复旦大学力学与工程科学系

2015 ～ 2016 学年第二学期期末考试试卷

□A 卷　　　□B 卷

课程名称：连续介质力学基础　　　课程代码：MECH130105

开课院系：力学与工程科学系　　　考试形式：开卷/闭卷/课程论文

姓名：_____________ 学号：_____________ 专业：_____________

题 号	1-1/1	1-1/2	1-1/3	1-2/1	1-2/2	1-2/3	1-3/1	1-3/2	1-3/3	1-4/1
得 分										
题 号	1-4/2	1-4/3	2/1	2/2	2/3	3/1	3/2	4/1	4/2	5/1
得 分										
得 分	5/2	5/3	6/1	6/2	6/3					总分
得 分										

问题 1 (连续介质有限变形理论的通识性结构——构型构造). 连续介质按其几何形态可以分为体积形态、曲面形态、曲线形态三种形式，其构型构造分析如图1，2，3所示。

第 1 部分—体积形态连续介质

1. 推导：体积形态连续介质做有限变形运动的变形梯度定义式；
2. 推导：体积态连续介质做有限变形运动的速度定义式；
3. 推导：体积形态连续介质上物理量的物质导数表达式，按 $Euler$ 观点。

第 2 部分—曲面形态连续介质

1. 推导：曲面形态连续介质做有限变形运动的变形梯度定义式；
2. 推导：曲面形态连续介质做有限变形运动的速度定义式，按 $Euler$ 观点；
3. 推导：曲面形态连续介质上物理量的物质导数表达式，按 $Euler$ 观点。

第 3 部分—曲线形态连续介质

1. 推导：曲线形态连续介质做有限变形运动的变形梯度定义式；
2. 推导：曲线形态连续介质做有限变形运动的速度定义式，按 $Euler$ 观点；
3. 推导：曲线形态连续介质上物理量的物质导数表达式，按 $Euler$ 观点。

