

试 卷 分 析 表

课程代码 **MECH130105**

课程名称	连续介质力学基础		教师姓名	谢锡麟	职称	副教授
上课地点	H3205		周学时数	3 学时		
修读学生系科、专业、年级、人数	理论与应用力学、飞行器设计与工程、物理学				实考人数	11
评定学生成绩内容所占百分比	平时成绩		期中		期末	
	40				60	
成绩分布统计		A 等 (含 A-)	B 等 (含 B+、B-)	C 等 (含 C+、C-)	D	F
	人数					
	百分比 %					

试卷整体情况所反映出的教与学的问题（含命题难度、命题质量）

本试卷各题得分明细，以此进行分析：

题目编号	单题得分 (满分 10)	考察内容	备注
1(1)	5.7	推导曲面上协变与逆变基向量关于坐标的偏导数	
1(2)	6.0	推导体积上协变与逆变基向量关于坐标的偏导数	
1(3)	5.6	叙述曲面上曲率张量协变分量的几何意义	
2(1)	5.5	推导曲面上张量场关于坐标的一阶偏导数（进行极限分析）	
2(2)	3.8	推导曲面上张量场关于坐标的二阶偏导数（基于一阶偏导数的结果），以此证明 Ricci 等式	对较为复杂的分析过程掌握不够
2(3)	4.4	基于曲面上内蕴形式的第二类广义 Stokes 公式，推导曲面应力平衡方程	
3(1)	10	研究轴对称凸起曲面：有已知的曲面的向量值映照计算局部协变基，并说明正交性	
3(2)	8.7	研究轴对称凸起曲面：计算度量张量的协变分量	
3(3)	5.2	研究轴对称凸起曲面：计算曲率张量的协变分量	
3(4)	3.8	研究轴对称凸起曲面：计算平均曲率与 Gauss 曲率	
3(5)	5.4	研究基于轴对称凸起曲面的半正交系：计算说明体积上的局部基为正交基	
3(6)	4.2	研究基于轴对称凸起曲面的半正交系：计算体积上的度量张量的协变分量	
3(7)	2.3	研究基于轴对称凸起曲面的半正交系：引入单位正交的非完整基，计算所有非零形式的 Christoffel 符号	理论联系实际的能力不够
3(8)	1.1	研究基于轴对称凸起曲面的半正交系：基于非完整基理论，推导流体力学中速度涡量的表达式	理论联系实际的能力不够
3(9)	1.2	研究基于轴对称凸起曲面的半正交系：基于非完整基理论，推导流体力学中速度散度的表达式	理论联系实际的能力不够
4(1)	4.7	曲面与体积形态连续介质有限变形理论的通识性结构：证明体积介质的有向物质面元的物质导数的表达式	
4(2)	7.7	曲面与体积形态连续介质有限变形理论的通识性结构：基于上述表达式，证明物质面的第二类输运方程	
4(3)	3.9	曲面与体积形态连续介质有限变形理论的通识性结构：证明曲面介质的有向面元的物质导数的表达式	对较为复杂的分析过程掌握不够
4(4)	2.1	曲面与体积形态连续介质有限变形理论的通识性结构：证明体积介质与曲面介质的物质面第二类输运方程的相容性	对较为复杂的分析过程掌握不够
5(1)	6.3	证明体积介质的物质体输运方程	
5(2)	6.4	证明体积介质动量守恒的 Euler 型微分方程	
5(3)	5.0	证明体积介质动量守恒的 Lagrange 型微分方程	

5(4)	5.0	证明体积介质质量守恒的 Euler 型微分方程	
5(5)	3.8	证明体积介质质量守恒的 Lagrange 型微分方程	
总分	118.7 49.1 (折合)		

本一轮教学首次基于体积、曲面形态连续介质有限变形理论的“通识性结构”开展教学。知识体系研究方面，获得体积、曲面、曲线形态连续介质有限变形理论的“通识性结构”不仅是科学研究方面的进步，而且对于教与学意义重大，可以实践“触类旁通”、“温故而知新”的效用。

