第 8 章　简化版本的自然数模型

第 1 节　紧致性定理及其应用

8.1.1　紧致性定理（复习）

我们的《数理逻辑导论》是以一阶逻辑的紧致性定理为结束的。我们这里复习一下。

定理 8.1 (紧致性定理). *(a)* 如果 $\Gamma \models \varphi$，则存在 Γ 的某个有穷子集 Γ_0 使得 $\Gamma_0 \models \varphi$。

(b) 如果 Γ 的每个有穷子集 Γ_0 都是可满足的，则 Γ 也是可满足的。

我们也证明了存在自然数的非标准模型。下面我们也复习以下它的证明，不过我们用皮亚诺公理来叙述。

我们在《导论》中曾经给出了皮亚诺本人版本的皮亚诺公理，但由于在皮亚诺的时代，逻辑发展还不成熟，因此对公理的叙述是在什么语言上做的，甚至逻辑系统是一阶的还是二阶的都没有讨论，而只是笼统的给出了在经典数学中够用的公理系统。现在我们已经学过一阶逻辑，可以把公理叙述得更精确。首先我们在一阶逻辑上讨论算术的公理系统，规定算术（或初等数论）的语言如下：$\mathcal{L}_{ar} = \{0, \mathsf{S}, +, \times, \approx\}$。小于符号 $\leq$ 也经常被直接包括，或作为被定义的符号而引进，例如，我们可以定义 $x \leq y$ 当且仅当 $\exists z(x + z \approx y)$。*皮亚诺公理系统* PA 是由下列公式的全称概括所组成的：

(1) $\mathsf{S}x \not\approx 0$。

(2) $\mathsf{S}x \approx \mathsf{S}y \to x \approx y$。

(3) $x + 0 \approx x$。

(4) $x + \mathsf{S}y \approx \mathsf{S}(x + y)$。

(5) $x \times 0 \approx 0$。

(6) $x \times \mathsf{S}y \approx x \times y + x$。

(7) （归纳公理模式）对每一个一阶公式 φ，都有对 φ 的归纳公理：

$$[\varphi(\mathsf{0}) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathsf{S}x))] \to \forall x\varphi(x)。$$

（我们把它记为 $I\varphi$，这在最后一章会用到。）

皮亚诺公理的本意是把自然数的*标准模型* $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$ 的理论公理化。显然，$\mathfrak{N}$ 满足所有的皮亚诺公理。但是我们后面会看到皮亚诺公理的所有逻辑后承与 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$ 的理论相差很远。

我们称与 $\mathfrak{N}$ 不同构的 PA 的模型为*非标准模型*。

例 8.1. 存在一个可数的非标准的 PA 模型 $\mathfrak{M}$。

证明: 首先扩展语言：添加一个新的常数符号 c。令

$$\Sigma = \{\mathsf{0} < c, \mathsf{S0} < c, \mathsf{SS0} < c, \cdots\}。$$

我们验证任何一个 $\Sigma \cup \mathsf{PA}$ 的有穷子集 Σ_0 都是可满足的：注意到 Σ_0 最多只有有穷条 Σ 中的语句，我们可以找一个充分大的自然数 k，并在标准模型中添上 c 的解释为 k 即可。PA 中的语句不牵扯到 c，因此在标准模型中依然成立。

依照紧致性定理，$\Sigma \cup \mathsf{PA}$ 也有一个模型。完全性定理的证明告诉我们这个模型可以取为可数的。我们所要的模型 $\mathfrak{M}$ 就是该模型在算术语言上的限制。显然 $\mathfrak{M}$ 满足 PA。剩下验证 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 不同构。假定存在一个同构 $h : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$。令 $m = h(c^{\mathfrak{A}})$。由于 $0 < c^{\mathfrak{A}}, S0 < c^{\mathfrak{A}}, \cdots, \underbrace{SS\cdots S}_{m\text{ 多个}}0 < c^{\mathfrak{A}}$ 在模型 $\mathfrak{M}$ 中成立，因此 h 诱导出一个从 $m+1$ 到 m 的一个单一映射，这与抽屉原则矛盾。 □

8.1.2　基数的预备知识

紧致性定理为我们提供了一个构造模型的工具。本节中我们将利用这个工具证明一些模型论里面的基本定理。这些定理涉及到基数的概念。因此我们简单介绍一下有关术语，简单到够用为止。有兴趣的读者可以参考集合论教材中的有关部分。

我们称两个集合 A 和 B *等势* 如果存在一个从 A 到 B 的双射。(在假定选择公理的前提下）每个集合 A 都具有一个*基数* 或*势* 。基数是用来衡量集合中元素多少的，确切定义我们留给集合论参考书。最小的那些基数为有穷基数，即自然数 $0, 1, 2, \cdots$。最小的无穷基数为自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数，记为 $\aleph_0$。具有基数 $\aleph_0$ 的集合称为*可数集*。集合论中有一个经典定理：

定理 8.2 (康托尔)**.** 自然数的幂集 $\mathcal{P}(\omega)$ 是不可数的。

根据康托尔定理，存在不可数集，例如，实数集 $\mathbb{R}$。最小的不可数的基数记为 $\aleph_1$。著名的连续统假设的一种叙述为：实数集的基数为 $\aleph_1$。

有穷数的加法和乘法可以自然延伸到无穷基数。事实上，涉及到无穷基数的加法和乘法反而简单了，因为有下面的“吸收定律”：

定理 8.3 (基数算术定理)**.** 对任何基数 κ 和 λ，如果 $\kappa \leq \lambda$ 并且 λ 是无穷的，则 $\kappa + \lambda = \lambda$。此外，如果 $\kappa \neq 0$，则 $\kappa \cdot \lambda = \lambda$。简而言之，小势被大势吸收。

另一个要用到的事实是：

定理 8.4. 假设 A 是一个无穷集。则 A 上有穷序列的集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ 与 A 等势。

8.1.3　勒文海姆 -斯寇伦定理

有了基数的概念之后，我们就可以叙述下面两个模型论中的基本定理，都称为勒文海姆 -斯寇伦定理。首先一个语言 L 的势定义为

$$\max(|\{L \text{ 中非逻辑符号}\}|, \aleph_0)。$$

例如，集合论的语言和初等数论的语言具有势 $\aleph_0$，即，都是可数语言。

定理 8.5 (下行的勒文海姆 -斯寇伦定理)**.** 令语言 L 的势为 κ 并且 Γ 为一个 L 上的一个可满足的公式集。则存在一个满足 Γ 的结构，它的势不超过 κ。特别地，如果 Γ 为一个可数语言上的公式集，并且是可满足的，则存在一个满足 Γ 的可数结构。

