilon \ \Longleftarrow\ |z - z_0|\ |z + z_0| < \varepsilon$ （注意要得到 $|z - z_0| < \delta$ 的形式）

$\Longleftarrow\ |z - z_0|\,(|z| + |z_0|) < \varepsilon \ \xLeftarrow{|z|<1}\ \left|z - z_0\right| < \varepsilon/2$，取 $\delta = \varepsilon/3$，此 δ 与 z_0 无关，

即：对给定的任意的 ε，存在与 z_0 无关的 $\delta = \varepsilon/3$，

使得 $|z - z_0| < \delta$ 时，$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$。（可沿箭号方向证明。）

例题

试证： $f(z)=1/z$ 在 $0<|z|<1$ 区域 D 不是一致连续。

证：要证明“非一致连续”，需要证明找不到（不存在）一个与 z_0 无关的 δ。

要证明不存在，常用反证法，假设存在，举一反例，推出矛盾。

假设对 $\forall\,\varepsilon>0$，存在一个与 z 无关的 δ，可使 $|z_1-z_2|<\delta$ 时，

$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon \implies \left|\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right|<\varepsilon$。

因为存在的 δ 与 z 无关，故可取

$z_1=10^{-M}\delta$，$z_2=10^{-M-2}\delta$，对任意正数 M，均有 $z_1\in D$，$z_2\in D$ 且 $|z_1-z_2|<\delta$

故对这两个 z_1，z_2，无论 M 为何值，都应该满足 $|f(z_1)-f(z_2)|=\left|\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right|<\varepsilon$

但 $\left|\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right|=\frac{99\times 10^M}{\delta}$，只要 M 足够大，就可能使 $\frac{99\times 10^M}{\delta}>\varepsilon$

与 $|f(z_1)-f(z_2)|=\left|\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right|<\varepsilon$ 矛盾，因此不可能存在与 z 无关的 δ，

故函数在 $0<|z|<1$ 区域不可能一致连续。

1.3 复变函数的导数 Cauchy-Riemann条件

导数与微分

设 $w=f(z)$ 是区域 D 内的单值函数，若在 D 内某点 z_0，极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \tag{1.20}$$

存在，则称 $f(z)$ 在 z_0 点可导，极限值为函数 $f(z)$ 在 z_0 的导数，记为

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}(f(z_0+\Delta z)-f(z_0))=\left(\frac{d f(z)}{d z}\right)_{z=z_0} \tag{1.21}$$

导数其实是变化率的极限，这点与一元实变函数类似。

- 由极限的定义可知，无论 Δz 以何种方式趋于0，极限值均应存在且相等；
- 若函数在 z_0 点可导，则必在 z_0 点连续，否则分母趋于0，分子不趋于0，极限不存在；
- 导数形式与实变函数相同，故实变函数的求导法则可推广到复变函数，如两函数的和、差、积、商，复合函数求导等；
- 无穷远点的导数：$\left(\frac{d f(z)}{d z}\right)_{z=\infty}=\left(\frac{d f(1/\zeta)}{d(1/\zeta)}\right)_{\zeta=0}=-\zeta^2\left(\frac{d f(1/\zeta)}{d\zeta}\right)_{\zeta=0}$；（参阅吴崇试《数理方法专题》的讨论）
- 实变函数的导数只需 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的左右极限相等，而复变函数则要求无论 Δz 以何种方式趋于0，极限均存在且相等

可导的要求很苛刻，从而可导函数的性质更为丰富。

从导数开始，复变函数开始有别于两个有序的二元实变函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$。

微分：若函数变化值 $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$ 可写成

$$\Delta w=\alpha\,\Delta z+o(\rho),\ \text{其中}\ \rho=\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]^{1/2},\quad \lim_{\Delta z\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta z}=0 \tag{1.22}$$

则称函数 w 在 z 点可微，$d w=\alpha\,\Delta z$ 称为 $f(z)$ 在 z 点的微分。

- 可微，则 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\alpha\,\Delta z+o(\rho)}{\Delta z}=\alpha=f'(z)$，可微必可导；
- 可导，则 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z)\implies \Delta w-f'(z)\,\Delta z=$ 必然为 $o(\rho)$，可导必可微；
- 微分，$\alpha=\frac{d w}{\Delta z}=\frac{d w}{d z}=f'(z)$，故导数亦称微商。 以上概念是一元实变函数的简单推广。

