

第五讲 静态优化

樊潇彦

复旦大学经济学院

本讲主要内容

1. 经济学的数学结构与分析框架

1.1 经济理论的数学结构

1.2 数理经济的分析框架

2. 效用函数和最优解的存在性与性质定理

2.1 效用函数

2.2 最优解

3. 解条件定理

3.1 无约束最优化

3.2 有等式约束的最优化

3.3 有不等式约束的最优化

4. 比较静态分析 (COMPARATIVE STATIC ANALYSIS)

4.1 解函数CSA: 隐函数定理

4.2 价值函数CSA: 包络定理

5. 习题

经济理论的数学结构

- ▶ 蒋中一、K.温赖特（2006）：

根据我们的研究目的，选择与我们研究问题相关的基本因素和基本关系，然后把我们的研究集中于这些因素和关系上，这种精心简化的分析结构被称作经济理论。

- ▶ A.迪克西特（2013）：

经济学已经被定义为最优地利用稀缺资源的研究，即在约束条件下最大化的研究。……家庭的消费和劳动供给，企业的生产和政府的政策。

例1：比较优势原理

给定两个国家的劳动者生产1单位两种商品的劳动时间（单位小时）

a_i^c , $c \in \{E, P\}$, $i \in \{c, w\}$, 以及两个国家的总劳动时间:

	布 (cloth)	酒 (wine)	总劳动时间
英国 (England)	100	120	220
葡萄牙 (Portugal)	100	80	180

不难发现:

- ▶ **绝对优势**: 葡萄牙生产葡萄酒的时间成本低于英国, 因此在葡萄酒行业中具有绝对优势;

$$a_w^P < a_w^E$$

- ▶ **比较优势**: 英国生产1单位酒的机会成本是1.2单位的布, 而葡萄牙生产1单位酒的机会成本只有0.8单位的布, 因此葡萄牙具有生产酒、英国具有生产布的比较优势。

$$\frac{a_w^E}{a_c^E} = OC_{w/c}^E > OC_{w/c}^P = \frac{a_w^P}{a_c^P} \Leftrightarrow \frac{a_c^P}{a_c^E} > \frac{a_w^P}{a_w^E}$$

例1：比较优势原理

在自给自足的情况下，两个国家两种商品的产量和消费量都为1单位，两种商品的世界总产量都为2单位。

如果两个国家开始进行国际贸易，并各自生产和出口自己具有比较优势的商品，则产量变为：

	布 (cloth)	酒 (wine)
英国 (England)	220/100=2.2	0
葡萄牙 (Portugal)	0	180/80=2.25

与国际贸易前相比，两种商品的世界总产量都提高了，此时1单位酒相当于2.25/2.2单位布，这个相对价格介于国际贸易前英国和葡萄牙生产酒的机会成本之间：

$$OC_{w/c}^E > OC_{w/c}^W > OC_{w/c}^P$$

例1：比较优势原理

► 总结：

1. 通过国际贸易，每个国家都可以专门从事自己具有比较优势的行业的生产和出口、同时进口自己不具有比较优势的行业的产品，世界的总产出和每个国家的消费都会提升，福利都会改进；
2. 国际贸易将改变每个国家商品的相对价格，使得全世界商品的价格和工资水平趋于一致。

► 大卫·李嘉图（1817）：《政治经济学及赋税原理》

在商业完全自由的制度下，各国都必然把它的资本和劳动用在最有利于本国的用途上。这种个体利益的追求很好地和整体的普遍幸福结合在一起。由于鼓励勤勉、奖励智巧、并最有效地利用自然所赋予的各种特殊力量，它使劳动得到最有效和最经济的分配；同时，由于增加生产总额，它使人们都得到好处，并以利害关系和相互交往的共同纽带把文明世界各民族结合成一个统一的社会。正是比较优势原理，决定葡萄酒应该在法国和葡萄牙酿制，谷物应在美国和波兰种植，金属制品及其他商品则应在英国制造。

