曲面定义及其切空间

谢锡麟　复旦大学 力学与工程科学系

2015 年 4 月 2 日

1　知识要素

1.1　曲面向量值映照

定义 1.1 (曲面)**.** 一般地, $m+1$ 维 Euclid 空间中的 m 维曲面可以由以下向量值映照给出

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma):\mathbb{R}^m\supset D_x\ni\boldsymbol{x}_\Sigma=\begin{pmatrix}x_\Sigma^1\\ \vdots\\ x_\Sigma^m\end{pmatrix}\mapsto\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\triangleq\begin{pmatrix}X^1\\ \vdots\\ X^m\\ X^{m+1}\end{pmatrix}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\in\mathbb{R}^{m+1},$$

如图1所示.

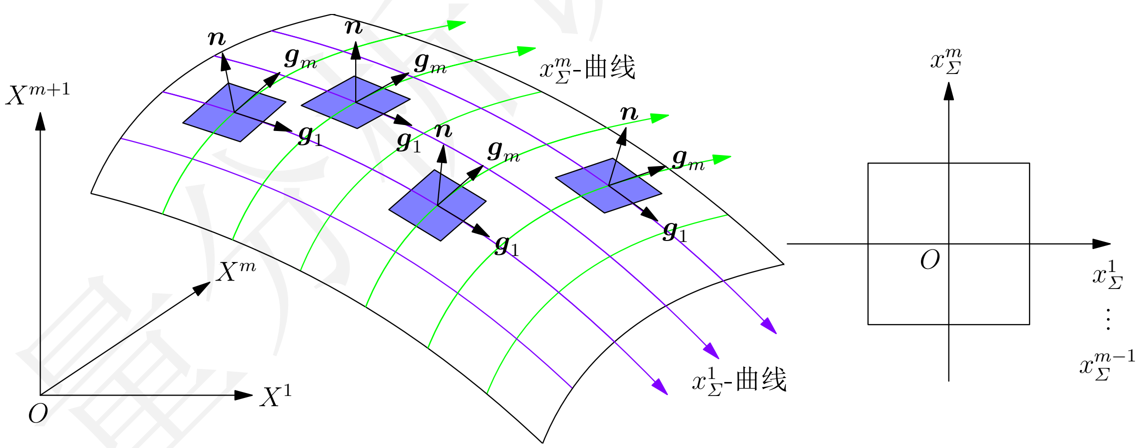

Figure 1: 有限维 Euclid 空间中曲面向量值映照示意

该曲面 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 的 Jacobi 矩阵可以表示为

$$D\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Sigma^1}{\partial x_\Sigma^1} & \cdots & \dfrac{\partial\Sigma^1}{\partial x_\Sigma^m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\Sigma^{m+1}}{\partial x_\Sigma^1} & \cdots & \dfrac{\partial\Sigma^{m+1}}{\partial x_\Sigma^m}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(m+1)\times m},$$

令 $D\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_\Sigma) & \cdots & \boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{x}_\Sigma) \end{pmatrix}$, 其中

$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma) \triangleq \lim_{\lambda \to 0 \in \mathbb{R}} \frac{\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma + \lambda \boldsymbol{i}_i) - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)}{\lambda} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Sigma^1}{\partial x_\Sigma^i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \Sigma^{m+1}}{\partial x_\Sigma^i} \end{pmatrix} (\boldsymbol{x}_\Sigma) \in \mathbb{R}^{m+1}$$

称为曲面 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 在 $\boldsymbol{x}_\Sigma$ 点处沿坐标线 x_Σ^i 的**切向量**.

1.2 曲面切空间

使得 $D\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 为列满秩的点称为**正则点**. 向量 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \in \mathbb{R}^{m+1}$ 如果满足

$$\begin{cases} |\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma)|_{\mathbb{R}^{m+1}} = 1, \\ (\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma))_{\mathbb{R}^{m+1}} = 0, \quad i = 1, \cdots, m, \end{cases}$$

则称其为曲面在点 $\boldsymbol{x}_\Sigma$ 处的**法向量**.

定义 1.2 (切空间)**.** 在曲面 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 的正则点处, 切向量 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m$ 张成的空间称为**切空间**, 记作 $T_x\Sigma$.