此轮考试首次反映了上述基于“通识性结构”建立知识体系的过程。

附：尚未发表

体积、曲面、曲线形态连续介质有限变形理论的相似结构

谢锡麟

复旦大学力学系 邯郸路 220 号 上海

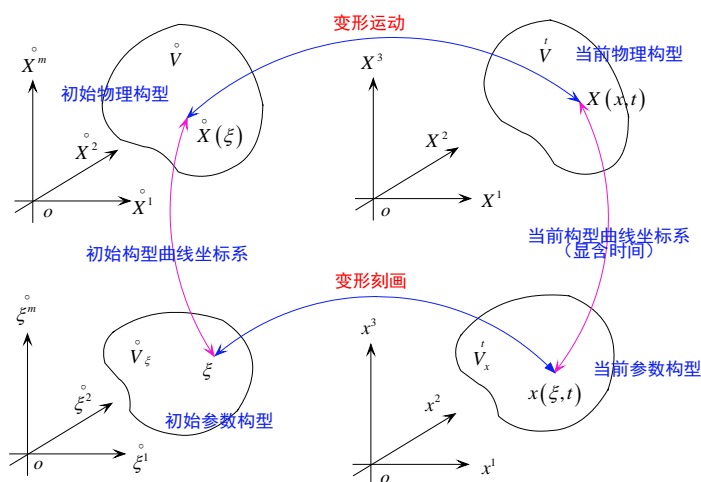
摘要：经典的连续介质有限变形理论主要针对体积形态连续介质，主要内容有构型构造，变形梯度，变形刻画，输运方程，守恒律方程。曲面、曲线形态连续介质指将连续介质作为曲面或曲线，对应地引入面密度或线密度以刻画介质实际的厚度或截面积，但不考虑物理量在厚度或截面上的变化。曲面形态连续介质的一般运动考虑为可变形曲面上二维连续介质的相对运动，包括固定曲面上二维流动、膜运动二种特殊形式；曲线形态连续介质的一般运动考虑为可变形曲线上的—维连续介质的相对运动，包括沿固定曲线的一维流动、绳索运动。本文提出曲面、曲线形态连续介质有限变形的理论，包括构型构造，变形梯度，变形刻画，输运方程，守恒律方程。守恒律方程包括质量守恒、动量守恒、能量守恒，均有 Euler 型微分方程与 Lagrange 型微分方程，均可引入 Piola-Kirchhoff 第一、二类应力；动量矩守恒都联系于 Cauchy 应力的限制性条件；基于能量守恒的 Lagrange 型微分方程，仍可引入弹性设定（应变能密度函数为应变的函数），仍可有应变能密度函数相对于应变的导数为应力。另一方面，本文注重体积、曲面、曲线形态连续介质有限变形理论的相似性结构，也正是依赖于数学结构的相似性（数学通识）才能将体积形态连续介质的有限变形理论平行地推广至曲面、曲线形态连续介质。值得指出，体积、曲面、曲线形态连续介质有限变形相关结论也具有形式上的相似性，分别有全空间梯度算子、曲面梯度算子、曲线梯度算子表征。

关键词：曲面形态连续介质；曲线形态连续介质；有限变形理论；数学通识。

附：体积、曲面、曲线形态连续介质有限变形的结果

体积形态连续介质

构型构造



速度 $V = \frac{\partial X}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial x^s}{\partial t}(\xi,t)g_s$

物质导数 $\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t) + \left(V - \frac{\partial X}{\partial t}(x,t) \right) \cdot (\nabla \otimes \Phi)$

变形梯度及其基本性质

$$F = \frac{\partial X^i}{\partial \xi^A}(\xi,t)g_i \otimes G^A, \quad i, A = 1, \dots, m; \quad \begin{cases} \dot{F} = L \cdot F, \quad L = V \otimes \nabla \\ \dot{|F|} = \theta |F|, \quad \theta = V \cdot \nabla \end{cases}$$