证明: 我们给出一个证明概要。考察可满足公式集 Γ，根据可靠性定理，Γ 是相容的。我们按照完全性定理证明的步骤来构造一个 Γ 的模型。该模型为一个商结构 $\mathfrak{A}/E$ 其中 $\mathfrak{A}$ 的论域为常数扩充后的语言 $L \cup L_C$ 中的项。注意到集合 L_C 的势等于 L 中公式集的势 κ；所以 $|\mathfrak{A}|$ 的势为 κ （在计算公式和项的个数时，我们都用到了定理 8.4）。而结构 $\mathfrak{A}/E$ 的论域是由 $\mathfrak{A}$ 中元素的等价类组成的，因此它的势不超过 κ。 □

给定一个可数语言 L。假定 L 上有一个不可数的结构 $\mathfrak{A}$。根据下行的勒文海姆 -斯寇伦定理（用在 $\mathfrak{A}$ 的理论上），存在一个可数的 Th $\mathfrak{A}$ 的模型 $\mathfrak{B}$。因此 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$。反过来情形如何呢？即假定 L 上有一个可数无穷的结构 $\mathfrak{B}$，是否能得到一个不可数无穷且与之初等等价的结构 $\mathfrak{A}$ 呢？注意，假如 $\mathfrak{B}$ 是有穷的并且 L 中包含等词，则习题 **??** 告诉我们这是不可能的。下面的定理回答了这类问题。

定理 8.6 (上行的勒文海姆 -斯寇伦定理)**.** 令 Γ 为一个势为 κ 的语言上的一个公式集。如果存在一个 Γ 的无穷模型，则对每一个基数 $\lambda \geq \kappa$，都存在基数为 λ 的 Γ 的模型。

证明: 令 $\mathfrak{A}$ 为一个满足 Γ 的无穷结构。往语言中添加 λ 个新的常数符号 $C = \{c_\alpha : \alpha < \lambda\}$。令

$$\Sigma = \{c_\alpha \not\approx c_\beta : \alpha < \beta < \lambda\}。$$

（这里我们假设 α, β 为序数，但暂时可以理解成指标集的两个不同指标。）则公式集 $\Sigma \cup \Gamma$ 的任意有穷子集 Σ_0 都是可满足的。因为 Σ_0 中至多涉及有穷多个 Σ 中的语句，所以至多用到有穷多个新常数。由于 $\mathfrak{A}$ 是无穷的，所以可以向 $\mathfrak{A}$ 中添加这些新常数的解释，使得不同的常数符号有不同的解释，因而满足 Σ_0。根据紧致性定理，存在一个 $\Sigma \cup \Gamma$ 的模型 $\mathfrak{B}$。再根据下行的勒文海姆 - 斯寇伦定理，我们可以进一步假定 $\mathfrak{B}$ 的基数不超过 λ，因为扩张后语言的基数为 $\kappa + \lambda = \lambda$。但任何 Σ 的模型显然至少有基数 λ。所以 $\mathfrak{B}$ 的基数为 λ，再把 $\mathfrak{B}$ 限制在原来的语言上即可。 □

注：根据勒文海姆 -斯寇伦定理，对一个无穷的结构来说，我们无法用一阶语言“完全”把它描述清楚，这与有穷结构形成对照，参见习题 **??**。

8.1.4　集合论的公理系统 ZFC

集合论的语言 $L = \{\in, \approx\}$，其中 $\in$ 是“属于”关系。由于我们不会用到具体的集合论公理，我们仅仅把集合论的公理系统 ZFC 的公理名称罗列如下：

(1) 外延公理

(2) 分离公理模式

(3) 并集公理

(4) 对集公理

(5) 幂集公理

(6) 无穷公理

(7) 替换公理模式

(8) 基础公理

(9) 选择公理

注意：这里每一条公理（或公理模式中的每一个实例）都是语言 $L = \{\in, \approx\}$ 上的一阶语句。

8.1.5　斯寇伦悖论

现在我们可以叙述*斯寇伦悖论*：显然集合论的语言是可数的。一方面根据下行的勒文海姆 -斯寇伦定理，ZFC 有一个可数的模型 $\mathcal{A}$。而另一方面，康托尔定理（定理 8.2）是 ZFC 的定理，所以 $\mathcal{A}$ 中包含一个不可数集，即自然数的幂集 $\mathcal{P}(\omega)$。这是不是一个矛盾呢？

斯寇伦悖论的消解我们留给读者自己思考；英文版的维基百科上有很好的解释。通常在集合论的课程中会仔细讨论斯寇伦悖论，因为它对理解绝对性概念很有帮助。斯寇伦构造可数模型的方法在逻辑（尤其是在集合论和模型论）和数学中都有着广泛的应用。最后讲一个“花絮”，据维基百科，斯寇伦本人是一个形式主义者，完全不相信不可数集合的存在，对他来说，著名的勒文海姆 -斯寇伦定理谈论的都是没有意义的对象，传说他甚至认为自己的名字与该定理联系在一起是可耻的!

第 2 节　可判定的理论

如果一个闭语句集 T 对语义蕴涵封闭，即对任何闭语句 σ 如果 $T \models \sigma$ 则 $\sigma \in T$，则称 T 为一个*理论*。显然，根据完全性定理，理论 T 也可以被定义成对推演封闭的闭语句集。

例如，任何一个语言上的所有普遍有效语句就形成一个理论。再如，对任何一个结构 $\mathfrak{A}$，Th $\mathfrak{A}$ 也是一个理论，这也是我们命名的理由。更一般地，对一个结构类 $\mathcal{K}$，定义 $\mathcal{K}$ 的理论为在 $\mathcal{K}$ 中所有成员内都成立的闭语句，记为 Th $\mathcal{K}$，换言之，

$$\mathrm{Th}\ \mathcal{K} = \{\sigma : \text{对所有 } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}, \models_{\mathfrak{A}} \sigma\}。$$