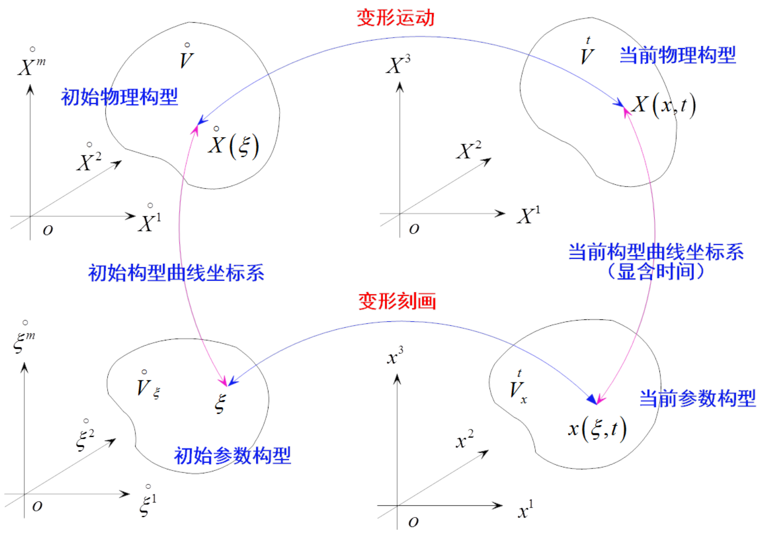

图 1: 体积形态

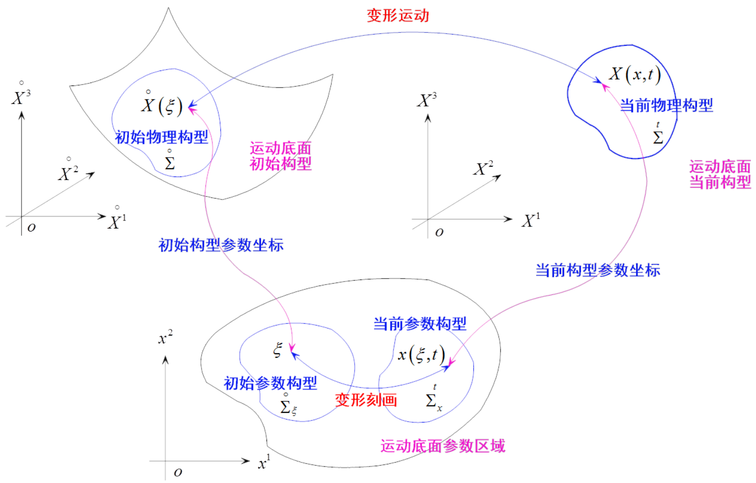

图 2: 曲面形态

第 4 部分—通识性/相似性结构

1. 阐述：变形梯度的通识性；

2. 阐述：速度表达式的通识性；

3. 推导：物质导数表达式的通识性。

问题 2 (连续介质有限变形理论的通识性结构——应力张量). 对于体积形态、曲面形态、曲线形态连续介质都可以考虑定义应力张量，如图4，5，6所示。

1. 推导：体积形态连续介质应力的表示 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n}$。

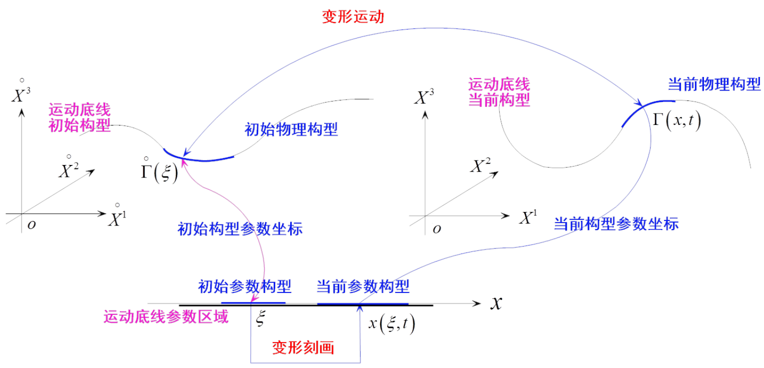

图 3: 曲线形态

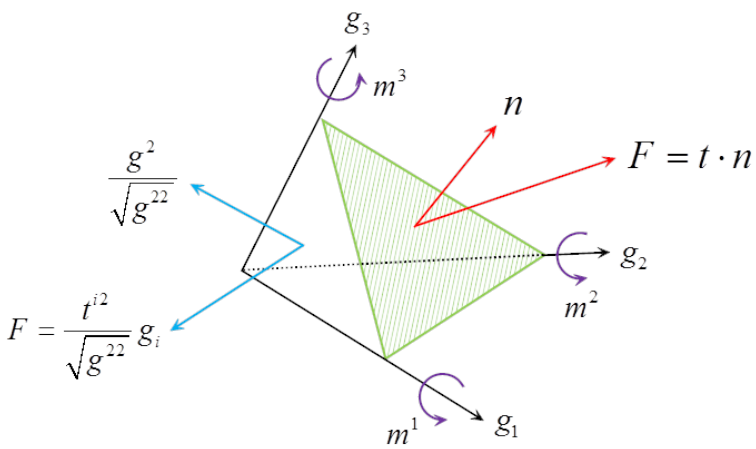

图 4: 体积形态应力

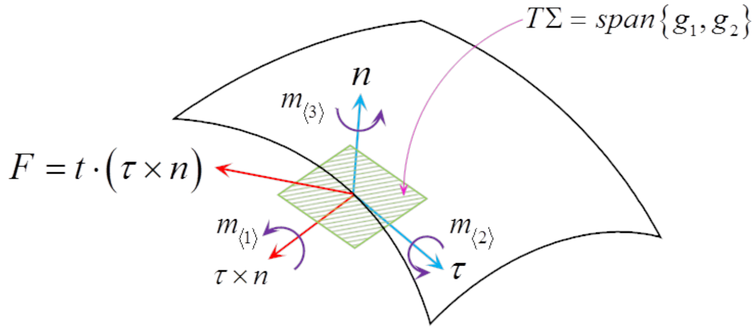

图 5: 曲面形态应力

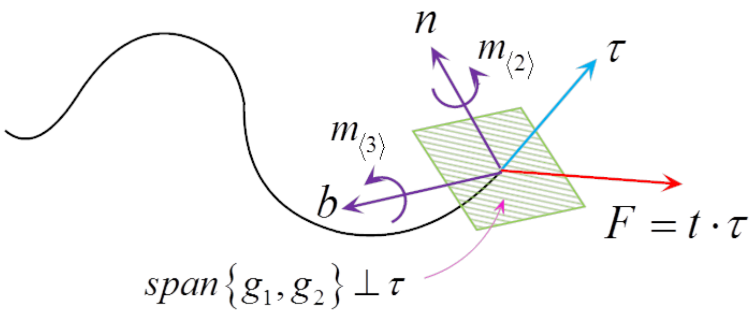

图 6: 曲线形态应力

2. 基于曲面上第二类内蕴形式的广义 Stokes 公式

$$\oint_C (\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\circ - \boldsymbol{\Phi}\, dl = \int_\Sigma \left(\overset{\Sigma}{\boldsymbol{\nabla}}\circ - \boldsymbol{\Phi} + H\boldsymbol{n}\circ - \boldsymbol{\Phi}\right) d\sigma,$$

推导：曲面上应力平衡方程。

3. 基于微积分中的 $Newton - Leiberniz$ 公式，推导：推导曲线上应力平衡方程。

问题 3 (**基于曲面的半正交系——几何性质**). 一般 $\mathbb{R}^{m+1}$ 空间中的 m-维曲面，具有如下向量值映照刻画：

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^m \supset \mathscr{D}_x \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{m+1},$$

此处 $\boldsymbol{x} = \left(x^1, x^2, \cdots, x^m\right)^{\mathrm{T}}$ 代表曲面参数/坐标。基于曲面的半正交系，可定义为

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},\zeta) : \mathscr{D}_x \times (-\delta,\delta) \ni \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \zeta\end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},\zeta) = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}) + \zeta\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{m+1},$$

此处 $\boldsymbol{n}$ 表示曲面上的单位法向量, ζ 代表沿法向的坐标，此作为第 $m+1$ 个坐标。