输运方程 (物质面、物质线、物质体)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\dot{\Sigma}} \Phi d\sigma = \int_{\dot{\Sigma}} [\dot{\Phi} + (\theta - n \cdot D \cdot n) \Phi] d\sigma, & D = \frac{1}{2} (V \otimes \nabla + \nabla \otimes V) = \frac{1}{2} (L + L^*) \\ \frac{d}{dt} \int_{\dot{\Sigma}} \Phi \circ - n d\sigma = \int_{\dot{\Sigma}} [\dot{\Phi} \circ - n + \Phi \circ - (B \cdot n)] d\sigma, & B = \theta I - \nabla \otimes V = \theta I - L^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\dot{\Gamma}} \Phi ds = \int_{\dot{\Gamma}} [\dot{\Phi} + (\tau \cdot D \cdot \tau) \Phi] ds \\ \frac{d}{dt} \int_{\dot{\Gamma}} \Phi \circ - \tau ds = \int_{\dot{\Gamma}} [\dot{\Phi} \circ - \tau + \Phi \circ - (L \cdot \tau)] ds \end{cases} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \int_{\dot{V}} \Phi dX = \int_{\dot{V}} [\dot{\Phi} + \theta \Phi] dX$$

守恒律方程

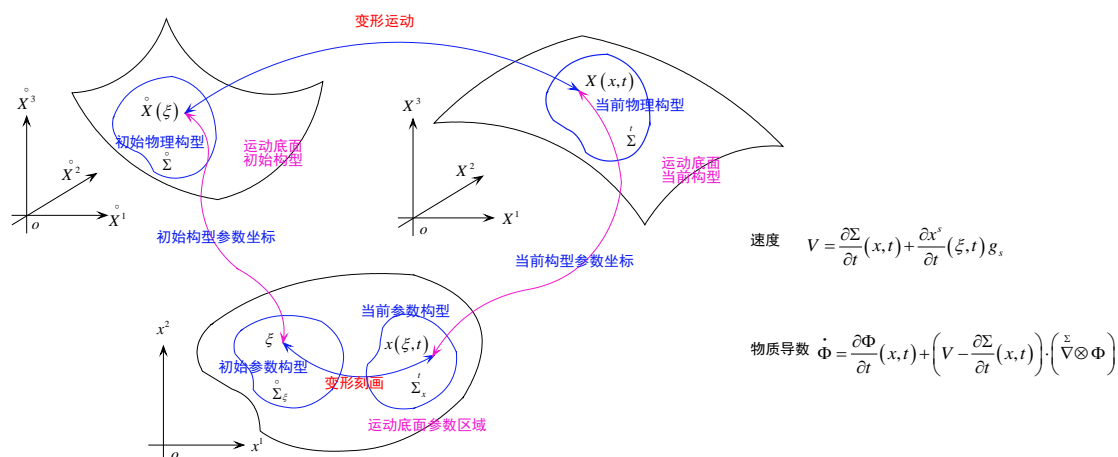
质量守恒 $\begin{cases} \dot{\rho} + \theta \rho = 0 \\ \rho |F| = \rho(\xi) \end{cases}$; 动量守恒 $\begin{cases} \rho a = t \cdot \nabla + \rho f_m \\ \rho a = \begin{cases} \tau \cdot \dot{\nabla} \\ (FT) \cdot \dot{\nabla} \end{cases} + \rho f_m \end{cases}$, 应力形式 $\begin{cases} t = t_{,j}^i g_i \otimes g^j \\ \tau = |F| t \cdot F^{-*} \\ T = |F| F^{-1} \cdot t \cdot F^{-*} \end{cases}$

能量守恒 $\begin{cases} \rho \dot{e} = (V \otimes \nabla) : t \\ \rho \dot{e} = \dot{\Sigma} = \begin{cases} (V \otimes \dot{\nabla}) : \tau \\ D : T = \dot{E} : T \end{cases} \end{cases}$, Elmsansi 应变 $\dot{E} = \frac{1}{2} (F^* F - I)$