可导之充要条件

定理：$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$在 $z=x+i\,y$ 可导的充要条件为

1. 两个二元实变函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$在 (x,y) 点可微；
2. 两个二元实变函数满足 C-R 条件

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x \tag{1.23}$$

证明：充分性

两个二元实变函数可微，则

$$\Delta u=u_x\,\Delta x+u_y\,\Delta y+o_1(\rho),$$

$$\Delta v=v_x\,\Delta x+v_y\,\Delta y+o_2(\rho),$$

故：

$$\Delta w=\Delta u+i\,\Delta v=(u_x+i\,v_x)\,\Delta x+(u_y+i\,v_y)\,\Delta y+o(\rho)$$

利用 C–R 条件以及 $\Delta z=\Delta x+i\,\Delta y$

$$\Delta w=(u_x+i\,v_x)\,\Delta x+(i\,v_x+u_x)\,i\,\Delta y+o(\rho)=(u_x+i\,v_x)\,\Delta z+o(\rho)$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=(u_x+i\,v_x)=(v_y-i\,u_y)\implies \text{可导}$$

必要性：$f'(z)$ 存在，故 $f'(z)=a+i\,b$，可导必可微

$$\Delta w=(a+i\,b)\,\Delta z+o(\rho),\quad o(\rho)=\eta_1+i\,\eta_2,\quad \eta_1 \text{ 与 } \eta_2 \text{ 为 } o(\rho) \text{ 的实部与虚部}$$

又

$$\Delta w=u(x+\Delta x,y+\Delta y)+i\,v(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-i\,v(x,y)=(a+i\,b)\,(\Delta x+i\,\Delta y)+\eta_1+i\,\eta_2$$

比较虚实部：

$$\Delta u=a\,\Delta x-b\,\Delta y+\eta_1,\quad \Delta v=b\,\Delta x+a\,\Delta y+\eta_2\implies \text{两二元实变函数 } u,v \text{ 可微}$$

因为 $f(z)$ 可导，变化率极限与 Δz 趋于 0 的方式无关

令：$\Delta y=0$，$\Delta x\to 0$，则：$a=\frac{\partial u}{\partial x}$，$b=\frac{\partial v}{\partial x}$

令：$\Delta x=0$，$\Delta y\to 0$，则：$a=\frac{\partial v}{\partial y}$，$b=-\frac{\partial u}{\partial y}$

上两式即为 $C-\mathrm{R}$条件。

- 只有 C-R条件是不够的，还需 两二元实变函数 u，v 可微。
  - 反例：$f=\sqrt{|x|\,|y|}$ 在 $x=y=0$ 点满足 C-R 条件，但 u, v 在 $z=0$ 点不可微，故 $f(z)$ 在原点不可导；

$$u_x|_{z=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0,\quad \text{类似地，}\ u_y|_{z=0}=0\text{，满足 C–R 条件}$$

但 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|\,|\Delta y|}}{\Delta z}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{|\cos\phi\sin\phi|}}{e^{i\phi}}$ 极限与 ϕ 有关，不可导 （其中 $\Delta z=\rho\, e^{i\phi}$）

- 反例： $f(z)=\begin{cases}|z|\,(1+i) & z\neq\pm z^*\\ 0 & z=\pm z^*\end{cases}$ 在 $x=y=0$ 点满足 C-R 条件，但 $f(z)$ 在该点不可导；

  函数的实部虚部为： $u=v=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2} & x\,y\neq 0\\ 0 & x\,y=0\end{cases}$

  $u_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0$, 类似地， $u_y(0,0)=v_x(0,0)=v_y(0,0)=0$，满足 C−R 条件

  但 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{r(1+i)}{r\,e^{i\phi}}$ 极限与 ϕ 有关，不可导

  原因：二元实变函数 u, v 在原点不可微 （试证之）。

- 二元实变函数可微的充分条件：两个偏导数存在且连续；但可微并不一定要求两个偏导数都连续。例

  $u(x,y)=\begin{cases}e^x\,y^2\sin\frac{1}{y} & \text{if } y\neq 0\\ 0 & \text{if } y=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点可微，但 u_y 在该点不连续

  $u(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2 & \text{if } x\,y\neq 0\\ 1 & \text{if } x\,y=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点不连续 （自然就不可微），

