组合数学初步

- 第五章　鸽笼原理
- 第六章　排列与组合
- 第七章　生成函数与递推关系

组合数学/组合论

- 组合数学/组合论：应用数学学科，对于算法研究变得日益重要。

计算机算法分类

- 数值计算：方程组求解、积分计算
- 非数值计算：搜索、排序、组合优化（主要是组合算法）

设计和分析组合算法的基础是组合数学

组合数学的四个方面

- 判定所提出问题的解是否存在的存在性问题
- 确定有解问题其不同解的个数的计数问题
- 对可解问题去把解构造出来的构造性算法
- 从问题的多种构造性算法中择优改进的优化问题。

讲授内容

- 组合数学中的存在性问题和计数问题

《组合数学》经典教材

- 《组合数学》（第3版），卢开澄，卢华明著，清华大学出版社。（有课件，可拷贝）
- 《组合数学》（英文版.第3版），（美）Richard A. Brualdi，译者：冯舜玺、罗平、裴伟东。校：卢开澄、冯舜玺。Prentice Hall，机械工业出版社。

组合数学

- 一、组合数学的历史和发展原因
- 二、组合数学两类一般性问题
- 三、组合学另外两种问题
- 四、组合数学的定义

一、组合数学的历史和发展原因

- 1. 组合数学的历史渊源扎根于数学娱乐和游戏之中。
- 2. 组合数学的历史和发展原因
- 1) 计算机的发展, 程序的基础往往是求解问题的组合学算法.
- 2) 组合数学对于过去很少与数学正式接触的学科的适用性

二、组合数学两类一般性问题

- 组合数学涉及将一个集合的物体排列成满足一些指定规则的格式。
- 1.排列的存在性: 排列在什么样的(充分和必要)条件下能够实现?
- 2.排列的计数和分类: 如果一个排列是可能的,那么就会存在多种方法实现它. 此时, 就可以计数并将它们分类.

- 组合学问题形式:
- 能否排列……?
- 存在一个……吗?
- 能用多少方法……?
- 计算……的数目.

三、组合学另外两种问题

- 研究一个已知的排列
- 构造一个最优的排列

四、组合数学的定义

- 组合数学是研究离散结构的存在、计数、分析和优化等问题的一门学科。

第5章 鸽笼原理

- 5.1 鸽笼原理的简单形式
- 5.2 鸽笼原理的加强形式

10.1 鸽笼原理的简单形式

- 1, 问题的引入
- 实例：

　　某次会议有n位代表参加，每位代表认识其他代表中某些人，则至少有两个人认识的人数是一样的。

10.1 鸽笼原理的简单形式

- **2，鸽笼**
- 定理5.1
- *n+1*只鸽子飞回*n*个笼子，至少有一个鸽笼含有不少于2只鸽子。

- ***<u>证明方法：反证</u>***

- 例 1　367人中至少有 2 人的生日相同。
- 例 2　10双手套中任取11只，其中至少有两只是完整配对的。

- **3, 鸽笼的扩展（抽象）**
- 定理5.2
- 　　　*s*（*s*≥*1*）个元素分成*t*个组，那么必存在一个组至少含有⌈*s/t*⌉（这里⌈ ⌉为“上整数”记号）个元素。
- *证明方法：反证法。*

- 证明：若每个组至多含有$(\lceil s/t\rceil-1)$元素，则t个组共有元素$t(\lceil s/t\rceil-1)$，因为$s/t\le\lceil s/t\rceil<(s/t)+1$，所以有$t(\lceil s/t\rceil-1)<s$，这就导致矛盾。所以必存在一个组至少含有$\lceil s/t\rceil$个元素。

- **4，实例**
- 1）例5.1 设f是D到R的函数，这里$|D|>|R|$，令$i=\lceil |D|/|R| \rceil$，则D中存在i个元素d_1，d_2，……，d_i，使得$f(d_1)=f(d_2)=\ldots\ldots f(d_i)$。
- 证明方法：此问题相当于定理5.2，把$|D|$个元素分到$|R|$个组中去。