一般应用中考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的二维曲面，且采用曲面上平行于主方向的正交曲线坐标 $\boldsymbol{y} = \{\xi, \eta\}$，由此 $\{\xi,\eta,\zeta\}$ 表示全空间 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标, ζ 为沿法向方向 $\boldsymbol{n}$ 的坐标.

1. 证明：完整曲线坐标系 $\{\xi,\eta,\zeta\}$ 诱导的局部协变基 $\{\overline{\boldsymbol{g}}_\xi, \overline{\boldsymbol{g}}_\eta, \boldsymbol{n}\}$ 具有如下表达形式

$$\begin{cases}\overline{\boldsymbol{g}}_\xi(\xi,\eta,\zeta) = (1-\zeta\lambda_\xi)\boldsymbol{g}_\xi(\xi,\eta)\\ \overline{\boldsymbol{g}}_\eta(\xi,\eta,\zeta) = (1-\zeta\lambda_\eta)\boldsymbol{g}_\eta(\xi,\eta)\end{cases}.$$

2. 由于 $\{\overline{\boldsymbol{g}}_\xi, \overline{\boldsymbol{g}}_\eta, \boldsymbol{n}\}$ 为完整的正交基,故可以通过其单位化获得非完整的单位正交基 $\{\boldsymbol{e}\langle\xi\rangle, \boldsymbol{e}\langle\eta\rangle, \boldsymbol{e}\langle\zeta\rangle\}$。证明：此非完整的单位正交基的形式 $Christoffel$ 符号，具有如下形式

$$\begin{cases}\overline{\Gamma}\langle\xi\eta\xi\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{\overline{g}_{\eta\eta}}}\dfrac{\partial\ln\sqrt{\overline{g}_{\xi\xi}}}{\partial\eta} = -\overline{\kappa}_{g,\xi}\\ \overline{\Gamma}\langle\eta\xi\eta\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{\overline{g}_{\xi\xi}}}\dfrac{\partial\ln\sqrt{\overline{g}_{\eta\eta}}}{\partial\xi} = -\overline{\kappa}_{g,\eta}\end{cases}, \quad \begin{cases}\overline{\Gamma}\langle\xi\zeta\xi\rangle = -\dfrac{\lambda_\xi}{1-\zeta\lambda_\xi} = -\overline{\lambda}_\xi\\ \overline{\Gamma}\langle\eta\zeta\eta\rangle = -\dfrac{\lambda_\eta}{1-\zeta\lambda_\eta} = -\overline{\lambda}_\eta\end{cases},$$