  但偏导数 u_x 和 u_y 在该点都存在

- 除多值函数，如 $z^{1/n}$, $\ln z$, 初等复变函数除有限点或可列无限点外，处处可导；

- 不可导的点称为函数的奇点；

- $w=z$ 处处可导， $w=z^*$ 则处处不可导，因为 $u_x=1\neq v_y=-1$，复共轭破坏可导性质，一个解析函数，取复共轭就为非解析函数；

- 极坐标下， $u(r,\theta)$, $v(r,\theta)$，C-R条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\end{cases}$$

- C-R条件也可写成： $\frac{\partial f(z,z^*)}{\partial z^*}=0$，故显含 z^* 的函数必不可导（个别点除外），如： $w=z^*$。

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y),\qquad \text{变量代换：}\begin{cases}x=\dfrac{(z+z^*)}{2}\\ y=\dfrac{(z-z^*)}{2\,i}\end{cases}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z^*}=\frac{1}{2},\quad \frac{\partial y}{\partial z^*}=\frac{i}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z^*}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*}+i\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*}+i\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z^*}\ \overset{\text{等价于}}{\Longleftrightarrow}\ \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}\quad C-R\ 条件$$

导数的几何意义

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

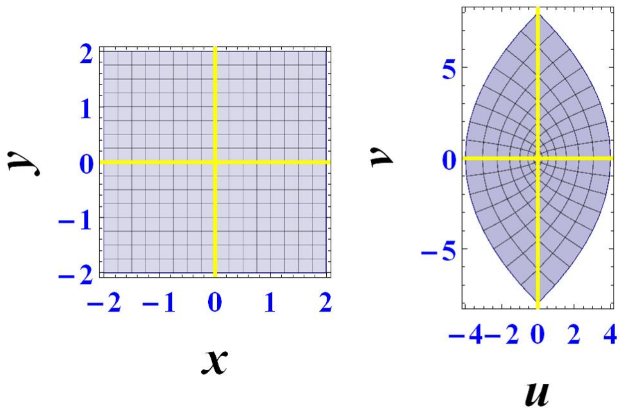
$$\Delta w = w - w_0 = |\Delta w|\, e^{i \arg \Delta w}, \quad \Delta z = z - z_0 = |\Delta z|\, e^{i \arg \Delta z}$$

故：

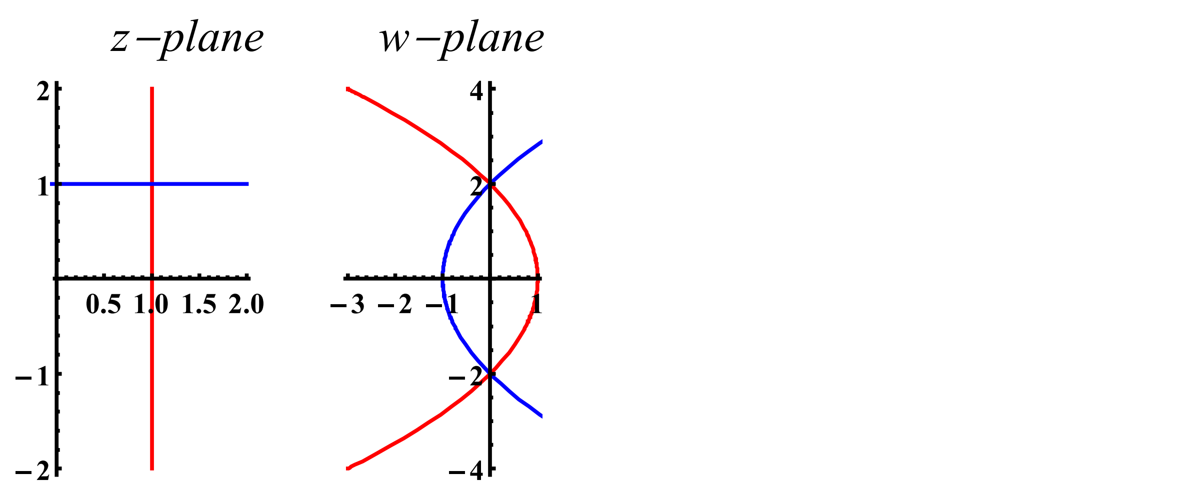
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| e^{i(\arg \Delta w - \arg \Delta z)} = |f'(z_0)|\, e^{i \arg f'(z_0)}$$