例2：从生产计划到诺贝尔奖

► 经济问题：

原料 (吨) 产品	甲	乙	每周资源总量
A	1	1	150
B	2	3	240
C	3	2	300
收益 (千元/吨)	24	18	/

► 数学描述：

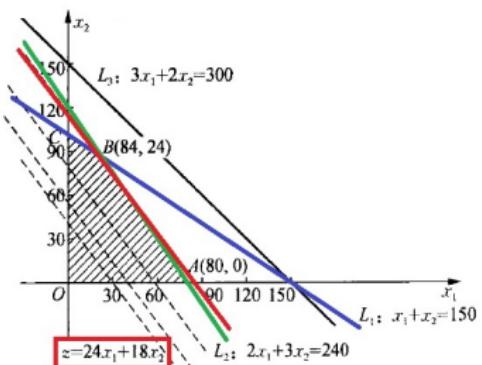
$$\max \pi = 24x_1 + 18x_2$$

$$s.t. x_1 + x_2 \leq 150$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 240$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 300$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



例2：从生产计划到诺贝尔奖

- ▶ 20世纪30年代末，前苏联数学家康托洛维奇（L. Kantorovich）首先提出了用线性规划模型解决有限资源最优分配问题；
- ▶ 1947年美国人丹齐格提出线性规划的单纯形算法；
- ▶ 20世纪50年代美国经济学家库普曼斯（T.J. Koopmans）成功地将它用于分析资源配置与价格体系的关系；
- ▶ 1975年康托洛维奇和库普曼斯分享诺贝尔经济学奖。

例3：古诺竞争（COURNOT COMPETITION）

► 市场环境：

假定在一个双寡头垄断 ($i = 1, 2$) 的市场中，总需求函数为 $p = a - q$ ，总产量 $q = q_1 + q_2$ 。每个厂商的成本函数为 $c_i = cq_i$ 。参数 $0 < c < a$ 。

► 博弈问题：

厂商 i 的最优化问题为：

$$\max_{q_i} \pi_i = pq_i - c_i = (a - q_i - q_j - c) q_i$$

最优决策的一阶条件 (FOC) 为：

$$q_i = a - q_i - q_j - c$$

► 求解得到纳什均衡：

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3}$$

例4：贝特兰德竞争 (BERTRAND COMPETITION)

► 市场环境：

假定在一个双寡头垄断 ($i = 1, 2$) 的市场中，单个厂商的需求函数

$q_i = a - p_i + bp_j$, 成本函数为 $c_i = cq_i$, 参数 $0 < c < a$, $0 < b < 2$.

► 博弈问题：

厂商 i 的最优化问题为：

$$\max_{p_i} \pi_i = p_i q_i - c_i = (p_i - c)(a - p_i + bp_j)$$

最优决策的一阶条件 (FOC) 为：

$$a - p_i + bp_j = p_i - c$$

► 求解得到纳什均衡：

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a + c}{2 - b}$$

例5：点球博弈（PENALTY-KICK GAME）



Palacios-Huerta(2003, RES)根据1417个点球数据得到下面的收益矩阵：

射球方(K)/守门员(G)	向左扑 (q)	向右扑 ($1 - q$)
向左踢 (p)	(0.58, -0.58)	(0.95, -0.95)
向右踢 ($1 - p$)	(0.93, -0.93)	(0.70, -0.70)

假定射球方向左踢的概率为 p , 守门员向左扑的概率为 q , 期望收益分别为：

$$\begin{aligned} E_K^L &= 0.58q + 0.95(1 - q) & E_K^R &= 0.93q + 0.70(1 - q) \\ E_G^L &= -0.58p - 0.93(1 - p) & E_G^R &= -0.95p - 0.70(1 - p) \end{aligned}$$

当双方向左还是向右的策略无差异时, 可以得到：

$$E_K^L = E_K^R \Rightarrow q = 41.99\%, \quad E_G^L = E_G^R \Rightarrow p = 38.54\%$$