- 证明：在这$|R|$个组中有一个组至少含有$i=\lceil |D|/|R| \rceil$个元素。在同一组中对应的函数值是相等的。所以在D中至少存在i个元素d_1, d_2, ……, d_i，使得$f(d_1)=f(d_2)=……f(d_i)$。

- 2）例5.2 在$n+1$个小于或等于$2n$的互不相等的正整数中，必存在两个互质的数。

- 证明：把$1, 2, \ldots\ldots, 2n$这$2n$个数分成n个组：$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots\ldots, \{2n-1, 2n\}$；则问题归结为从$n$个组中取$n+1$个数，由定理10.1知，至少有2个数取自同一组，由于这两个数是相邻的正整数，故互质。

- 3）例5.3　$1, 2, \ldots\ldots, 2n$中任取$n+1$个互不相同的数中，必存在两个数，其中一个数是另一个数的倍数。

- 证明：因为任何正整数n可以表示成$n=2^a\times b$（这里$a=0, 1, 2, \ldots$，且b为奇数）。设取出的$n+1$个数为$k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$，则$k_i=2^{ai}\times b_i$。

  由于$b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$是奇数，共有$n+1$个，而在$\{1, 2, \ldots\ldots, 2n\}$中只有$n$个不同的奇数，所以必存在$i, j$，使得$b_i=b_j$。

  不妨设$k_i>k_j$，则有$k_i / k_j =2^{ai-aj}$为正整数，因此k_i是k_j的倍数。

- 4）例5.4（狄利克雷逼近定理）假设α是一个无理数，而K是一个正整数，则必定存在一个有理数p/q（1≤p≤K），满足

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \langle \frac{1}{q(K+1)}$$

- 5）例5.5　一个国际象棋选手为参加国际比赛，突击训练77天，要求每天至少下一盘棋，每周至多下12盘棋。
- 证明：无论如何安排总可以使他在这77天里有连续几天共下21盘棋。

- 证明：用a_i表示从第1天到第i天下棋的总盘数（i=1, 2, …, 77）。由于规定每天至少下一盘棋，每周至多下12盘棋，所以

$$1\le a_1<a_2<\ldots\ldots<a_{77}\le 12\times(77/7)=132$$

构造新序列：

$$a_1+21,\ a_2+21,\ldots\ldots,\ a_{77}+21$$

则有这样的序列：

$$a_1,\ a_2,\ldots\ldots,\ a_{77},\ a_1+21,\ a_2+21,\ldots\ldots,\ a_{77}+21$$

共有154个,但每个不超过153,所以必存在i, j ($j<i$)，使得$a_i=a_j+21$，则有$a_i-a_j=21$，即在$j+1, j+2, \ldots, j+(i-j)$的连续$i-j$天中下了21盘棋。

- 学生思考题：
- 证明对于k=1, 2, ……, 21存在连续若干天，在此期间国际象棋大师将恰好下完k局棋(k=21为上题处理的情况)。能否推断：存在连续若干天，在此期间国际象棋大师将恰好下完22局棋？

- 5) 中国余数定理
- 令*m*和*n*为二互素的正整数，并令*a*和*b*为两整数，且$0 \le a \le m-1$以及$0 \le b \le n-1$。于是，存在一个正整数*x*，使得*x*除以*m*的余数为*a*，并且*x*除以*n*的余数为*b*；即*x*可以写成$x=pm+a$的同时又可以写成$x=qn+b$的形式，这里，*p*和*q*是两个整数。