此处 $\overline{\lambda}_\xi$ 与 $\overline{\lambda}_\eta$ 分别为对应于偏离曲面 $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta$ 的主方向 $\overline{\boldsymbol{g}}_\xi$ 与 $\overline{\boldsymbol{g}}_\eta$ 的主曲率；$\overline{\kappa}_{g,\xi}$ 与 $\overline{\kappa}_{g,\eta}$ 为对应于偏离曲面 $\boldsymbol{\Sigma}_\zeta$ 上曲线坐标 ξ 与 η 的截线曲率。

问题 4 (**基于曲面的半正交系——场论分析**)**.** 向量 $\boldsymbol{A}$ 在基于曲面的半正交系下可分解为

$$\boldsymbol{A} = A^{\xi}\overline{\boldsymbol{g}}_{\xi} + A^{\eta}\overline{\boldsymbol{g}}_{\eta} + A^{\zeta}\boldsymbol{n} = A\langle\xi\rangle\boldsymbol{e}\langle\xi\rangle + A\langle\eta\rangle\boldsymbol{e}\langle\eta\rangle + A\langle\zeta\rangle\boldsymbol{e}\langle\zeta\rangle,$$

1. 推导：$\nabla \otimes \boldsymbol{A} = \nabla\langle\alpha\rangle A\langle\beta\rangle\, \boldsymbol{e}\langle\alpha\rangle \otimes \boldsymbol{e}\langle\beta\rangle$ 的分量形式。

2. 推导：$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 的表达形式。

问题 5 (**壁面上应变率张量**)**.** 壁面上的应变率张量有如下分解

$$\boldsymbol{D} - \overset{\Sigma}{\boldsymbol{D}} = \left(\theta - \overset{\Sigma}{\nabla} \cdot \boldsymbol{V}\right)\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} + \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + \boldsymbol{W})\times\boldsymbol{n}\right]\otimes\boldsymbol{n} + \frac{1}{2}\boldsymbol{n}\otimes\left[(\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + \boldsymbol{W})\times\boldsymbol{n}\right],$$

其中 $\boldsymbol{D} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{V}\otimes\nabla + \nabla\otimes\boldsymbol{V})$ 为流体应变率张量, $\overset{\Sigma}{\boldsymbol{D}} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{V}\otimes\overset{\Sigma}{\nabla} + \overset{\Sigma}{\nabla}\otimes\boldsymbol{V})$ 为壁面应变率张量, $\boldsymbol{W} := -\left(\overset{\Sigma}{\nabla}V\langle\zeta\rangle + \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{K}\right)\times\boldsymbol{n}$ 是切平面内仅由壁面变形决定的向量。$\boldsymbol{D} - \overset{\Sigma}{\boldsymbol{D}}$ 可称为相对应变率张量。

1. 推导：涡量在切平面内的分量 $\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$ 具有分解形式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{\parallel} &= \omega\langle\xi\rangle\boldsymbol{e}\langle\xi\rangle + \omega\langle\eta\rangle\boldsymbol{e}\langle\eta\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}\frac{\partial V\langle\zeta\rangle}{\partial\eta} + \lambda_{\eta}V\langle\eta\rangle - \frac{\partial V\langle\eta\rangle}{\partial\zeta}\right)\boldsymbol{e}\langle\xi\rangle + \left(-\frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi}}}\frac{\partial V\langle\zeta\rangle}{\partial\xi} - \lambda_{\xi}V\langle\xi\rangle + \frac{\partial V\langle\xi\rangle}{\partial\zeta}\right)\boldsymbol{e}\langle\eta\rangle\end{aligned}$$

2. 推导：向量 $\boldsymbol{W}$ 具有分解形式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W} &= -\left(\overset{\Sigma}{\nabla}V\langle\zeta\rangle + \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{K}\right)\times\boldsymbol{n} \\ &= -\left(\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}\frac{\partial V\langle\zeta\rangle}{\partial\eta} + \lambda_{\eta}V\langle\eta\rangle\right)\boldsymbol{e}\langle\xi\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi}}}\frac{\partial V\langle\zeta\rangle}{\partial\xi} + \lambda_{\xi}V\langle\xi\rangle\right)\boldsymbol{e}\langle\eta\rangle,\end{aligned}$$