上述结论与实际数据高度吻合：

	g_L (%)	$1 - g_L$ (%)	k_L (%)	$1 - k_L$ (%)
Nash predicted frequencies	41.99	58.01	38.54	61.46
Actual frequencies	42.31	57.69	39.98	60.02

数理经济学 (MATHEMATICAL ECONOMICS)

1. 理解复杂的经济现象背后核心的经济机制和经济逻辑。
2. 把所要研究的经济问题描述为最优化问题 (optimization problem) :

$$\begin{aligned} & \underset{x \in X}{\operatorname{Max}} \quad U(x, z; \theta) \\ & \text{s.t. } G(x, z; \theta) = 0 \end{aligned}$$

其中: $Z \subseteq \mathbb{R}^M$ 为 M 维外生变量空间, $\Theta \subseteq \mathbb{R}^K$ 为 K 维参数空间, $X \subseteq \mathbb{R}^N$ 为 N 维内生变量空间。

3. 寻找最优解 $f: Z \times \Theta \rightarrow X$ 并分析其性质:

$$x^* = f(z; \theta) = \underset{x \in X}{\operatorname{argmax}} \quad F(x, z; \theta)$$

重要概念

► 外生变量vs.内生变量

- ▶ 外生变量是经济主体不可控制的外部因素所决定的变量，如降雨量、种子和化肥的价格对单个农户而言是一种“客观条件”，无法改变；
- ▶ 内生变量则是经济主体的“自主选择”，如农民会选择怎样的种植技术、会自发产生怎样的经济组织等，是经济模型分析的核心。

► 定义方程vs.行为方程

- ▶ 定义方程是表述变量关系的恒等式，如预算约束条件、GDP核算公式等；
- ▶ 行为方程表明外生变量（及参数）对内生变量的作用方式，如消费需求、要素需求等。

问题分类

► 静态vs.动态

- ▶ 静态问题的解对应 $f(z; \theta)$ 不随时间发生变化；
- ▶ 动态问题的解对应 $f(z, t; \theta)$ 则是时间 t 的函数。

► 确定性vs.不确定性

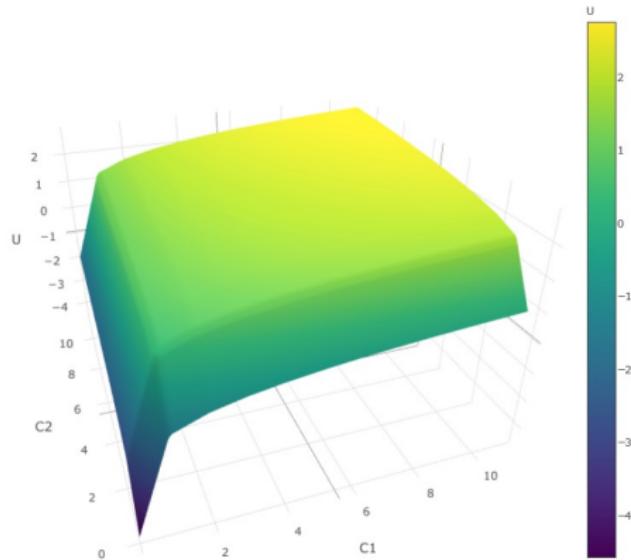
- ▶ 确定性问题：外生变量中不包括随机冲击，目标函数为 u 、 π 等。
- ▶ 不确定性问题：外生变量中包括随机冲击，目标函数为期望值，如 $E(u)$ 、 $E(\pi)$ 等。

► 非策略性vs.策略性

- ▶ 非策略性问题：每个行为人的决策不受其他行为人的影响，目标和约束函数中不包含其他行为人的决策变量，如 $\pi_i(q_i)$ 。
- ▶ 策略性问题：每个行为人的决策受到其他行为人决策的影响，目标和约束函数中包含其他行为人的决策变量，如 $\pi_i(q_i, q_j)$ 。

以消费者最优化问题为例

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} & u(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2 \\ \text{s.t.} & G(x_1, x_2) = w - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{aligned}$$



