

教案：闭区间上 Riemann 积分的应用理论

课程：《数学分析（I）》（一年制，面对力学类等）

1. 知识点（教学内容及其目标概述）

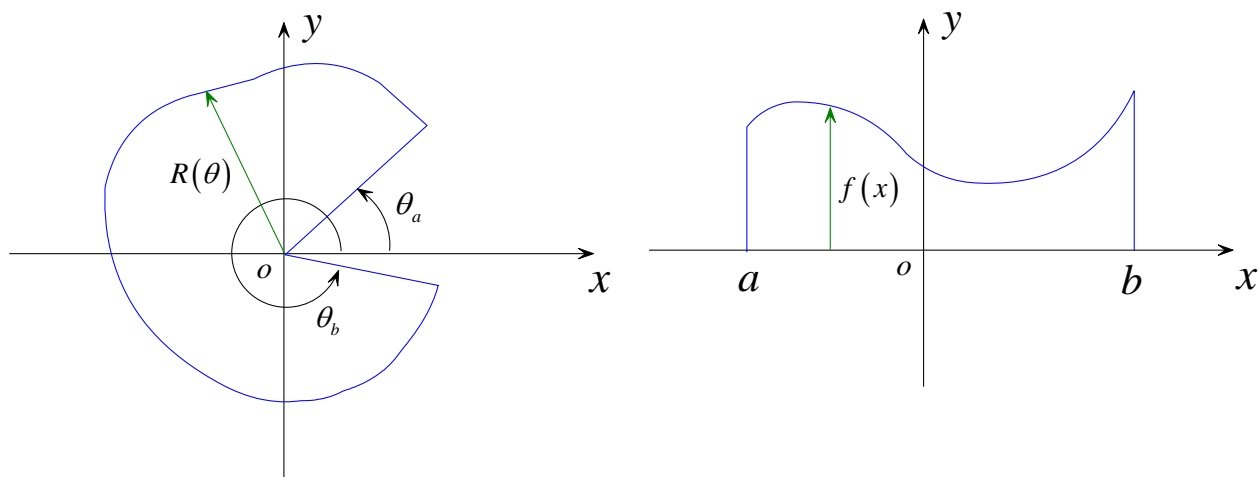
本知识点：闭区间上 Riemann 积分的应用理论。主要内容分为：①数学实验可确认实验结论为“真理”的事例及其理论依据。②数学实验未能确认实验结论为“真理”的事例，对此类结论必须经实践鉴别或者检验。③相关分析中的共同“数学结构”，称为数学通识。

2. 知识要素（教学内容细致目录）

本知识点，包括如下知识要素：

① 数学实验可确认实验结论为“真理”的事例及其理论依据

研究事例 1：平面曲边扇形以及曲边梯形的面积计算



面对平面曲边扇形的面积计算，我们开展数学实验，包括：数学建模→数学分析→指导实践这三个基本过程。

1. 数学建模：按“分割→选取→求和→求极限”的过程，我们得到曲面扇形面积的一个计算方案：

$$S = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{1}{2} \cdot R^2(\theta) d\theta := \lim_{|P| \rightarrow 0} \sigma \left(\frac{1}{2} \cdot R^2(\theta), P, \xi \right) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \cdot R^2(\xi_i) \cdot \Delta \theta_i$$

此处，求极限过程已涉及 Riemann 积分的最为初步的分析理论

2. 数学分析：致力于基于数学逻辑，研究上述面积计算方案的合理性。考虑到：对应分割 P ，每子块的真实面积 $S_{real,i}$ 具有如下估计：

$$\left(\inf_{[\theta_{i-1}, \theta_i]} \frac{1}{2} \cdot R^2(\theta) \right) \cdot \Delta \theta_i \leq S_{real,i} \leq \left(\sup_{[\theta_{i-1}, \theta_i]} \frac{1}{2} \cdot R^2(\theta) \right) \cdot \Delta \theta_i, \quad \forall 1 \leq i \leq N$$

$$\text{则有: } L\left(\frac{1}{2} \cdot R^2(\theta), P\right) \leq \sum_{i=1}^N S_{real,i} = S_{real} \leq U\left(\frac{1}{2} \cdot R^2(\theta), P\right)$$