- 证明：考虑n个整数$a, m+a, 2m+a, \ldots\ldots, (n-1)m+a$，这些整数中的每一个除以$m$都余$a$。
- 假设其中的两个除以n有相同的余数r。令这两个数为$im+a$和$jm+a$，其中$0\le i<j\le n-1$。因此，存在两整数q_i和q_j，使得$im+a=q_in+r$及$jm+a=q_jn+r$。则有$(j-i)m=(q_j-q_i)n$。
- 所以n是$(j-i)m$的一个因子。由于n与m没有除1以外的公因子，因此n是$j-i$的一个因子，然而，$0\le i<j\le n-1$意味着$0<j-i\le n-1$，也就是说n不可能是$j-i$的因子。该矛盾产生于我们的假设：$a, m+a, 2m+a, \ldots\ldots, (n-1)m+a$中有两个除以$n$有相同的余数。因此，这$n$个数中每个除以$n$有不同的余数。

- 根据鸽巢原理： n个整数0, 1, 2, ……, n-1中每一个作为余数都要出现；特别是数b也是如此。令p为整数，满足$0 \le p \le n-1$，且使数$x=pm+a$除以n余数为b。则对于某个适当的q，$x=qn+b$。因此，$x=pm+a$且$x=qn+b$，从而x具有所要求的性质。

- 学生思考题：
- 举例证明：当m和n不互素时，中国余数定理的结论未必成立。

- 解题要点：确定哪些对象为“鸽子”，哪些对象为“鸽笼”
- 练习

5.2 鸽笼原理的加强形式

- 1 定理5.3
- 设$q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$都是正整数，若把$q_1+q_2+\ldots\ldots+q_n-n+1$个元素分成$n$个组，则必然发生：或者第一组中至少有$q_1$个元素；或者第二组中至少有$q_2$个元素；……；或者第n组中至少有$q_n$个元素。
- *证明方法：反证法。*

- 证明：若结论不成立，则对于$i=1, 2, \ldots, n$，第i组中至多有q_i-1个元素，则n个组的元素个数的总和不超过$q_1+q_2+\ldots\ldots+q_n-n$个，这就导致矛盾。

- 2 推论
- 1）推论5.1　若将$n(r-1)+1$个元素分成n个组，则至少有一个组含有r个或更多的元素（这里n、r皆为正整数）。

- 2）推论5.2　若n个正整数$m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$的平均数满足不等式：

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n} > r - 1$$

则$m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$中至少有一个不小于$r$。

- 3 例题
- 1）例5.6 两个同心圆盘的每个圆周均分为200段, 从大盘上任选100段涂上红色, 其余涂上蓝色，而在小盘的每个小段上任意涂上红色或蓝色.
- 证明: 在旋转小盘时可以找到某个位置,使得小盘上至少有100个小段与大盘上对应段颜色相同.

- 证明：固定大盘，对小盘上任一段，在它旋转过程中，可有200个可能旋转位置，与大盘上的所有段构成200种颜色组合，其中同色的有100组，因小盘上共有200段，故小盘上的所有段在旋转一周后，与大盘对应段构成的同色组共有20000个。而旋转一周后，共可转去200段，设i段的同色组为m_i（I=1, 2, …, 200），而总的同色组就是$m_1 + m_2 +…+ m_{200}$ =20000，因此200个整数$m_1, m_2 ,…, m_{200}$的平均数满足不等式：20000/200=100>100-1，所以，由推论10.2，某个位置,使得小盘上至少有100个小段与大盘上对应段颜色相同。

2）例5.6设$a_1, a_2, \ldots a_{n^2+1}$，是$n^2+1$个不同实数的序列，则必可从此序列中选出n+1个数的子序列，使这子序列为递增序列或递减序列。

习题解析

- 鸽笼原理
- 用于判断是否存在满足鸽笼原理条件的对象，若鸽笼原理的条件成立，则存在满足条件的对象。
- 运用鸽笼原理时必须确定哪些对象相当于鸽子，而哪些对象相当于鸽笼。

鸽笼原理形式

- 设函数f是从有限集X到有限集Y的映射，且$|X|>|Y|$，则必存在$x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，满足$f(x_1)=f(x_2)$。