请读者自行验证 Th $\mathcal{K}$ 的确为一个理论。

定义 8.1. 我们称一个理论 T 为*完备的* 如果对每一个闭语句 σ，或者 $\sigma \in T$ 或者 $\neg\sigma \in T$。

例如，对任何结构 $\mathfrak{A}$，Th $\mathfrak{A}$ 总是完备的。完备的理论还有如下的等价刻画。

引理 8.1. 对相容的理论 T 来说，下列命题是等价的：

(1) T 是一个完备的理论。

(2) 任何 T 的真扩张 T'（即，$T \subsetneq T'$）都是不相容的。

(3) 对任何 T 的模型 $\mathfrak{A}$ 都有 $T = \mathrm{Th}\ \mathfrak{A}$。

(4) 对任何 T 的模型 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 都有 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$。特别地，Th $\mathcal{K}$ 是完备的当且仅当任何两个 $\mathcal{K}$ 中的结构都是初等等价的。

(5) 对任何闭语句 σ 和 τ，如果 $T \vdash \sigma \vee \tau$，则或者 $T \vdash \sigma$ 或者 $T \vdash \tau$。

证明: 练习。 □

注意：完备的理论并不一定是极大相容的，因为极大相容 集需要考虑所有的公式，而不仅仅是闭语句。

我们先看一个不 完备理论的例子，完备的例子稍后再举。这需要一点代数的知识。域的理论是不完备的，因为域可以有不同的特征。

定义 8.2. 我们称一个理论 T 是*可公理化的* 如果存在一个可判定的闭语句集 Σ 使得 T 是 Σ 语义后承集，即，$T = \{\sigma : \Sigma \models \sigma\}$。如果 Σ 是有穷的，则称 T 为*可有穷公理化的*。

例如，特征为 0 的域的理论是可公理化的，但不可有穷公理化，见习题。

定义 8.3. 我们称一个理论 T 为*可判定的*，如果存在一个算法使得对任何闭语句 σ，该算法都能告诉我们 σ 是否属于 T。

在我们后面讲了哥德尔编码以后，我们可以更精确地定义一个理论 T 是可判定的，如果它的编码的集合 $\sharp T = \{\sharp\sigma : \sigma \in T\}$ 是一个递归集。

引理 8.2. 任何完备的可公理化的理论都是可判定的。

在递归论部分里，我们证明了如果一个集合和它的补集都是递归可枚举的，则该集合是递归的。引理 8.2 可以视为它的一个特例。两者的证明思路是一样的。假定理论 T 可公理化。令 Σ 为 T 的一个公理集，即，$T = \{\sigma : \Sigma \models \sigma\} = \{\sigma : \Sigma \vdash \sigma\}$。由于 Σ 是可判定的，我们有算法系统地生成所有 Σ 所能证明的公式。利用这个算法，我们可以判断任何一个给定的闭语句 τ 是否属于 T：由于 T 是完备的，τ 和 $\neg\tau$ 之一迟早会出现在该算法生成的公式中。那时我们就可以轻易判断 τ 是否属于 T。

8.2.1　λ-范畴的理论

定义 8.4. 我们称一个理论 T 为*λ-范畴的*，如果对所有 T 的模型 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$，$|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| = \lambda$ 蕴涵 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$，即 T 的所有具有基数 λ 的模型都同构。

注：

(1) “范畴的”来源于英文 categorical，也包含“绝对”或“根本”的意思，但早期文献中把它译成“范畴的”，我们也“从众”。

(2) 显然两个具有不同基数的模型是不可能同构的，因此无限制的范畴性概念没有意义，λ-范畴是我们的最佳期望。后续课程中我们会讲莫雷定理：令 T 为一个可数语言上的一个完备理论。如果对某个不可数基数 κ，T 是 κ-范畴的，则对所有不可数基数 λ，T 是 λ-范畴的。莫雷定理说明对可数语言来说，“不可数范畴性”是有意义的。

(3) 如果 T 是 λ-范畴的，则 T 只有唯一的一个基数为 λ 的模型（在同构的意义下）。对比一下完备性的概念，如果 T 是完备的，则 T 在初等等价的意义下只有唯一的一个模型。当然，初等等价是比同构弱得多的概念。

例 8.2. 令 $\mathcal{L}_E = \{\approx\}$，和等词的理论 T_E 为语言 $\mathcal{L}_E$ 上所有普遍有效的闭语句的集合。则对任何的基数 λ，理论 T_E 都是 λ-范畴的。

我们再看另一个例子。考察序的语言 $\mathcal{L}_< = \{<, \approx\}$ 上的一个闭语句集 Δ，它是由包括线序公理、稠密性、即，

$$\exists x \exists y x \not\approx y,$$
$$\forall x \forall y \exists z (x < y \quad \rightarrow \quad (x < z \wedge z < y));$$

及无端点，即

$$\forall x \exists y\ x < y,$$
$$\forall x \exists z\ z < x。$$

令 T 为所有 Δ 的语义后承的集合。

定理 8.7 (康托尔)**.** 任何可数的无端点的稠密线序都同构于 $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$，换言之，$T$ 是 $\aleph_0$-范畴的。

对于每个素数 p 或 $p = 0$，我们用 ACF_p 表示特征是 p 的代数闭域理论。代数中的斯坦尼兹定理告诉我们对任何特征 p，理论 ACF_p 都是 $\aleph_1$-范畴的。

8.2.2　乌什 -沃特判别法

定理 8.8 (乌什 -沃特判别法[1])**.** 令 T 为一个可数语言上的理论并满足

(1) 对某个无穷基数 λ，T 是 λ-范畴的。

(2) T 的所有模型都是无穷的，即 T 没有有穷模型。

[1] 乌什 -沃特判别法 Łoś-Vaught Test。乌什，Jerzy Łoś（1920 - 1998），波兰逻辑学家，数学家；沃特，Robert Vaught（1926 – 2002），美国逻辑学家，数学家。

则 T 是完备的。

证明: 根据引理 8.1，我们只需证明 T 的任意两个模型 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 都初等等价。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为 T 的两个模型。根据 (2)，它们都是无穷的。无妨设 $\mathfrak{A}$ 的基数 $\leq \lambda$，$\mathfrak{B}$ 的基数 $\geq \lambda$（其它情形类似)。根据上行和下行的勒文海姆 -斯寇伦定理，存在 T 的模型 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{D}$，都具有势 λ，并且 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{C}$，$\mathfrak{B} \equiv \mathcal{D}$。由条件 (1)，$\mathfrak{C} \cong \mathfrak{D}$。因此

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{C} \cong \mathfrak{D} \equiv \mathfrak{B}$$

我们就得到 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$。 □

由于同构的概念强于初等等价的概念，也许有人会感到奇怪，为什么乌什 -沃特判别法用同构来证明初等等价呢？原因是在数学领域内，尤其是代数中，已经有了大量的证明同构的工具。这些工具让我们避开语言的限制来讨论问题，从而给我们带来方便。