- 当 z 沿曲线 L 趋于 z_0 时，$\arg\Delta z$ 为 z 平面曲线 L 在 z_0 点的切线与实轴夹角；
- 当 w 沿曲线 L' 趋于 w_0 时，$\arg\Delta w$ 为 w 平面曲线 L' 在 w_0 点的切线与实轴夹角；
- $f(z)$ 函数将曲线 L 映照为 L'，$|f'(z_0)|$ 为 z_0 处无穷小线段映射到 w 平面时的放大倍数；
- $\arg f'(z_0)$ 是 L 在 z_0 的切线与 L' 在 w_0 点的切线之逆时针转动角度；
- 设 z 平面内有两条曲线 L_1, L_2 交于 P，被函数 $f(z)$ 映照到 w 平面为曲线 L_1', L_2' 交于 P'，若函数 $f(z)$ 在 P 点可导，则 L_1, L_2 在 P 点的夹角等于 L_1', L_2' 在 P' 点的夹角。
- 若函数 $f(z)$ 在复平面可导，则在 z 平面内任意两条曲线，映照到 w 平面，其夹角不变，故这种变换称为保角变换。
- 保角变换的例子：z 平面内平行于实轴和虚轴的直线，被 $w = z^2$ 映照为曲线簇，这些曲线相互垂直。

```
f[z_] := z^2;
g1 = ParametricPlot[{x, y}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
              PlotLegends → Automatic,
    FrameLabel → {Style[x, 25, Black], Style[y, 25, Black]},
              Axes → True, AxesStyle → {{Yellow, Thick}, {Yellow, Thick}},
              LabelStyle → Directive[Blue, FontFamily → "Times", Bold, 15]];
g2 = ParametricPlot[{Re[f[x + ⅈ y]], Im[f[x + ⅈ y]]}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
              PlotLegends → Automatic,
    FrameLabel → {Style[u, 25, Black], Style[v, 25, Black]},
              Axes → True, AxesStyle → {{Yellow, Thick}, {Yellow, Thick}},
              LabelStyle → Directive[Blue, FontFamily → "Times", Bold, 15]];
Grid[{{g1, g2}}]
```



```
f[z_] := z^2;
x0 = 1;
y0 = 1;
g1y = ParametricPlot[{x, y0}, {x, -2, 2}, PlotStyle → {Blue, Thick},
               Axes → True, AxesStyle → {{Black, Thick}, {Black, Thick}},
               LabelStyle → Directive[Blue, FontFamily → "Times", Bold, 15]];
g1x = ParametricPlot[{x0, y}, {y, -2, 2}, PlotStyle → {Red, Thick},
               Axes → True, AxesStyle → {{Black, Thick}, {Black, Thick}},
               LabelStyle → Directive[Blue, FontFamily → "Times", Bold, 15]];
g2y = ParametricPlot[{Re[f[x + ⅈ y0]], Im[f[x + ⅈ y0]]},
    {x, -2, 2}, PlotStyle → {Blue, Thick},
               Axes → True, AxesStyle → {{Black, Thick}, {Black, Thick}},
               LabelStyle → Directive[Blue, FontFamily → "Times", Bold, 15]];
g2x = ParametricPlot[
    {Re[f[x0 + ⅈ y]], Im[f[x0 + ⅈ y]]}, {y, -2, 2}, PlotStyle → {Red, Thick},
               Axes → True, AxesStyle → {{Black, Thick}, {Black, Thick}},
               LabelStyle → Directive[Blue, FontFamily → "Times", Bold, 15]];
g1 = Show[g1x, g1y];
g2 = Show[g2x, g2y];
Grid[{{Row[{Text[Style["z-plane", Italic, Large]]}],
    Row[{Spacer[50], Text[Style["w-plane", Italic, Large]]}]}, {g1, g2}}]
```



导数的计算

- $\frac{dw}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=-i\,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$, 函数变化率极限分别沿平行于实轴和平行于虚轴方向求；

- 求导法则类似于实变函数，如积、复合函数、反函数的求导

$$(f\pm g)'=f'\pm g',\quad (f\,g)'=f'\,g+f\,g',\quad (f/g)'=(f'\,g-f\,g')\big/g^2,$$

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d\xi}\frac{d\xi}{dz},\qquad \frac{dw}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}$$