由UMP引申出的一般基本数学问题

$$\begin{aligned} \underset{x_1, x_2}{\operatorname{Max}} \quad & u(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2 \\ \text{s.t.} \quad & G(x_1, x_2) = w - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{aligned}$$

- ▶ 这里目标函数（效用函数）是对数可分可加的，约束条件函数是线性等式。一般情况下，**目标函数和约束函数应具有哪些性质？**
- ▶ 这个问题中最优解是存在的、唯一的、全局的，一般地情况下**什么条件能保证最优解的存在性、唯一性、局部（或全局）性？**
- ▶ 前面求解时我们用到了一阶条件（FOC），一般情况下**最优解的充分必要条件是怎样的？**
- ▶ 在这个例子中，解函数是连续可微的，即 $\partial x / \partial p$ 和 $\partial x / \partial w$ 存在。在什么情况下，这一性质成立？**可以做比较静态分析？**

MWG (2001): 偏好关系和效用函数的定义与命题

- ▶ (定义 1.B.1) 若偏好关系 \succsim 满足下面两个性质，则称该偏好关系 \succsim 是理性的：
 (1) 完备性：对于任意 $x, y \in X$, 我们有 $x \succsim y$, 或 $y \succsim x$, (或二者兼有，即 $x \sim y$);
 (2) 传递性：对于任意 $x, y, z \in X$, 如果 $x \succsim y$ 且 $y \succsim z$, 则有 $x \succsim z$ 。
- ▶ (定义 1.B.2) 若对于所有 $x, y \in X$, $x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$, 则函数 $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为代表偏好关系 \succsim 的一个效用函数。
- ▶ (命题 1.B.2) 只有当偏好关系 \succsim 是理性的，它才可以用一个效用函数来代表。
- ▶ (定义 3.C.1) 如果 X 上的偏好关系 \succsim 在极限下是被保持的，即对于任意一个成对序列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, 如果 $x_n \succsim y_n$ 对于所有 n 均成立，且 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 时有 $x \succsim y$, 则称该偏好关系 \succsim 是连续的。
- ▶ (命题 1.B.2) 假定 X 上的理性偏好关系 \succsim 是连续的，则存在一个代表 \succsim 的连续效用函数。

MWG (2001): 偏好、效用和约束函数的更多假设

- ▶ 偏好的单调性性质意味着效用函数递增。
- ▶ 偏好的凸性性质意味着效用函数拟凹。
- ▶ 理性偏好的连续性只保证存在连续的效用函数，不保证效用函数的可微性，比如里昂惕夫偏好和效用函数都是连续的，但在拐点处不可微。一般我们假定效用函数二阶可微，且边际效用为正 $u' > 0$ 、边际效用递减 $u'' < 0$ 。
- ▶ 考虑到人们对风险的厌恶和规避，经济学分析中常用的效用函数有常相对风险规避（CRRA）和常绝对风险规避（CARA）两种形式：

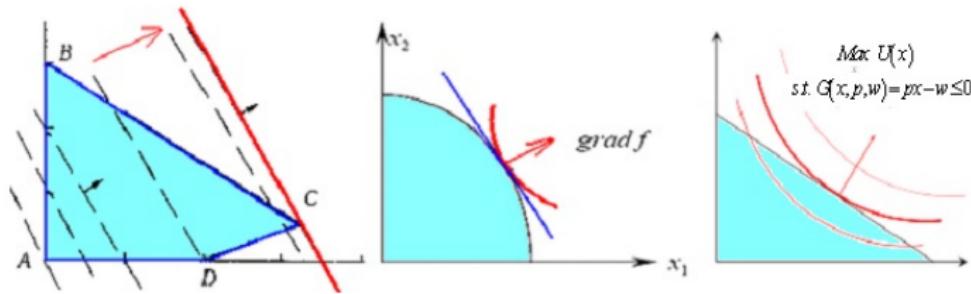
$$CRRA: \quad u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (\gamma > 0, \gamma \neq 1); \quad u(c) = \ln c, \quad (\gamma = 1)$$

$$CARA: \quad U(c) = \frac{-e^{-\alpha c}}{\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