根据康托尔定理，无端点的稠密线序的理论 T 满足乌什 -沃特判别法中的条件，因此是完备的。依照引理 8.1，T 的任何两个模型都是初等等价的，特别地，

$$(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}) \equiv (\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})。$$

再依照引理 8.2，理论 T 也是可判定的。有理数和实数这一对线序结构很好地说明了初等等价和同构的区别。一方面它们显然是不同构的，因为它们的基数不同，而另一方面，由于语言的限制，基数不同是无法用序的语言来描述的。从序的一阶性质上看，有理数和实数是无法区分的。

推论 8.1. 理论 $\mathrm{Th}\,(\mathbb{Q}, <)$ 和 ACF_p 都是可判定的。

第 3 节　只含后继的自然数模型

我们现在开始讨论初等数论（或称算术）的模型。尽管我们的目的是标准模型，但对非标准模型的讨论会有助于我们对标准模型的理解，因此，我们也会常常提到和看到非标准模型。我们会先考察一些简化版本的算术理论。一方面是为了循序渐进，逐步加深我们的理解，另一方面我们也通过这些简化版本的理论来介绍一些模型论的基础知识。

我们以最简单的结构 $\mathfrak{N}_S = (\mathbb{N}, 0, S)$ 开始，语言自然是 $\mathcal{L}_S = \{0, \mathsf{S}\}$。（我们默认等号 $\approx$ 总是包含在语言中的。）让我们试图来刻画结构 $\mathfrak{N}_S$。最显然的事实应该是 S 诱导出一个以 0 开头类似于线序的结构，至少没有有限的圈。于是我们考察由下列公式的全称概括所组成的闭语句集。

$$\begin{aligned}
&(S1) && 0 \not\approx \mathsf{S}x, \\
&(S2) && \mathsf{S}x \approx \mathsf{S}y \to x \approx y, \\
&(S3) && x \not\approx 0 \to \exists y(x \approx \mathsf{S}y), \\
&(S4.n) && \bigwedge_{i<n} \mathsf{S}x_i \approx x_{i+1} \to x_0 \not\approx x_n。
\end{aligned}$$

注意它们在结构 $\mathfrak{N}_S$ 上显然是成立的，后面我们会证明它们就是 Th $\mathfrak{N}_S$ 的一组公理。令 T_{S} 为上述公理的所有逻辑后承构成的集合。T_{S} 是一个理论。

理论 T_{S} 的模型 $\mathfrak{A}$ 的一般形式是怎样的呢？显然它必须包含一个同构于 $(\mathbb{N}, 0, S)$ 的“标准部分”：$\{0^{\mathfrak{A}}, (\mathsf{S}0)^{\mathfrak{A}}, (\mathsf{SS}0)^{\mathfrak{A}}, \cdots\}$。如果它不包含非标准元素，则 $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}_S$。否则，假定它包含某个非标准的元素 $a \in |\mathfrak{A}|$，则它必须包含 $\{\mathsf{S}^{\mathfrak{A}}(a), \mathsf{S}^{\mathfrak{A}}\mathsf{S}^{\mathfrak{A}}a, \cdots\}$，同时根据 (S3)，$\mathfrak{A}$ 还必须包含 a 的前驱，a 的前驱的前驱，等等。形象地说，$\mathfrak{A}$ 一定要包含一条含有 a 像整数一样的“$\mathbb{Z}$- 链”。假如 $\mathfrak{A}$ 中还有不在这条 $\mathbb{Z}$-链中的非标准元素 b 的话，它又会有一条包含 b 的 $\mathbb{Z}$-链。继续分析下去，整个模型 $\mathfrak{A}$ 就可以完全被 $\mathbb{Z}$-链的条数所决定。更精确的做法是，对 $|\mathfrak{A}|$ 中的任意两个元素 a 和 b，定义关系 $a \sim b$ 如果存在某个自然数 n，$(\mathsf{S}^{\mathfrak{A}})^n(a) = b$ 或者 $(\mathsf{S}^{\mathfrak{A}})^n(b) = a$。不难验证 $\sim$ 是 $|\mathfrak{A}|$ 上的一个等价关系；并且每个等价类 $[a]_\sim$ 或者是标准部分 $[0^{\mathfrak{A}}]_\sim$ 或者是一条 $\mathbb{Z}$-链。此外，如果两个模型 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 具有相同个数的 $\mathbb{Z}$-链，由于任何两条 $\mathbb{Z}$-链都是同构的，$\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 也是同构的。于是我们有如下刻画：

引理 8.3. 令 $\mathfrak{A}$ 为一个 T_{S} 的模型。则商集 $|\mathfrak{A}|/\sim$ 可以写成

$$\{[0^{\mathfrak{A}}]_\sim\} \cup \{[a_i]_\sim : a_i \in |\mathfrak{A}| \wedge i \in I\}$$

其中 I 是某个指标集。此外，如果另一个 T_{S} 的模型 $\mathfrak{B}$ 的商集是

$$\{[0^{\mathfrak{B}}]_\sim\} \cup \{[b_j]_\sim : b_j \in |\mathfrak{B}| \wedge j \in J\}$$

且指标集 I 和 J 的基数相同，则 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 同构。

证明: 我们只证此外部分，很显然，$\mathfrak{A}$ 的标准部分可以一一对应到 $\mathfrak{B}$ 标准部分，而对 $\mathbb{Z}$-链部分，指标集的一一对应自然地诱导出到 $\mathbb{Z}$-链部分的一一对应，所以 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 同构。 □

推论 8.2. T_{S} 不是 $\aleph_0$-范畴的，但它是 $\aleph_1$-范畴的。

证明: 假设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 都是 T_{S} 的模型，并且都具有基数 $\aleph_1$。由于每一条 $\mathbb{Z}$-链都是可数的，根据基数算术，两个模型都分别有正好 $\aleph_1$ 条 $\mathbb{Z}$-链。根据引理，结论立得。 □

事实上对所有的不可数基数 λ，它都是 λ-范畴的。我们前面提到过，这是莫雷定理的一个特例。

根据乌什 -沃特判别法，我们有：

推论 8.3. T_{S} 是完备的并且是可判定的。

推论 8.4. 理论 Th $\mathfrak{N}_S$ 等于 T_{S}，因而也是可判定的。

证明: 因为 T_{S} 是完备的，对 T_{S} 的任何一个模型 $\mathfrak{A}$，都有 $T_{\mathsf{S}} = \mathrm{Th}\ \mathfrak{A}$。特别地，挑选 $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}_S$ 即可得到结论。 □