1.4 解析函数

解析函数

- 函数 $f(z)$ 在 z_0 及其某个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析，要能找到一个邻域使之在此邻域内处处可导；
- 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析；
- 若函数 $f(z)$ 在包含闭区域 $\overline{D}$ 的某个开区域 E 内解析，则称 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 内解析；
- 若两函数均在 D 内解析，则其和、差、积、商（分母不为 0）也在 D 内解析；
- 解析要求比可导更高，不仅要求在某点可导，并且要求要能找到该点的一个邻域，在此邻域内点点可导；
  - 在某点可导，并不能保证在该点解析
  - 反例：$f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$ 在 $z=0$ 可导（u, v 的偏导数存在且连续并满足 C-R条件），但在 $z=0$ 点并不解析，因为在任何 $z\neq 0$ 的点，$\frac{\partial f}{\partial z^*}\neq 0$ 或者 $u_x=2x\neq v_y=x$, 且 $u_y=0\neq -v_x=-y$。
- 奇点：不解析的点称为函数的奇点（不可导一定不解析，不可导的点也是奇点）

解析之充要条件

定理：$f(z)$在 D 内解析的充要条件：1. $f(z)$在 D内连续；2. 在 D 内满足 C-R条件

定理：若单值函数 $f(z)$在 D内解析，则 $f'(z)$, $f''(z)$, …, 在 D 内也都解析

- 解析的定义似乎比可导更为严格，为何解析的充要条件却又貌似弱于可导的充要条件？
  - 比较： 均需满足 C-R 条件
  - 可导要求：u, v 可微 （可微一定连续）
  - 解析要求：u, v 连续 （连续未必可微）
  - 那么，是否可以找到解析而不可导的反例？当然不可以。
- 究其原因，在于解析是对一个区域而言，可导是对一个点而言。如果在某整个区域 u, v 连续且满足 C-R 条件，则在该区域函数 $f(z)$ 必然点点可导。如果在某个区域整个区域都满足 u, v 连续和 C-R 条件，则 u, v 在该区域必然可微，如果对个别点满足 u, v 连续和 C-R 条件，则不能导出在该点 u, v 一定可微。
- 换言之，不可能存在以下情况：u, v 的 4 个偏导数在某区域存在且满足 C-R 条件，但 u, v 在区域内的某些点不可微。
- 思考：现在只考虑一个二元实变函数 $u(x, y)$，是否可以导出：如果 $u(x, y)$ 在某个区域内连续，并且偏导数都存在，则 $u(x, y)$ 必然可微？
  - 未必。为什么？还在于能否找到其另一半 $v(x, y)$，满足三条：连续、偏导数存在、与 $u(x, y)$ 联立满足 C-R 条件。

    找到另一半就可联立 C−R 条件，进而证明 $u(x, y)$ 本身需满足调和性 （满足 Laplace 方程）

- 探究小课题：能否证明并举出反例？

解析函数的性质

- 共轭性：实部与虚部的关系，不仅仅是两个有序的二元实变函数，利用 C-R 条件，可从实部求虚部，反之亦然。 以从 u 求 v 为例。

  - 利用全微分，积分与路径无关：

    $$dv = v_x\,dx + v_y\,dy = -u_y\,dx + u_x\,dy$$

    $$\Longrightarrow \int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,y)} d\,v = \int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,y)} (-u_y\,dx + u_x\,dy) \quad \text{知 } u(x,\,y) \text{ 得 } v(x,\,y)$$

  - 先求出某一变量的函数，再求其作为另一变量的函数

    $$\frac{\partial v}{\partial y} = u_x \quad \Longrightarrow \quad v = \int u_x\,dy + \phi(x), \quad \text{再由 } v_x = \frac{\partial}{\partial x}\int u_x\,dy + \phi'(x) = -u_y \quad \text{求：} \phi(x)$$

  - 求 $f(z)$ 的显式

    $$f(x+i\,y) = g(x,\,y) = u(x,\,y) + i\,v(x,\,y), \quad \Longrightarrow f(x) = f(x+i\,0) = g(x,\,0) \quad \Longrightarrow f(z) = g(z,\,0)$$