动量矩守恒 $g^\alpha \cdot t \times g_\alpha + \rho m = 0 \Rightarrow m = 0 \Leftrightarrow t = t^* \in \text{Sym}$

曲面形态连续介质

构型构造



变形梯度及其基本性质

$$F = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^A}(\xi,t) g_i \otimes G^A, \quad i, A = 1, 2; \quad \begin{cases} \dot{F} = \overset{\Sigma}{L} \cdot F, & \overset{\Sigma}{L} = V \otimes \overset{\Sigma}{\nabla} \\ |\dot{F}| = \overset{\Sigma}{\theta} |F|, & \overset{\Sigma}{\theta} = V \cdot \overset{\Sigma}{\nabla} \end{cases}, \quad |F| = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} \det \left[\frac{\partial x^i}{\partial \xi^A}(\xi,t) \right]$$

输运方程（物质面、物质线）

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\overset{\Sigma}{\Gamma}} \Phi d\sigma = \int_{\overset{\Sigma}{\Gamma}} \left[\dot{\Phi} + \overset{\Sigma}{\theta} \Phi \right] d\sigma, \\ \frac{d}{dt} \int_{\overset{\Sigma}{\Gamma}} \Phi \circ - n d\sigma = \int_{\overset{\Sigma}{\Gamma}} \left[\dot{\Phi} \circ - \tau + \Phi \circ - \left(\overset{\Sigma}{B} \cdot n \right) \right] d\sigma, \quad \overset{\Sigma}{B} = \overset{\Sigma}{\theta} I - \overset{\Sigma}{\nabla} \cdot V = \overset{\Sigma}{\theta} I - \overset{\Sigma}{L}^* \end{cases}, \quad \text{相容性结构} \begin{cases} \theta - n \cdot D \cdot n = \overset{\Sigma}{\theta} \\ B \cdot n = \overset{\Sigma}{B} \cdot n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\overset{\Sigma}{\Gamma}} \Phi ds = \int_{\overset{\Sigma}{\Gamma}} \left[\dot{\Phi} + \left(\tau \cdot \overset{\Sigma}{D} \cdot \tau \right) \Phi \right] ds, \quad \overset{\Sigma}{D} = \frac{1}{2} \left(V \otimes \overset{\Sigma}{\nabla} + \overset{\Sigma}{\nabla} \otimes V \right) = \frac{1}{2} \left(L + L^* \right) \\ \frac{d}{dt} \int_{\overset{\Sigma}{\Gamma}} \Phi \circ - \tau ds = \int_{\overset{\Sigma}{\Gamma}} \left[\dot{\Phi} \circ - \tau + \Phi \circ - \left(\overset{\Sigma}{L} \cdot \tau \right) \right] ds \end{cases}, \quad \text{相容性结构} \begin{cases} \tau \cdot D \cdot \tau = \tau \cdot \overset{\Sigma}{D} \cdot \tau \\ L \cdot \tau = \overset{\Sigma}{L} \cdot \tau \end{cases}$$