- ▶ 一般假定约束函数 G 是连续、二阶可微和拟凸的。

最优解的存在性

- Weierstrass定理（或极值定理，Extreme value theorem）：**定义在非空紧集¹ X 上的连续实值函数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 有极大（和极小）值。**



- 以消费问题为例，MWG (2001) 定理 3.D.1：
若 $p > 0$ ，且 u 连续，则UMP问题有解。

[1]: 度量空间中的有界闭集为紧集。闭集 X 中的每个极限点 $x \in X$ 。

最优解的唯一性

- MWG (2001) 定理 3.D.2:

当 x^* 存在时，如果偏好 \succsim 是凸的（效用函数 u 拟凹），则 x^* 是一个凸集；如果偏好是严格凸的（效用函数严格拟凹），则 x^* 唯一。

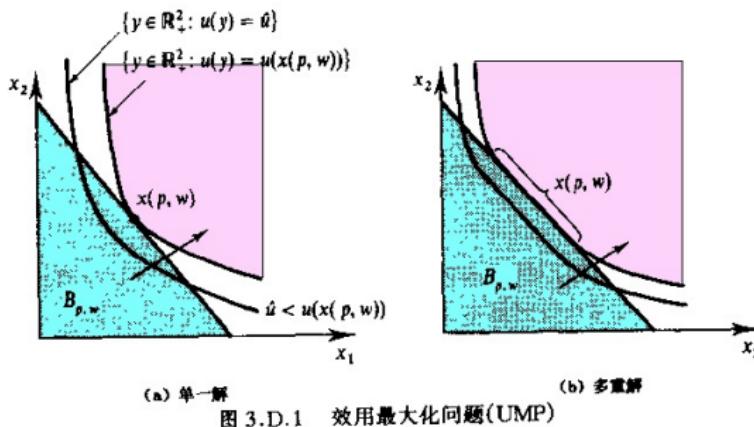


图 3.D.1 效用最大化问题(UMP)

解函数的性质：连续性和可微性

► 最大化定理 (Theorem of the Maximum):

当目标函数 $u(x; \theta)$ 连续，约束条件 $G(x; \theta) = 0$ 所隐含的约束对应 $g(\theta) : \Theta \rightarrow X$ 为紧值、连续对应时，最大值点对应 $x^*(\theta) : \Theta \rightarrow X$ 存在且上半连续，为单值对应时最大值函数 $x^*(\theta) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ 和相应的价值函数 $u(x^*(\theta); \theta) = u^*(\theta) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ 都连续。

► 为方便比较静态分析，一般假定 $x^*(\theta)$ 和 $u(x; \theta)$ 可微。

无约束最优化: $x \in \mathbb{R}$

先从最简单的决策变量 x 为一维向量的情况开始。假定 $u(x)$ 二阶可微, 且 $u' > 0$, $u'' < 0$ 。求解 $\underset{x}{\text{Max}} u(x)$ 问题, 我们对 $u(x)$ 在 x^* 附近做二阶泰勒展开:

$$u(x) = u(x^*) + u'(x^*)(x - x^*) + \frac{u''(x^*)(x - x^*)^2}{2} + o((x - x^*)^2)$$

x^* 为最优解, 即 $u(x) \leq u(x^*)$, 且为内点解的必要条件为:

- ▶ 一阶条件 (FOC): $u'(x^*) = 0$
- ▶ 二阶条件 (SOC): $u''(x^*) \leq 0$ 。根据我们对效用函数所做的拟凹性假定, 不难验证二阶条件满足。

无约束最优化: $x \in \mathbb{R}^N$

当 x 为 N 维向量时, 同样假定 $u(x)$ 二阶可微, 记 (其中 $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$, $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $u_{ii} \leq 0$):

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad D^2 u = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1} & \cdots & u_{NN} \end{pmatrix}$$

x^* 为内点最优解的必要条件为:

- ▶ 一阶条件 (FOC): $\nabla u(x^*) = 0$
- ▶ 二阶条件 (SOC): 海赛矩阵 $D^2 u(x^*)$ 半负定, 即对于任意 N 维向量 $h \in \mathbb{R}^N$ 有 $h^T D^2 u(x^*) h \leq 0$ 。根据我们对效用函数所做的拟凹性假定, 可以验证二阶条件满足。

有等式约束的最优化

假定共有 M 个等式约束，构成约束集 $G = \{g^m(x) = 0, x \in \mathbb{R}^N, m = 1, 2 \dots M\}$ ，函数 g^m 二次可微。此时UMP问题可表述为：

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\operatorname{Max}} \quad u(x) \\ & \text{s.t. } g^1(x) = 0 \\ & \quad \vdots \\ & \quad g^M(x) = 0 \end{aligned}$$

写出拉格朗日函数 $\underset{x}{\operatorname{Max}} L(x) = u(x) - \sum_m \lambda_m g^m(x)$ ，转化为无约束的最优化问题， x^* 为内点最优解的必要条件为：

- ▶ 一阶条件： $\nabla L(x^*) = 0 \Leftrightarrow \nabla u(x^*) = \sum_m \lambda_m \nabla g^m(x^*)$ ，即目标函数的梯度是约束函数梯度的线性组合；
- ▶ 二阶条件：加边海赛矩阵 $D_x^2 L(x^*, \lambda)$ 半负定。根据 MWG (2001) 定理M.D.3，效用函数的拟凹性质保证二阶条件满足。

有不等式约束最优化问题的描述

$$\underset{x}{\operatorname{Max}} u(x)$$

$$\text{s.t. } g^1(x) = 0$$

⋮

$$g^M(x) = 0$$

$$h^1(x) \leq 0$$

⋮

$$h^K(x) \leq 0$$

► 假定条件:

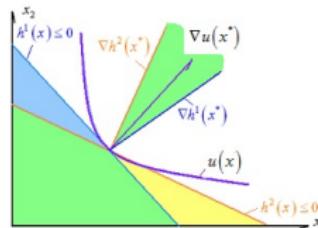
- 目标函数和约束函数 u, g^m, h^k 都定义在 \mathbb{R}^N 上;
- 内生变量个数大于约束方程数:
 $N > M + K$;
- $M + K$ 个向量 $\nabla g^m(x), \nabla h^k(x)$ 线性无关。

- 注意: 根据定义“下等高集为凸集的函数是拟凸函数”, 为保证约束集合 $\{g^m(x) = 0, h^k(x) \leq 0 : m = 1, 2 \dots M; k = 1, 2 \dots K\}$ 是凸集, 不等式约束函数 h^k 应该是拟凸函数。如果 \tilde{h}^k 是拟凹函数, 则不等式约束应写为 $\tilde{h}^k \geq 0$ 。

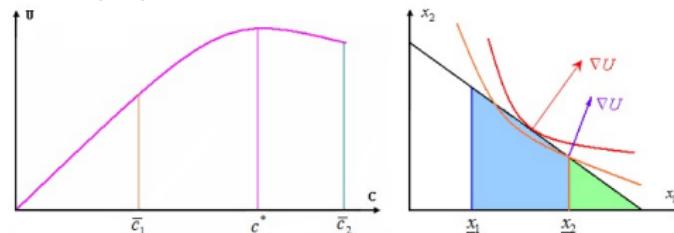
最优解条件

库恩-塔克定理 (Kuhn-Tucker conditions)：如果 x^* 是上述最优化问题的解，则下述条件成立（记 $\lambda_m \in \mathbb{R}$ 和 $\gamma_k \in R^+$ 为等式和不等式约束的拉格朗日乘子）：

- ▶ 拉格朗日条件： $\nabla u(x^*) = \sum_m \lambda_m \nabla g^m(x^*) + \sum_k \gamma_k \nabla h^k(x^*)$