  - 共轭性的几何意义：曲线簇 $u(x,\,y) = c_u$ 和 $v(x,\,y) = c_v$ 相互垂直，若 $u(x,\,y) = c_u$ 表示等势线，则 $v(x,\,y) = c_v$ 为电力线。

    $$\begin{cases} u(x,\,y) = c_u \text{ 给出的曲线在 } (x,\,y) \text{ 点的法线方向由 } \nabla u = u_x\,\vec{i} + u_y\,\vec{j} \text{ 确定} \\ v(x,\,y) = c_v \text{ 给出的曲线在 } (x,\,y) \text{ 点的法线方向由 } \nabla v = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} \text{ 确定} \end{cases}$$

    $$\Longrightarrow \quad \text{应用 } C-R \text{ 条件，} \nabla u \cdot \nabla v = u_x\,v_x + u_y\,v_y = 0$$

例题

已知：$v = 2\left(x^2 - y^2\right) + x$, 求 $f(z)$

解：

$$u_x = v_y = -4\,y,\; u_y = -v_x = -(4\,x+1) \quad \Longrightarrow$$

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy = -4\,y\,dx - (4\,x+1)\,dy$$

$$\Longrightarrow \; u = \int_{(0,0)}^{(x,y)} -4\,y\,dx - (4\,x+1)\,dy \; + \; c\,,$$

令积分沿实轴从原点到 $(x,\,0)$，再沿垂直线从 $(x,\,0)$ 到 $(x,\,y)$

$$\Longrightarrow \; u = -\int_{(x,0)}^{(x,y)} (4\,x+1)\,dy = -4\,x\,y - y \quad \Longrightarrow u(x,\,y) = -4\,x\,y \,-\, y + c$$

$$\Longrightarrow \; g(x,\,y) = u(x,\,y) + i\,v(x,\,y) = -(4\,x\,y \,-\, y) + c + i\left[2\left(x^2 - y^2\right) + x\right]$$

如何求 $f(z)$ 的显函数形式？

$$f(z) = f(x+i\,y) = g(x,\,y), \quad \text{而 } f(x) = f(x+i\,0) = g(x,\,0) \quad \Longrightarrow f(z) = g(z,\,0)$$

故：$f(z) \;=\; 2\,i\,z^2 + i\,z \;+\; c$

另解：

$$u_x = v_y = -4\,y\text{，两边同时对 } x \text{ 积分 （} y \text{ 视为常数）} \; u = \int (-4\,y)\,dx = -4\,x\,y + \psi(y)$$

$$-4\,x + \psi'(y) = u_y = -v_x = -4\,x - 1, \quad \Longrightarrow \psi'(y) = -1 \quad \Longrightarrow \psi(y) = -y + c \quad \Longrightarrow u = -4\,\mathrm{xy} - y + c \quad \text{（结果同前）}$$

例题

已知：$v = \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ 求 $f(z)$

解：选用极坐标

$$v = \sqrt{r - r\cos\theta} = \sqrt{2r}\,\sin\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r} = -\sqrt{\frac{r}{2}}\,\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} = \frac{1}{\sqrt{2r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$du = u_r\,dr + u_\theta\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\,dr - \sqrt{\frac{r}{2}}\,\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

积分分两步：$\begin{cases}\text{固定 } \theta = 0 \text{ 从 } (0,\,0) \text{ 到 } (r,\,0)\\ \text{固定 } r \text{ 从 } (r,\,0) \text{ 到 } (r,\,\theta)\end{cases} \Longrightarrow \quad u = \sqrt{2r}\,\cos\frac{\theta}{2} + u_0$

$$f\left(r\,e^{i\theta}\right) = g(r,\,\theta) = u + i\,v = \sqrt{2r}\,\cos\frac{\theta}{2} + u_0 + \sqrt{2r}\,\sin\frac{\theta}{2},$$

$$\Longrightarrow\ f(r) = g(r,\,0) = \sqrt{2r} + u_0 \ \Longrightarrow\ f(z) = \sqrt{2z} + u_0$$

■ 调和性：u 和 v 满足 Laplace 方程 $\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

证明：$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}u_x = \frac{\partial}{\partial x}v_y = v_{yx} = v_{xy}$,

$u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}u_y = -\frac{\partial}{\partial y}v_x = -v_{xy} \ \Longrightarrow\ u_{xx} + u_{yy} = 0$, 对 v 类似证明。