- 鸽笼原理形式例题
- 1．20个处理器连成网络，证明至少有两个处理器与相同数目的处理器直接相连。

- *解题分析：*
- 20个处理器编号分别为1, 2, 3, ……, 20,（定义域$X=\{1, 2, 3, \ldots\ldots, 20\}$）；$a_i$表示与第$i$个处理器直接相连的处理器的数目（$f(X)$）。
- 证明：对于某两个i, j，$i \neq j$，$a_i = a_j$。

- 解：
- $X=\{1, 2, 3,\ldots\ldots, 20\}$, $Y=\{0, 1, 2,\ldots\ldots, 19\}$; 0和19不能同时作为函数值存在，即不存在两个$i$, j，$i\neq j$，$a_i=0$，$a_j=19$。所以$|X|=20$, $|Y|<20$。
- 根据鸽笼原理形式1，命题成立。

- 2. 列表中有80件物品，每个物品的属性为“可用”或“不可用”，共有45个“可用”的物品，证明至少有两件可用物品的编号差恰为9。

- ***解题分析：***
- a_i表示第i个可用物品的编号；
- 证明：对于某两个i, j，$i \neq j$，$a_i - a_j = 9$。

- 证明：
- 考虑下列两组数字：

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{45}$$

$$a_1+9, a_2+9, \ldots\ldots, a_{45}+9$$

这两组共90个数字，取值范围为1-89。

因为第一组数字两两不同，第二组数字也是两两不同，所以必存在两个i, j，$i \neq j$，$a_i - a_j = 9$。

习题解析

- 5.1 在边长为2的正三角形中任意放置5个点，证明至少有两个点之间的距离不大于1.

- 解题要点：确定鸽子和鸽笼

- /*将三角形分成边长为1的4个正三角形*/

- 5.4　　　将一个圆盘分为36段，将1, 2, …, 36这36个数字任意标在每一段上，使得每一段恰有一个数字。证明：必存在相继的3段，它们的数字之和不小于56。

- 证明：设36个小扇形分别为$a_1, a_2, \ldots, a_{36}$。a_i中放的数为x_i，$i=1, 2, \ldots, 36$。$1 \le x_i \le 36$，且当时$i \ne j$，$x_i \ne x_j$。将36个小扇形合并成12个大扇形：$A_1=a_1a_2a_3, A_2=a_4a_5a_6, \ldots,$ $A_{12}=a_{34}a_{35}a_{36}$，并设$A_j$中3数之和为$y_j$，$j=1, 2, \ldots, 12$。则

$$\sum_{j=1}^{12} y_j = \sum_{i=1}^{36} x_i = \frac{36 \times 37}{2} = 18 \times 37$$

- 将18×37个元素分配给12个扇形，由鸽巢原理，至少存在一个扇形，分配给它的元素个数至少是$\lceil 18\times37 / 12\rceil=56$。
- 所以命题成立。

- 例　设 a_1, a_2, a_3为任意 3 个整数，b_1，b_2, b_3为a_1, a_2, a_3的任一排列，则 $a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3$中至少有一个是偶数.

- 证明:　由鸽巢原理，　a_1, a_2, a_3为任意 3 个整数，设这 3 个数被 2 除的余数为 xxy，于是b_1, b_2, b_3 中被 2 除的余数有 2 个x，一个y．这样 $a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3$被 2 除的余数必有一个为 0．

- 5.3 证明: 对于任意正整数N, 必存在N的一个倍数,使得它仅由数字0和7组成.

- 作业：5.1, 5.2, 5.5, 5.6

鸽笼原理形式习题

- 1）5台处理器连成网络，恰有两台与相同数量的处理器相连，可能吗？

- 2）列表中有100件物品，每个物品的属性为“可用”或“不可用”，共有55个“可用”的物品，证明至少有两件可用物品的编号差恰为4。

- 3）列表中有80件物品，每个物品的属性为“可用”或“不可用”，共有50个“可用”的物品，证明至少有两件不可用物品的编号差恰为3或6。