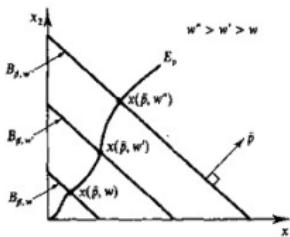
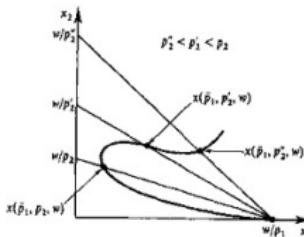
- ▶ 互补松弛条件：对所有 $k = 1, 2 \dots K$, $h^k(x^*) \neq 0$ 时 $\gamma_k = 0$ 且 $h^k(x^*) = 0$ 时 $\gamma_k > 0$, 最终使等式 $\gamma_k h^k(x^*) = 0$ 成立。



比较静态分析示例

以消费者问题为例, 给定外生变量 (p, w) 和参数 θ , 消费者的选择构成需求对应 $x(p, w; \theta)$, 单值对应即为需求函数。假定 $x(p, w; \theta)$ 连续可微, 则**财富效应**和**价格效应**分别为:

$$D_w x = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial w} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial w} \end{pmatrix} \quad D_p x = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial p_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial p_N} \end{pmatrix}$$

图 2.E.1 价格 \bar{p} 上的财富扩展路径图 2.E.4 商品 2 在 (\bar{p}_1, p_2', w) 上为劣等品时的提供曲线

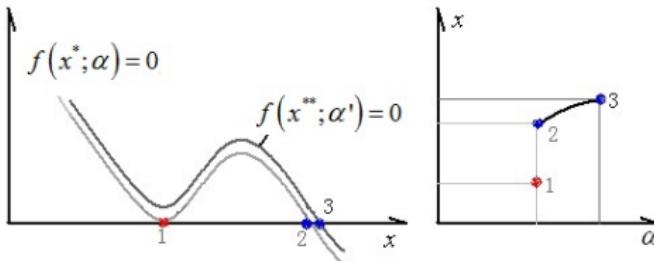
隐函数定理

一般情况下，我们无法写出 x^* 的表达式（也称没有解析解或显示解），但可以用**隐函数定理 (Implicit function theorem)** 分析比较静态问题。

记 $\alpha = (z, \theta)$ ，达到最优时 N 维方程组 $f^i(x^*, \alpha) = 0, (i = 1, 2 \dots N)$ 成立，即 $f(x^*, \alpha) = 0$ 。两边对 α 求偏导可得 $D_x f(x^*, \alpha) \cdot D_\alpha x^* + D_\alpha f(x^*, \alpha) = 0$ 。如果雅克比行列式：

$$|J|_{x=x^*} \equiv |D_x f(x^*, \alpha)| = \begin{vmatrix} f_1^1 & \cdots & f_N^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^N & \cdots & f_N^N \end{vmatrix}_{x=x^*} \neq 0$$

即 $D_x f(x^*, \alpha)$ 可逆，则有： $D_\alpha x^* = -[D_x f(x^*, \alpha)]^{-1} D_\alpha f(x^*, \alpha)$



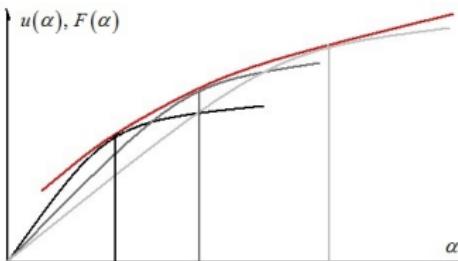
包络定理 (ENVELOPE THEOREM)

- 对于无约束最优化问题, 要分析参数变动对最优情况下价值函数 $u(x^*; \alpha)$ 的影响, 对参数求偏导有:

$$\frac{\partial u(x^*; \alpha)}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)_{x=x^*} = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)_{x=x^*}$$