例题

已知：平面静电场等势线方程为 $x^2 + y^2 = c$（同心圆），求电力线方程

解：等势线方程与电力线方程正交，能否将等势线方程设为 $u = x^2 + y^2$，进而由 C-R 条件求 v 作为电力线方程 ？

不行！因为作为解析函数实部的函数必须是调和函数，满足 $\nabla^2 u$，显然 $x^2 + y^2$ 不是调和函数。

设：$u = f\left(x^2 + y^2\right)$, 显然，当自变量 $x^2 + y^2$ 为常数时，u 也为常数 。

满足 $u = c$ 为等势线方程 。

现要求：$\nabla^2 u = 0$，令：$t = x^2 + y^2 \ \Longrightarrow\ f'(t) + t\,f''(t) = 0$ (1.24)

$$\Longrightarrow\ f'(t) = c_1/t \ \Longrightarrow\ f(t) = c_1\ln t + c_2$$

$$\Longrightarrow\ u = c_1\ln\left(x^2 + y^2\right) + c_2$$

$$v_x = -u_y = -\frac{2\,y\,c_1}{x^2 + y^2}, \quad v_y = -u_x = -\frac{2\,x\,c_1}{x^2 + y^2},$$

$$\Longrightarrow\ v = 2\,c_1\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} + c_3$$

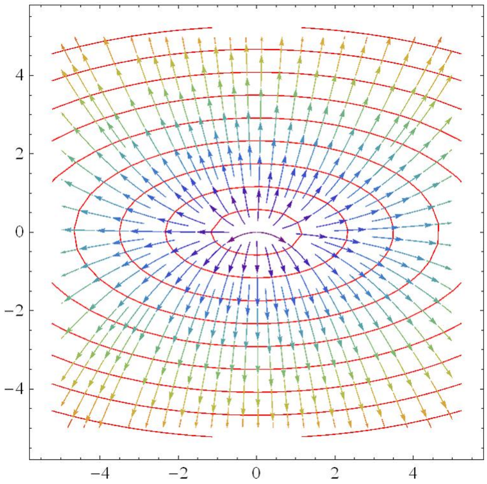
电力线为：$y/x = c'$，是一簇由原点发出点直线。

▲ 思考：如果等势线方程设为 $u = x^2 + 2\,y^2$，

设：$u = f\left(x^2 + 2\,y^2\right)$ 及 $t = x^2 + 2\,y^2$ 得不到关于 $f(t)$ 的一阶微分方程 (1.24)，如何求出电力线 ？

当然应用 *Mathematica*，作图将变得非常简单 ，如何求出电力线方程 ？

```
f = x^2 + 2 y^2; fx = D[f, x]; fy = D[f, y];
dx = 5; dy = 5;
StreamPlot[{fx, fy}, {x, -dx, dx}, {y, -dy, dy},
 Mesh → 9, MeshStyle → Red, StreamColorFunction → "Rainbow",
 AspectRatio → dy / dx, PerformanceGoal → "Quality", ImageSize → {250, 250}]
```



- L'Hospital's 法则，洛必达法则

f, g 在包含 z_0 点的某区域解析，且： $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$，则

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \tag{1.25}$$

- 保角性：如 $w = f(z)$ 在 D 内解析， D 内 z_0 点有 $f'(z_0) \neq 0$， z 平面内的曲线 L_1, L_2 经过 z_0，在 z_0点的夹角为 $\theta_2 - \theta_1$，曲线 L_1, L_2被 $w = f(z)$ 映照到 w 平面成曲线 L_1', L_2', 在 w 平面内，曲线 L_1', L_2' 在 w_0 点的夹角 $\theta_2' - \theta_1' = \theta_2 - \theta_1$。故称保角变换。

证明：由导数的几何意义： $\theta_1' - \theta_1 = \arg f'(z_0) = \theta_2' - \theta_2 \implies \theta_2' - \theta_1' = \theta_2 - \theta_1$。

关于保角变换的一些简单应用，将在讨论课中介绍。

初等解析函数

初等复变函数是初等实变函数的推广。以下是在定义了复数的代数运算之后，进一步定义初等函数。

特别注意定义的函数在自变量（虚部为零）退化为实数时，应回到实变初等函数，而当某些多值函数，当自变量退化为整数时，应自动退化为单值函数。

- 幂函数、多项式、有理函数

$$w = z^n\,; \qquad w = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k; \qquad w = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k \Big/ \sum_{k=0}^{n} b_k z^k, \quad (m, n \text{ 为整数})$$