8.3.1 量词消去法

理论 T_{S} 的判定性是从它的完备性得到的。如果我们真想判断一个闭语句 σ 是否属于 T_{S}，我们必须把 T_{S} 的全部成员（通过列举证明序列）一一列举出来，直到 σ 或 $\neg\sigma$ 出现为止。显然这是非常没有效率的。

下面讲的量词消去法提供给我们一个更有效率的判定算法。并且它还提供给我们更多的关于可定义集的信息。量词消去是模型论中的一个重要技巧，在代数和理论计算机科学上也都有广泛的应用。

定义 8.5. 我们称一个理论 T *接受量词消去*，如果对任何一个公式 φ 都存在一个不含量词的公式 ψ 使得 $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$。

当然，依照完全性定理，我们也可以等价地说 $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$，但用语义蕴涵的好处是不依赖于证明系统的选取。

引理 8.4 (塔尔斯基)**.** 一个理论 T 接受量词消去当且仅当对每一个具有如下形式的公式 φ

$$\exists x(\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$$

其中 α_i 或者是一个原子公式，或者是某个原子公式的否定式，都存在一个不含量词的公式 ψ 使得 $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$。

证明: 想法是将 φ 写成前束范式，并将不含量词的部分写成析取范式。对量词的个数进行归纳。细节我们留作习题。 □

定理 8.9. Th $\mathfrak{N}_S$ 接受量词消去。从而我们有一个效率更高的判定算法。

注：当 $T = \mathrm{Th}\ \mathfrak{A}$ 时，$T \models \varphi \leftrightarrow \psi$ 当且仅当对所有赋值 s，$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi \leftrightarrow \psi$。我们选取 $T = \mathrm{Th}\ \mathfrak{N}$ 而不用 T_{S}（尽管两者相等），原因是我们想在下面的证明中利用模型 $\mathfrak{N}_S$ 的直观，论证 $(\mathfrak{N}_S, s) \models \varphi$ 比论证 $T_{\mathsf{S}} \vdash \varphi$ 要容易一些。

证明: 令 $\varphi := \exists x(\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$ 为具有塔尔斯基引理中那种形式的公式。我们只需消去 φ 中的存在量词即可。

$\mathcal{L}_S$ 中含 x 的原子公式的一般形式为：$\mathsf{S}^m u \approx \mathsf{S}^n v$，其中 u, v 或者是 $\mathsf{0}$ 或者是一个变元。

断言 1. 我们只需处理 α_i 为 $\mathsf{S}^m x \approx \mathsf{S}^n v$ 或是它的否定的情形，还可以进一步假定 v 不是 x。(证明省略。)

下面我们分两个情形来讨论：

情形 1. 所有的 α_i 都是方程式的否定。

断言 2. 在这种情形下 φ 等价于 $\mathsf{0} \approx \mathsf{0}$。(因为 对所有赋值 s，都有 $(\mathfrak{N}_S, s) \models \varphi$。)

情形 2. 某个 α_i（无妨假定为 α_0）是方程 $\mathsf{S}^m x \approx t$。

令 α_0' 为 $t \not\approx 0 \wedge \cdots \wedge t \not\approx \mathsf{S}^{m-1}0$。对每个 $j > 1$，如果 α_j 为 $\mathsf{S}^k x \approx u$（否定式的情形类似），则令 α_j' 为 $\mathsf{S}^k t \approx \mathsf{S}^m u$。令 $\psi := \bigwedge_{i=0}^n \alpha_i'$。

断言 3. $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$。

断言 3 的证明. 固定一个赋值 s，如果 $(\mathfrak{N}_S, s) \models \varphi$，则对某个 $d \in \mathbb{N}$（d 就是 x 在 $\mathfrak{N}_S$ 中的实现），α_0 告诉我们 $m + d = \bar{s}(t)$。所以，$\bar{s}(t) \notin \{0, 1, \cdots, m-1\}$。所以 $(\mathfrak{N}_S, s) \models \alpha_0'$。此外，根据 α_0 和 α_j，我们有 $m+d = \bar{s}(t), k+d = \bar{s}(u)$，于是 $k+\bar{s}(t) = k+m+d = m+\bar{s}(u)$，即，$\alpha_j'$ 成立。所以，$(\mathfrak{N}_S, s) \models \psi$。另一方面，如果 $(\mathfrak{N}_S, s) \models \psi$，则根据 α_0'，存在某个自然数 e 使得 $m + e = \bar{s}(t)$。所以，从 α_j'，我们得到 $k + \bar{s}(t) = m + \bar{s}(u)$，于是 $k + m + e = m + \bar{s}(u)$，所以，$k + e = \bar{s}(u)$。因此，如果我们用 e 作为存在量词“$\exists x$”的证据，就有 $(\mathfrak{N}_S, s) \models \varphi$。 □

我们可以直接从 T_S 开始，完全避开对 T_S 模型一般形式的讨论和乌什 -沃特判别法，证明 T_S 接受量词消去。进而证明 T_S 是完备的和可判定的。最后再用 T_S 的完备性论证 $T_\mathsf{S} = \mathrm{Th}\ \mathfrak{N}_S$。两种做法都可以得到相同的结论。

第 4 节　包含后继和序的自然数模型

我们再看下一个简化版本 $\mathfrak{N}_< = (\mathbb{N}, 0, S, <)$，它的语言为 $\mathcal{L}_< = \{0, \mathsf{S}, <\}$。这一节和下一节的内容都是平行于前一节的，可以说是同一主题的不同变奏，当然技术上的难度会逐步加深。读者可以根据自己的需要，决定在这两节上化费的时间。

显然任何 $\mathrm{Th}\ \mathfrak{N}_<$ 的模型 $\mathfrak{A}$ 都是 $\mathrm{Th}\ \mathfrak{N}_S$ 的模型。因此，$\mathfrak{A}$ 是由标准部分起头，后面跟着若干个*有序的* $\mathbb{Z}$-链。如果 $\mathbb{Z}$-链的“序型”不同，比如，模型 $\mathfrak{A}$ 的 $\mathbb{Z}$-链部分是将 $(\mathbb{N}, <)$ 中的每个点换成一条 $\mathbb{Z}$-链得到的，而模型 $\mathfrak{B}$ 则是将 $(\mathbb{Q}, <)$ 中的每个点换成一条 $\mathbb{Z}$-链得到的，则 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 不同构。因此我们无法使用乌什 -沃特判别法（习题），但我们仍可证明 $\mathrm{Th}\ \mathfrak{N}_<$ 接受量词消去。