3. 推导：相对应变率张量 $\boldsymbol{D} - \overset{\Sigma}{\boldsymbol{D}}$ 的表示矩阵，在基 $\{\boldsymbol{e}\langle\xi\rangle, \boldsymbol{e}\langle\eta\rangle, \boldsymbol{n}\}$ 下可表达为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V\langle\xi\rangle}{\partial\zeta} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V\langle\eta\rangle}{\partial\zeta} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V\langle\xi\rangle}{\partial\zeta} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V\langle\eta\rangle}{\partial\zeta} & \dfrac{\partial V\langle\zeta\rangle}{\partial\zeta} \end{pmatrix},$$

问题 6 (**光滑曲面上边界层方程**)**.** 由流体的连续性方程与动量方程

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{V} = 0 \\ \rho\dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = \rho\left[\dfrac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot(\nabla\otimes\boldsymbol{V})\right] = -\nabla p + \mu\triangle\boldsymbol{V}\end{cases}$$

推导光滑曲面上的边界层方程。量级估计上采用

$$\frac{V}{U} \sim \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}},$$

其中 V 表示曲面法向特征速度，U 表示切平面内特征速度，δ 表示曲面法向特征长度，L 表示曲面上特征长度，特征时间取 $\dfrac{L}{U}$。并基于对主曲率的估计 $\lambda_i = O\left(\dfrac{1}{L}\right), i=1,2$，Christoffel 的量级估计为

$$\overline{\Gamma}\langle iji\rangle = O\left(\frac{1}{L}\right), \quad \overline{\Gamma}\langle i\zeta i\rangle = O\left(\frac{1}{L}\right), \quad i,j=1,2,$$

1. 推导：向量 $\boldsymbol{e}\langle\xi\rangle$ 方向分量方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V\langle\xi\rangle}{\partial t} + \frac{V\langle\xi\rangle}{\sqrt{g_{\xi\xi}}}\frac{\partial V\langle\xi\rangle}{\partial\xi} - \frac{\overline{\kappa}_{g,\xi}}{\sqrt{g_{\xi\xi}}}V\langle\xi\rangle V\langle\eta\rangle + \frac{V\langle\eta\rangle}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}\frac{\partial V\langle\xi\rangle}{\partial\eta}\\ &+ \frac{\overline{\kappa}_{g,\eta}}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}V^2\langle\eta\rangle + V\langle\zeta\rangle\frac{\partial V\langle\xi\rangle}{\partial\zeta} = -\frac{1}{\rho\sqrt{g_{\xi\xi}}}\frac{\partial p}{\partial\xi} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 V\langle\xi\rangle}{\partial\zeta^2}\end{aligned}$$

2. 推导：向量 $\boldsymbol{e}\langle\eta\rangle$ 方向分量方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V\langle\eta\rangle}{\partial t} + \frac{V\langle\eta\rangle}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}\frac{\partial V\langle\eta\rangle}{\partial\eta} - \frac{\overline{\kappa}_{g,\eta}}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}V\langle\eta\rangle V\langle\xi\rangle + \frac{V\langle\xi\rangle}{\sqrt{g_{\xi\xi}}}\frac{\partial V\langle\eta\rangle}{\partial\xi}\\ &+ \frac{\overline{\kappa}_{g,\xi}}{\sqrt{g_{\xi\xi}}}V^2\langle\xi\rangle + V\langle\zeta\rangle\frac{\partial V\langle\eta\rangle}{\partial\zeta} = -\frac{1}{\rho\sqrt{g_{\eta\eta}}}\frac{\partial p}{\partial\eta} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 V\langle\eta\rangle}{\partial\zeta^2}\end{aligned}$$

3. 推导：向量 $\boldsymbol{e}\langle\zeta\rangle$ 方向分量方程

$$\frac{\partial p}{\partial\zeta} = 0$$

注：给出推导及计算过程的细节；批阅上注重思想及方法的反映。