- 指数函数：

$$w = e^z = e^{x+iy} \equiv e^x(\cos y + i \sin y), \quad \text{满足：} \; e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

- e^z 是周期函数，周期为 $2\pi i$
- e^z 可能小于 0，不同于实变函数 $e^x > 0$

- e^z 在无穷远点没定义，因为其极限与 z 趋于无穷远点的方式有关，极限不存在。

■ 三角函数：

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},\quad \sec z = \frac{1}{\cos z},\quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

- 复数的正弦和余弦函数可能大于 1
- 仍然有： $\sin^2 z + \cos^2 z = 1,\quad \sin(-z) = -\sin z,\quad \cos(-z) = \cos z$
- 仍然有：$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$， $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

■ 双曲函数：

$$\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad \sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2i},\quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

- 双曲正余弦的周期为 $2\pi i$
- 仍然有： $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
- 与三角函数的关系：$\sinh z = -i \sin i z,\quad \cosh z = \cos i z$

■ 根式函数：多值函数

$$w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i \arg z/n},\quad \arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi,\ \text{其中 } \operatorname{Arg} z \text{ 为辐角主值，}\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

■ 对数函数：多值函数，指数函数的反函数

$$e^w = z \implies w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi),\quad \arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$$

- 仍然有： $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$
- 有的书将主值写成 $\ln z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$，注意对数函数中以小写 ln 表示主值，为了一致，有的书以 $\arg z$ 表示辐角主值。
- 在实数域，负数的对数无意义，但在复数域，负数的对数有意义，如：$\ln(-4) = \ln 4 + i\pi$ （主值）

■ 幂函数：多值函数，（α 是复数）

$$w = z^\alpha \equiv e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$$

- 乘方是单值函数，故当 α 退化为整数时，幂函数自然应该退化为单值函数，该定义满足此性质。

⊖ 例题

- 求 $\cos z$ 的实部与虚部，利用和角公式和 $\sin i z = i \sinh z$ 等

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos i y - \sin x \sin i y = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

- 伯努利诡论：

$$\text{for } z \neq 0,\ (-z)^2 = z^2 \implies \operatorname{Ln}(-z)^2 = \operatorname{Ln} z^2$$

$$\implies \operatorname{Ln}(-z) + \operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z$$

$$\implies 2\operatorname{Ln}(-z) = 2\operatorname{Ln} z$$

$$\implies e^{\operatorname{Ln}(-z)} = e^{\operatorname{Ln} z} \implies -z = z \quad \text{（错在哪儿？）}$$

- 求 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$，回顾对实量： $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

分别求模和辐角

$$p_n = \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{n/2}$$

$$\implies \ln p_n = \frac{n}{2}\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]$$

令：$\zeta = 1/n, \quad \Longrightarrow$

$$\lim_{\zeta\to 0} \ln p_n = \lim_{\zeta\to 0} \frac{\ln\left[(1+x\,\zeta)^2 + (y\,\zeta)^2\right]}{2\,\zeta} = \frac{0}{0} = x \qquad \text{（洛必达法则）}$$

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \lim_{n\to\infty} \arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n \arg\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

$$= \lim_{\zeta\to 0} \frac{1}{\zeta} \mathrm{tg}^{-1} \frac{y\,\zeta}{1+\zeta\,x} = \frac{0}{0} = y \qquad \text{（洛必达法则）}$$

- 幂函数：$(-1)^{-i} = e^{-i\,\mathrm{Ln}(-1)} = e^{-i\,[i\,(\pi+2\,k\,\pi)]} = e^{(2\,k+1)\,\pi}$, $\quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$。多值函数
- $1^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,1} = e^{(x+i\,y)\ i\,(2\,k\,\pi)} = e^{-2\,k\,\pi\,y}\,[\cos(2\,k\,\pi\,x) + i\sin(2\,k\,\pi\,x)]$, $\quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$。多值函数
- 求 $w = z^z$ 的实部与虚部

  $w = e^{z\,\mathrm{Ln}\,z} = e^{(x+i\,y)\,(\ln r + i\,\theta)}$, 其中：$\theta = \arg z = \mathrm{Arg}\, z + 2\,k\,\pi$,

  $= e^{x\ln r - \theta y}[\cos(y\ln r + x\,\theta) + i\sin(y\ln r + x\,\theta)]$