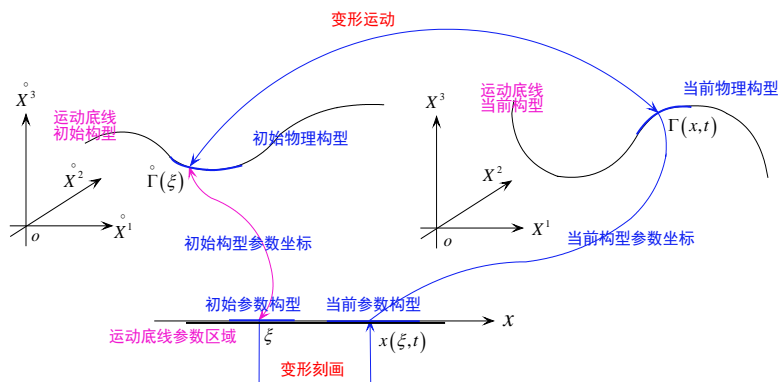
守恒律方程

$$\text{质量守恒} \begin{cases} \dot{\rho} + \overset{\Sigma}{\theta} \rho = 0 \\ \rho |F| = \overset{\circ}{\rho}(\xi) \end{cases}; \quad \text{动量守恒} \begin{cases} \rho a = t \cdot \overset{\Sigma}{\nabla} + \rho f_m \\ \overset{\circ}{\rho} a = \begin{cases} \tau \cdot \overset{\Sigma}{\nabla} \\ (FT) \cdot \overset{\Sigma}{\nabla} \end{cases} + \overset{\circ}{\rho} f_m \end{cases}, \quad \text{应力形式} \begin{cases} t = t_{ij} g^i \otimes g^j + t_{3j} n \otimes g^j \\ \tau = |F| t \cdot F^{-*} \\ T = |F| F^{-1} \cdot t \cdot F^{-*} \end{cases}$$

$$\text{能量守恒} \begin{cases} \rho \dot{e} = \left(V \otimes \overset{\Sigma}{\nabla} \right) : t \\ \overset{\circ}{\rho} \dot{e} = \overset{\Sigma}{\dot{\Sigma}} = \begin{cases} \left(V \otimes \overset{\Sigma}{\nabla} \right) : \tau \\ \overset{\Sigma}{D} : T = \overset{\circ}{E} : T \end{cases}, \quad \overset{\circ}{E} = \frac{1}{2} (F^* F - I); \quad \text{动量矩守恒 } g^l \cdot t \times g_l + \rho m = 0 \end{cases}$$

曲线形态连续介质

构型构造



$$\text{速度 } V = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial x}{\partial t}(\xi,t) \underline{g}$$

$$\text{物质导数 } \dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t) + \left(V - \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x,t) \right) \cdot \left(\overset{\Gamma}{\nabla} \otimes \Phi \right)$$

变形梯度及其基本性质

$$F = \frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,t) \underline{g} \otimes \bar{G}, \quad \begin{cases} \dot{F} = \overset{\Gamma}{L} \cdot F, & \overset{\Gamma}{L} = V \otimes \overset{\Gamma}{\nabla} = \frac{\partial V}{\partial s} \otimes \tau(s) \\ |\dot{F}| = \overset{\Gamma}{\theta} |F|, & \overset{\Gamma}{\theta} = V \cdot \overset{\Gamma}{\nabla} = \frac{\partial V}{\partial s} \cdot \tau(s) \end{cases}, \quad |F| = \frac{|g|}{|G|} \frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,t)$$

输运方程 (物质线)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\overset{\Gamma}{\Gamma}} \Phi ds = \int_{\overset{\Gamma}{\Gamma}} \left[\dot{\Phi} + \overset{\Gamma}{\theta} \Phi \right] ds \\ \frac{d}{dt} \int_{\overset{\Gamma}{\Gamma}} \Phi \circ -\tau ds = \int_{\overset{\Gamma}{\Gamma}} \left[\dot{\Phi} \circ -\tau + \Phi \circ - \left(\overset{\Gamma}{L} \cdot \tau \right) \right] ds \end{cases}, \quad \text{相容性结构} \begin{cases} \tau \cdot D \cdot \tau = \overset{\Gamma}{\theta} \\ L \cdot \tau = \overset{\Gamma}{L} \cdot \tau \end{cases}$$

守恒律方程

$$\text{质量守恒} \begin{cases} \dot{\rho} + \overset{\Gamma}{\theta} \rho = 0 \\ \rho |F| = \overset{\circ}{\rho}(\xi) \end{cases};$$

$$\text{动量守恒} \begin{cases} \rho a = t \cdot \overset{\Gamma}{\nabla} + kt \cdot n + \rho f_m \\ \overset{\circ}{\rho} a = \begin{cases} \tau \cdot \overset{\circ}{\nabla} \\ (FT) \cdot \overset{\circ}{\nabla} \end{cases} + \overset{\circ}{\rho} f_m \end{cases}, \quad \text{应力形式} \begin{cases} t = t^i_{33} g_i \otimes \tau + t_{33} \tau \otimes \tau \\ \tau = \frac{t \cdot F}{|F|} \\ T = \frac{F^{-1} \cdot t \cdot F}{|F|} \end{cases};$$