定理 8.10. $\mathrm{Th}\ \mathfrak{N}_<$ 接受量词消去。

证明: 同前一样，令 $\varphi := \exists x(\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$ 为具有塔尔斯基引理中那种形式的公式。我们只需消去 φ 中的存在量词即可。

$\mathcal{L}_<$ 中含 x 的原子公式除了 $\mathsf{S}^m u \approx \mathsf{S}^n v$ 之外，还有 $\mathsf{S}^m u < \mathsf{S}^n v$，其中 u, v 或者是 0 或者是一个变元。

断言 1. 我们只需处理原子公式，而不必考虑原子公式的否定式。

断言 1 的证明. 这是因为 $\mathfrak{N}_<$ 满足 $<$ 是一个线序；所以，$\mathsf{S}^m u \not\approx \mathsf{S}^n v$ 可以被 $(\mathsf{S}^m u < \mathsf{S}^n v) \vee (\mathsf{S}^n v < \mathsf{S}^m u)$ 替换；类似地，$\mathsf{S}^m u \not< \mathsf{S}^n v$ 可以被 $(\mathsf{S}^m u \approx \mathsf{S}^n v) \vee (\mathsf{S}^n v < \mathsf{S}^m u)$ 替换。

断言 2. 我们可以进一步假定变元 x 出现且仅出现在每个等式或不等式的一端。(证明省略。)

我们分两种情形讨论:

情形 1. 某个 α_i 是等式 $\mathsf{S}^m x \approx t$。则依照定理 **??** 的证明方式处理。(具体步骤省略。)

情形 2. 所有的 α_i 都是不等式。所以 φ 的一般形式是:

$$\exists x(\bigwedge_{i=1}^{M} t_i < \mathsf{S}^{m_i} x \ \wedge \bigwedge_{j=1}^{N} \mathsf{S}^{n_j} x < u_j)。\tag{8.1}$$

我们再分成几个子情形。

子情形 2.1. $N = 0$，即没有关于 x 的上界。

断言 3. 在这种情形下，对任意赋值 s 都有 $(\mathfrak{N}_<, s) \models \varphi$。所以 φ 等价于 $\mathsf{0} \approx \mathsf{0}$。(证明省略。)

子情形 2.2. $N \neq 0$ 且 $M = 0$，即只有关于 x 的上界而没有下界。

断言 4. 在这种情形下，对任意赋值 s 都有

$$(\mathfrak{N}_<, s) \models \varphi \leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^{N} \mathsf{S}^{n_j}\mathsf{0} < u_j。$$

断言 4 的证明我们留作习题。

子情形 2.3. $M \neq 0$ 且 $N \neq 0$。

我们先对 φ 的形式作一些简单的变换，不难看出每次变换后的公式都与变换前等价(前两个是根据一阶逻辑，末一个是模型 $\mathfrak{N}_<$ 的性质):

$$\exists x[\bigwedge_{i=1}^{M} (t_i < \mathsf{S}^{m_i} x \ \wedge \bigwedge_{j=1}^{N} \mathsf{S}^{n_j} x < u_j)],$$

再变成

$$\exists x[\bigwedge_{i=1}^{M}\bigwedge_{j=1}^{N} (t_i < \mathsf{S}^{m_i} x \ \wedge \ \mathsf{S}^{n_j} x < u_j)],$$

再变成

$$\exists x[\bigwedge_{i=1}^{M}\bigwedge_{j=1}^{N} (\mathsf{S}^{n_j} t_i < \mathsf{S}^{m_i+n_j} x \ < \mathsf{S}^{m_i} u_j)]。$$

这提示我们选取

$$\psi := \bigwedge_{i=1}^{M}\bigwedge_{j=1}^{N} (\mathsf{S}^{n_j+1} t_i < \mathsf{S}^{m_i} u_j) \ \wedge \bigwedge_{j} \mathsf{S}^{n_j}\mathsf{0} < u_j。$$

ψ 的后一句是从 φ 的一般形式 (8.1) 的后一句得来的（也参见子情形 2.2）。ψ 的前一句则是因为对于任意的 i 和 j，$\mathsf{S}^{m_i+n_j}x$ 都插在 $\mathsf{S}^{n_j}t_i$ 和 $\mathsf{S}^{m_i}u_j$ 之间，所以必须有 $\mathsf{S}^{n_j+1}t_i < \mathsf{S}^{m_i}u_j$。

断言 5. 在这种情形下，对任意赋值 s 都有

$$(\mathfrak{N}_<, s) \models \varphi \leftrightarrow \psi。$$

断言 5 的证明. 从 φ 推 ψ 见前面的讨论。我们验证另一个方向“$\Leftarrow$”。由于我们在 $\mathfrak{N}$ 上工作，让我们使用通常的加减符号，例如，我们用 $a+b$ 代表 $\mathsf{S}^b a$。根据 ψ 的后一句，我们有 $\bar{s}(u_j) - n_j - 1 \geq 0$（$1 \leq j \leq N$）。令 $d = \min\{(\bar{s}(u_j) - n_j) - 1 : 1 \leq j \leq N\}$ 并假定极小值在 j_0 点取到。则对任意的 $j \leq N$:

$$d + n_j = \bar{s}(u_{j_0}) - n_{j_0} - 1 + n_j \leq \bar{s}(u_j) - n_j - 1 + n_j = \bar{s}(u_j) - 1 < \bar{s}(u_j)。$$

说明 d 满足 φ 中的上界。

另一方面，在 ψ 的前一句中考察 i 和 j_0，我们有 $\bar{s}(t_i) + n_{j_0} + 1 < \bar{s}(u_{j_0}) + m_i$，于是，$\bar{s}(t_i) < \bar{s}(u_{j_0}) - n_{j_0} - 1 + m_i = d + m_i$，说明 d 满足 φ 中的下界。因此 d 就是存在量词 $\exists x$ 的例证。这就证明了断言 5，也完成了定理 8.10 的证明。 □

推论 8.5. Th $\mathfrak{N}_<$ 是可判定的。

我们还得到了对 $\mathfrak{N}_<$ 上可定义集的刻画:

推论 8.6. $\mathbb{N}$ 的一个子集在结构 $\mathfrak{N}_<$ 是可定义的当且仅当它是有穷的或者它的补集是有穷的。

如同我们上一节提到的，选取理论 Th $\mathfrak{N}_<$ 可以让我们利用模型的直观。但这样做的缺点是，我们看不到一个简单的公理系统，尽管可判定性允许我们把整个理论都当作公理集。事实上，Th $\mathfrak{N}_<$ 是可以被有穷公理化的。其公理集 $A_<$ 为下列语句的全称概括:

$$\begin{aligned}
&(S3) \quad x \not\approx 0 \to \exists y(x \approx \mathsf{S}y) \\
&(L1) \quad x < \mathsf{S}y \leftrightarrow x \leq y \\
&(L2) \quad x \not< 0 \\
&(L3) \quad x < y \vee x \approx y \vee y < x \\
&(L4) \quad x < y \to y \not< x \\
&(L5) \quad x < y \to y < z \to x < z。
\end{aligned}$$

令 $T_<$ 为 $A_<$ 语义后承的集合。有兴趣的读者可以证明，$T_<$ 接受量词消去。所以 $T_<$ 是完备的，且 $T_< = \text{Th } \mathfrak{N}_<$。

第 5 节　普莱斯伯格算术模型

我们再看下一个简化版本 $\mathfrak{N}_+ = (\mathbb{N}, 0, S, <, +)$，它的语言为 $\mathcal{L}_< = \{0, \mathsf{S}, <, +\}$。由于是普莱斯伯格在 1929 年最先证明了它的理论是可判定的，人们常把 Th $\mathfrak{N}_+$ 称为*普莱斯伯格算术*。

我们仍然从考察它的模型开始。显然，任何 Th $\mathfrak{N}_+$ 的模型都是 Th $\mathfrak{N}_<$ 的模型，因此看上去都是以标准部分起头，后面跟着若干个有序的 $\mathbb{Z}$-链。由于加法运算的存在，这些 $\mathbb{Z}$-链（如果有的话）的序型必须是稠密无端点的。给定任何一个非标准元素 a，$a + a$ 必须在另一个 $\mathbb{Z}$-链当中，因为同一 $\mathbb{Z}$-链中元素的差都是标准自然数。此外，$a < a + a$（为什么?），所以，没有最大的 $\mathbb{Z}$-链。再看为什么 $\mathbb{Z}$-链是稠密的。由于 $\mathfrak{N}_+ \models \forall x \exists y (x \approx y + y \vee x + \mathsf{S}0 \approx y + y)$，对任何不在同一个 $\mathbb{Z}$-链中的元素 a 和 b，平均值 $\frac{a+b}{2}$ 或 $\frac{a+b+1}{2}$ 总是存在的（即公式中的 y）。不难验证，平均值所处的 $\mathbb{Z}$-链一定会在 a 和 b 所处的 $\mathbb{Z}$-链中间。同理可证，在标准部分和 $\mathbb{Z}$-链中间也一定有别的 $\mathbb{Z}$-链，因此，没有最小的 $\mathbb{Z}$-链。事实上，任何皮亚诺算术的非标准模型的 $\mathbb{Z}$-链（如果有的话）的序型也必须如此。

定理 8.11 (普莱斯伯格)**.** Th $\mathfrak{N}_+$ 是可判定的。

理论 Th $\mathfrak{N}_A$ 不接受量词消去。例如，公式 $\exists y (y + y \approx x)$ 就不等价于任何不含量词的仅含一个自由变元的公式 $\varphi(x)$（习题）。但是，我们可以证明这类公式是唯一的量词消去的障碍，即一般的公式都可以把量词消解到“这个程度”。精确地说，我们引入新的符号 $\equiv_2, \equiv_3, \cdots$，其中 $x \equiv_2 y$ 表示 x 和 y 模 2 同余，即 $\exists z (x \approx y + z + z \vee y \approx x + z + z)$。一般地，$\equiv_k$ 也仿此类似地定义。在引入新的符号之后，$\exists y (y + y \approx x)$ 就可以写成 $x \equiv_2 0$。将语言扩张，令 $\mathcal{L}_\equiv = \mathcal{L}_+ \cup \{\equiv_2, \equiv_3, \cdots\}$，并把它的结构记为

$$\mathfrak{N}_\equiv = (\mathbb{N}, 0, \mathsf{S}, <, +, \equiv_2, \equiv_3, \cdots)。$$

我们证明 Th $\mathfrak{N}_\equiv$ 接受量词消去。

为了增强可读性，让我们借用一些常用的符号，尽管严格地说这样做是不规范的。我们用 nx 来记 $\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n\text{ 多个}}$，这里 n 是外面元数学中的自然数，x 是变元；用 $u < t - v$ 来记 $u + v < t$，其中 u, v, t 都是项。

同前一样，令 $\varphi := \exists x (\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$ 为具有塔尔斯基引理中那种形式的公式。我们只需消去 φ 中的存在量词即可。

$\mathcal{L}_\equiv$ 中含 x 的原子公式除了 $\mathsf{S}^m u \approx \mathsf{S}^n v, \mathsf{S}^m u < \mathsf{S}^n v$ 之外，还有 $\mathsf{S}^m u \equiv_k \mathsf{S}^n v$，其中 u, v 或者是 0 或者是一个变元，k 是自然数。

断言 1. 我们只需处理原子公式，而不必考虑原子公式的否定式。

断言 1 的证明. 除了前一节考虑过的情形之外，我们还需考虑同余式，但 $a \not\equiv_k b$ 可以改写成 $\bigvee_{i=1}^{k-1} a \equiv_k b + \mathsf{i}$。

断言 2. 我们可以进一步假定变元 x 出现且仅出现在每个等式、不等式或同余式的一端。(证明省略。)

所以我们要处理的是包括

$$\exists x\,[(n_1x = u_1 - t_1)\ \wedge\ (n_2x \equiv_m u_2 - t_2)\ \wedge\ (n_3x < u_3 - t_3)\ \wedge\ (u_4 - t_4 < n_4x)]$$

这样的公式。

断言 3. 我们只需处理下列形式的公式 φ:

$$\exists x\,[\bigwedge_{i=1}^{I}(r_i - s_i < x)\ \wedge\ \bigwedge_{j=1}^{J}(x < t_j - u_j)\ \wedge\ \bigwedge_{k=1}^{K}(x \equiv_{m_k} v_k - w_k)]$$

其中，$r_i, s_i, t_j, u_j, v_k, w_k$ 为不含 x 的项。公式 φ 的特点是：x 的系数为 1 且不含等式。

断言 3 的证明. 我们将 x 的系数“重整”。首先利用 $a \equiv_m b$ 当且仅当 $ka \equiv_{km} kb$，我们可以把 x 的系数统一成同一个数 k。然后，我们把 kx 替换成 y，同时加上 $y \equiv_k 0$。于是我们就把想要消去的变元的系数变成了 1。如果所得的公式含有等式的话，比方说，含有 $x = t - u$，则把其它的原子公式 θ 用 θ^x_{t-u} 替换，再添上 $u \le t$ 即可。(细节留给读者。)