所有的切向量和法向量 $\{\boldsymbol{g}_i\}_{i=1}^m \cup \{\boldsymbol{n}\}$ 构成 $\mathbb{R}^{m+1}$ 空间中一个基, 可称为**曲面上局部协变基**. 按对偶关系, 一定唯一存在**曲面上局部逆变基**$\{\boldsymbol{g}^\alpha\}_{\alpha=1}^{m+1}$, 满足

$$\left(\boldsymbol{g}_\alpha, \boldsymbol{g}^\beta\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} = \delta_\alpha^\beta \quad \text{或者} \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{m+1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}^1 & \cdots & \boldsymbol{g}^{m+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_{m+1},$$

由此, 由 $\left(\boldsymbol{g}_{m+1}, \boldsymbol{g}^{m+1}\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} = 1$, $\boldsymbol{g}_{m+1} = \boldsymbol{n}$, 有 $\boldsymbol{g}^{m+1} = \boldsymbol{n}$. 由 $\left(\boldsymbol{g}_{m+1}, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} = \left(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{g}^i\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} = 0$, 可得 $\boldsymbol{g}^i$ 也是切空间 $T_x\Sigma$ 的元素, 满足 $\left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} = \delta_j^i$.

引入 $g_{ij} = \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^{m+1}}$, $g^{ij} = \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^{m+1}}$, 则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_i &= \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} \boldsymbol{g}^j + (\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{n})_{\mathbb{R}^{m+1}} \boldsymbol{n} = g_{ij} \boldsymbol{g}^j, \\ \boldsymbol{g}^i &= \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} \boldsymbol{g}_j + \left(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{n}\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} \boldsymbol{n} = g^{ij} \boldsymbol{g}_j. \end{aligned}$$

亦即, 切空间中的两组基可按照上式关系进行相互转换.

1.3 曲面上的曲线

曲面上的曲线在参数空间可以表示为如下映照 (如图2所示):

$$\boldsymbol{\Gamma}_{x_\Sigma} : [\alpha, \beta] \ni \lambda \mapsto \boldsymbol{\Gamma}_{x_\Sigma}(\lambda) \equiv \boldsymbol{x}_\Sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} x_\Sigma^1(\lambda) \\ \vdots \\ x_\Sigma^m(\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

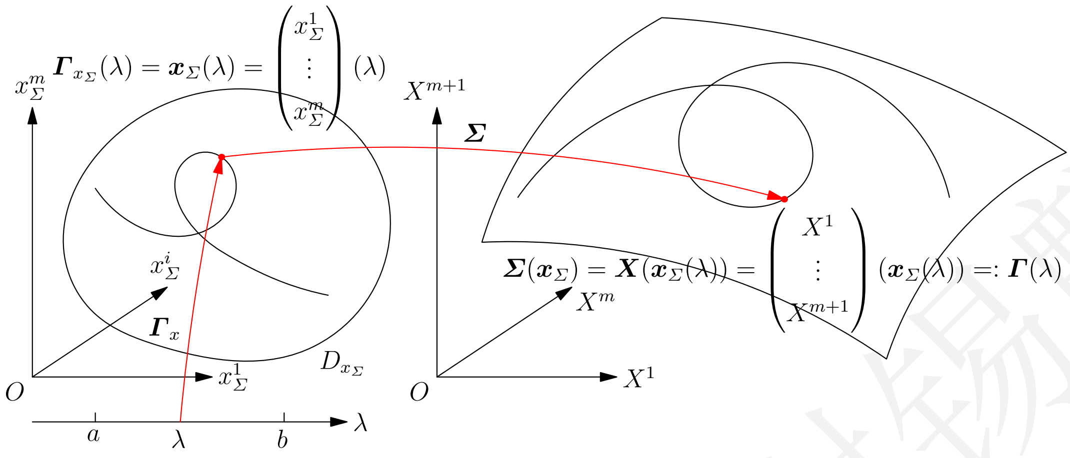

Figure 2: 曲面上曲线示意

而该曲线在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 空间可以表示为

$$\boldsymbol{\Gamma}(\lambda) \equiv \boldsymbol{X}(\lambda) = \boldsymbol{\Sigma} \circ \boldsymbol{\Gamma}_{x_\Sigma}(\lambda) = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma(\lambda)),$$

其切向量可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}(\lambda) &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) \triangleq \lim_{\Delta t \to 0 \in \mathbb{R}} \frac{\boldsymbol{X}(\lambda + \Delta\lambda) - \boldsymbol{X}(\lambda)}{\Delta\lambda} \\ &= D\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_\Sigma}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) = \dot{x}_\Sigma^i(\lambda)\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma(\lambda)) \in T_{x_\Sigma}\Sigma,\end{aligned}$$

即曲面上曲线的切向量一定落在该曲面的切空间中.

2 应用事例

3 建立路径

- 所有自变量维数比因变量维数低一维的向量值映照都可以称为 “曲面”. 可基于曲面向量值映照的特殊性, 研究曲面的基本几何性质.