$$\text{能量守恒} \begin{cases} \rho \dot{e} = \left(V \otimes \overset{\Gamma}{\nabla} \right) : t \\ \overset{\circ}{\rho} \dot{e} = \overset{\circ}{\Sigma} = \begin{cases} \left(V \otimes \overset{\circ}{\nabla} \right) : \tau \\ \overset{\circ}{E} = \frac{1}{2} (F^* F - I); \text{动量矩守恒 } \tau \times t \cdot \tau + \rho m = 0 \end{cases} \\ \overset{\Gamma}{D} : T = \overset{\circ}{E} : T \end{cases}$$

该课程教学的进一步设想

1. 后续课程将以上述《体积、曲面、曲线形态连续介质有限变形理论的相似结构》为基础进行讲授，从而显著地提高课程的广度与深度。一般连续介质力学的教程仅涉及体积形态连续介质的有限变形理论，而我们的课程将全面提供体积、曲面、曲线形态连续介质的有限变形理论，并且掌握三者的通识性结构，教与学上可以追求事半功倍的效果。
2. 课程理论对应的实际事例应该更紧密联系于连续介质力学的当前发展，并加强横向发展，如涉及连续介质电动力学，空气动力学及塑性力学等方面的基础研究思想及方法，最主要的内容等。
3. 需要加强学生对理论的实践，以切实提高对主要思想及方法的理解和掌握，具有实际应用的能力。为有兴趣学生提供科学与技术研究的机会。
4. 课程应要求平时练习与阶段性考试，以此逐渐过度到学业的过程性评估。

* 本表在学期结束前交院系教务室，并与考卷一同装订

注：试卷各题得分明细

学号	姓名	1(1)	1(2)	1(3)	2(1)	2(2)	2(3)	3(1)	3(2)	3(3)	3(4)	3(5)	3(6)	3(7)	3(8)	3(9)	4(1)	4(2)	4(3)	4(4)	5(1)	5(2)	5(3)	5(4)	5(5)	总分	折合
13307130395		10	10	10	8	9	9	10	10	10	2	6	7	7	5	7	10	10	10	7	10	10	10	10	10	207	86.3
13307130087		10	10	8	7	8	5	10	10	9	5	6	8	4	5	4	10	10	10	3	10	10	10	10	10	192	80.0
13307130273		10	10	4	6	4	9	10	10	0	7	5	0	0	0	0	10	10	8	0	10	10	10	10	10	153	63.8
13307130198		7	10	6	6	2	3	10	10	4	7	6	5	0	0	0	10	8	2	0	8	8	10	2	2	126	52.5
14307110234		3	4	7	6	4	7	10	10	7	2	6	5	6	0	0	5	10	0	0	10	10	6	2	2	122	50.8
13307130451		10	10	5	7	3	5	10	10	10	7	9	8	4	0	0	1	7	1	1	8	0	0	0	0	116	48.3
13307110182		7	7	3	7	4	7	10	10	10	7	0	0	0	0	0	0	6	8	0	3	10	1	1	1	102	42.5
13307110064		6	4	5	5	4	3	10	10	7	5	7	6	4	0	0	1	5	1	4	2	3	0	1	1	94	39.2
13307110334		0	0	5	7	4	0	10	6	0	0	8	5	0	0	0	0	8	0	4	3	2	6	8	2	78	32.5
13307110086		0	1	6	0	0	0	10	10	0	0	6	2	0	0	0	2	5	0	0	3	2	0	8	0	55	22.9
12307120084		0	0	3	1	0	0	10	0	0	0	0	0	0	2	2	3	6	3	4	2	5	2	3	4	50	20.8
平均		5.7	6	5.6	5.5	3.8	4.4	10	8.7	5.2	3.8	5.4	4.2	2.3	1.1	1.2	4.7	7.7	3.9	2.1	6.3	6.4	5	5	3.8	118	49.1