如果 $K = 0$，即 φ 中不含同余式，则依照定理 8.10 的证明方式处理。(具体步骤省略。)

现假定 $K \neq 0$。令 M 为 $m_1, \cdots, m_K$ 的最小公倍数。则对于任意满足 $1 \le k \le K$ 的 k 都有 $x \equiv_{m_k} v_k - w_k$ 当且仅当 $x + M \equiv_{m_k} v_k - w_k$。于是，为了寻找同余方程组的解，我们只需搜索连续 M 个自然数即可。

断言 4. 对于任何一个赋值 s，定义 $L_i = \bar{s}(r_i) - \bar{s}(s_i)$，$(1 \le i \le I)$。注意：$L_i$ 可能是负数。则 $(\mathfrak{N}_{\equiv}, s) \models \varphi$ 当且仅当在下表中存在一个自然数 e 它也满足 φ 中对 x 的要求。

$$\begin{array}{ll}
L_1, & L_1 + 1, \cdots, L_1 + (M-1), \\
L_2, & L_2 + 1, \cdots, L_2 + (M-1), \\
\cdots & \cdots \\
L_I, & L_I + 1, \cdots, L_I + (M-1), \\
0, & 1, \cdots, (M-1)。
\end{array}$$

断言 4 的证明. 从右向左是显然的，因为我们要求 e 是自然数，所以不用担心解是负数。

再看从左到右。假定 $(\mathfrak{N}_{\equiv}, s) \models \varphi$ 且自然数 d 可作为 $\exists x$ 的一个证据。令 $L_{i_0} = \max\{L_1, \cdots, L_I \square 0\}$，其中 0 是用来预防所有的 L_i 都是负数的情形。根据 φ 和 d 是自然数，我们有 $d \ge L_{i_0}$。令 e 为唯一的满足 $L_{i_0} \le e \le L_{i_0} + (M-1)$ 且 $d \equiv_M e$ 的自然数。根

据同余式解的周期性，e 也满足 d 所满足的 φ 中的同余式。此外，$e \le d$，所以，e 满足所有 d 所满足的上界。断言证毕。

为了可读性，我们用 $e(p,q)$ 来记对应于断言 4 的表中第 p 行，第 q 列的元素的项，其中 $1 \le p \le I$，$0 \le q \le M-1$，即，$e(p,q) := r_p - s_p + \mathsf{S}^q\mathsf{0}$。根据断言 4，我们选取 ψ 为

$$\bigvee_{p=1}^{I} \bigvee_{q=0}^{M-1} [\bigwedge_{i=1}^{I}(r_i - s_i < e(p,q)) \wedge$$

$$\bigwedge_{j=1}^{J} (e(p,q) < t_j - u_j) \ \wedge \ \bigwedge_{k=1}^{K} (e(p,q) \equiv_{m_k} v_k - w_k)]。$$

断言 5. 对于任何一个赋值 s，$(\mathfrak{N}_{\equiv}, s) \models \varphi \leftrightarrow \psi$。

断言 5 的证明基本上就是断言 4，我们略过。

所以 Th $\mathfrak{N}_{\equiv}$ 接受量词消去。于是，任何一个 $\mathcal{L}_+$ 上的闭语句都等价于若干形如 $\mathsf{S}^m\mathsf{0} < \mathsf{S}^n\mathsf{0}$ 和 $\mathsf{S}^m\mathsf{0} \equiv_k \mathsf{S}^n\mathsf{0}$ 的布尔组合。它们显然是可判定的。

定理 8.12. 集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ 在结构 $\mathfrak{N}_+$ 中是可定义的当且仅当 X 是最终周期的，即，存在自然数 M 和 p 使得对任意的 $n > M$，都有 $n \in X$ 当且仅当 $n + p \in X$。

证明: “$\Rightarrow$”如果 X 在结构 $\mathfrak{N}_+$ 中是可定义的，则根据量词消去，它可以被一个不含量词的 $\mathcal{L}_{\equiv}$ 中的公式定义。这样的公式都是原子公式（例如，$nv_1 + t \approx u$、$nv_1 + t < u$、$u < nv_1 + t$ 和 $nv_1 + t \equiv_k u$）的布尔组合。每个原子公式所定义的都是最终周期的，而最终周期的集合对布尔组合封闭。细节我们留作习题。 □

推论 8.7. 乘法函数的图像 $\{\langle m,n,p\rangle : p = m \cdot n\}$ 在结构 $\mathfrak{N}_A$ 中是不可定义的。

定理 8.13 (斯寇伦)**.** 只含乘法的结构 $(\mathbb{N}, 0, \times)$ 的理论也是可判定的。

我们给出证明梗概，细节留作习题。首先我们考虑公式 $\varphi := \exists x(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$，其中 α_i 或者是原子公式，或者是原子公式的否定。由于原子公式的形式为 $x^n \times u \approx v$，其中 u 和 v 是不含 x 的项，通过穷举 $x \approx 0$、$x \not\approx 0$、$u \approx 0$、$u \not\approx 0$ 等等，并进行化简，我们不妨假定公式 φ 中出现的项都不等于 0。

对每一个变元 z 引入变元 Z（想象成 $Z = \log_2 z$）并把原子公式 $x^n \times u \approx v$ 替换成它的“对数形式” $nX + U \approx V$。根据定理 8.11 的证明，公式 φ 的对数形式等价于一个不含量词的公式 ψ。注意：ψ 中可能有引入的谓词 $\equiv_k$、引入的常数 $\mathsf{0}$、以及引入的函数 S；但不会引入新的变元。模仿塔尔斯基引理的证明，任意公式 φ 都对应于这样的一个 ψ。特别地，任何一个闭语句 σ 都对应于一个不含自由变元的那样的 ψ。这时 ψ 中除了自然数之间的等式和不等式之外，只有同余式 $\mathsf{n} \equiv_k \mathsf{m}$ 或它的否定。但同余式说的是“$\exists Y(\mathsf{n} \approx kY + \mathsf{m})$”，将 $Y = \log y$ 代回，并还原成“指数形式”，我们有“$\exists y(2^n = y^k 2^m)$”，这是很容易判定的。所以 ψ 作为这类公式的布尔组合，也是可以判定的。