- 对于一般的、有约束的最优化问题, 包络定理结论如下:

$$\frac{\partial F(x^*; \alpha)}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \sum_m \lambda_m \frac{\partial g^m}{\partial \alpha} - \sum_k \gamma_k \frac{\partial h^k}{\partial \alpha} \right)_{x=x^*}$$



习题1：迪克西特（2013，P19）

假定一个国家要在生产黄油和大炮之间做出取舍，最优化问题如下：

$$\begin{aligned} \text{Max } U &= ax + by \\ \text{s.t. } x^2 + y^2 &= L = 100 \end{aligned}$$

1. 写出拉格朗日函数和一阶条件；
2. 求解最优产出 x^* , y^* ；
3. 对参数 a, b, L 做比较静态分析。

习题2：瓦里安（2002，P42）

假定生产函数为 $f(x) = 20x - x^2$ ，产品价格正规化为1，投入品 x 的价格为 w ， $x, w > 0$ 。

1. 写出厂商最优化问题。
2. 如果 $x > 0$ ，利润最大化的一阶条件是什么？
3. 写出要素需求函数 $x(w)$ 的表达式。
4. 分析要素需求的比较静态问题， $\partial x(w) / \partial w = ?$
5. 写出最大化利润的表达式 $\pi^* = \pi(w) = ?$
6. 投入品价格变动对利润产生怎样的影响？

习题3：消费和垄断竞争均衡

- 假定消费者的效用函数为 $U = M^\delta F^{1-\delta}$, 其中 F 和 M 分别为食品和工业品的消费量; 工业品中又包括 N 种商品 $M = \left(\sum_{i=1}^N q_i^{(\varepsilon-1)/\varepsilon}\right)^{\varepsilon/(\varepsilon-1)}$, ε 为两种商品之间的替代弹性; 食品价格 $p_F = 1$, 工业品价格总指数 $P = \left(\sum_{i=1}^N p_i^{1-\varepsilon}\right)^{1/(1-\varepsilon)}$ 。写出消费者对第 i 种工业品的需求函数 q_i^d 。
- 给定上述产品需求, 假定厂商的总成本 $TC = wl = w(\alpha + \beta q)$, 其中 w 为外生给定的工资水平, l 为生产 q 单位商品所需的工人数。请问在一个垄断竞争的、厂商可自由进出的市场中, 短期内厂商将把第 i 种工业品的价格 p_i 定为多少? 产量 q_i^s 为多少? 如果从事工业生产的总人数为 L , 长期来看市场上的厂家数 N 是多少?

习题4：资产组合

1. 假定有债券和股票两种风险资产 D, E , 期望收益为 r_D, r_E 、标准差和协方差为 $\sigma_D, \sigma_E, Cov(D, E)$, 给定风险资产组合的期望收益率 μ , 求解最小方差资产组合(The Minimum Variance Portfolio)问题:

$$\underset{w_D, w_E}{\text{Min}} \quad \sigma_p^2 = w_D^2 \sigma_D^2 + w_E^2 \sigma_E^2 + 2w_D w_E Cov(r_D, r_E)$$

$$\text{s.t. } w_D + w_E = 1$$

$$\mu = w_D r_D + w_E r_E$$

2. 当有 n 种资产时, 记 Σ 为 n 阶协方差矩阵, 权重 \mathbf{w} 和收益率 \mathbf{r} 分别为 n 维列向量, $\mathbf{1}$ 为单位列向量。求解一般化的最优风险资产组合问题:

$$\underset{\mathbf{w}}{\text{Min}} \left\{ \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \mathbf{1} = 1, \mathbf{w} \mathbf{r} = \mu \right\}$$

参考资料

1. A.马斯-科莱尔、M.D.温斯顿、J.R.格林著，2001:《微观经济学》，刘文忻、李绍荣主译，中国社会科学出版社
2. 蒋中一、K.温赖特著，2006:《数理经济学的基本方法（第4版）》，刘学、顾佳峰译，刘学校，北京大学出版社
3. A.K.迪克西特著，2006:《经济理论中的最优化方法》，冯曲、吴桂英译，上海人民出版社