按 Riemann 积分的相关理论, 有: $R(\theta) \in R[\theta_a, \theta_b] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot R(\theta)^2 \in R[\theta_a, \theta_b]$, 由此:

$$\frac{1}{2} \cdot R^2(\theta) \in R[\theta_a, \theta_b] \Leftrightarrow \exists \lim_{|P| \rightarrow 0} L\left(\frac{1}{2} \cdot R^2(\theta), P\right) = \lim_{|P| \rightarrow 0} U\left(\frac{1}{2} \cdot R^2(\theta), P\right) =: \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{1}{2} \cdot R^2(\theta) d\theta$$

按夹逼性, 则得平面曲边扇形面积计算的确定性结论:

$$\text{当 } R(\theta) \in R[\theta_a, \theta_b], \text{ 则有: } S_{real} = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \frac{1}{2} \cdot R^2(\theta) d\theta.$$

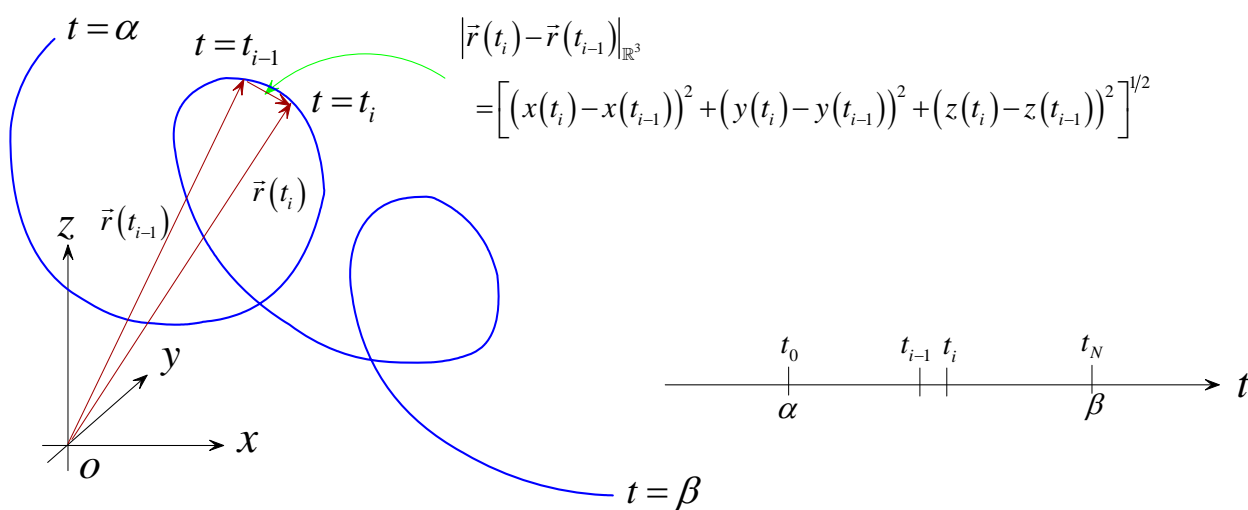
同理, 我们可以得平面曲边梯形面积计算的确定性结论:

$$\text{当 } f(x) \in R[a, b], \text{ 则有: } S_{real} = \int_a^b f(x) dx.$$

需指出, 上述所谓的“确定性结论”的获得, 实际基于共同的数学结构: 真实值可由 Darboux 小和和 Darboux 大和控制。当 Riemann 可积时, Darboux 小和和大和具有相同的极限值, 即为 Riemann 积分值; 故按夹逼性, 真实值必为 Riemann 积分值*。

② 数学实验未能确认实验结论为“真理”的事例——对此类结论必需经实践鉴别或者检验

研究事例 1: \mathbb{R}^3 中曲线弧长的计算



对此进行数学实验:

1. 数学建模:

* 张筑生著《数学分析新讲》的第一册, 对此有所叙述。

考虑到 \mathbb{R}^3 中曲线的参数刻画

$$\vec{r}(t): [\alpha, \beta] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

为此，我们在参数域 $[\alpha, \beta]$ 上进行分割 $P: \alpha = t_0 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_N = \beta$ ，由此获得在实际曲线上的分割，如上图所示。

对于分割点所截取的曲线弧长，我们仍无实际的计算方法，故考虑利用直线段进行“近似”： $\Delta L_i := |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|_{\mathbb{R}^3} = \left[(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2 \right]^{1/2}$ 。

进一步，考虑部分和：

$$\sum_{i=1}^N \Delta L_i = \sum_{i=1}^N \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\zeta_i)} \cdot \Delta t_i,$$

上式获得，利用了 Lagrange 中值定理，故需要引入条件：

$$\begin{cases} x(t) \in C[\alpha, \beta], \exists \dot{x}(t) \in \mathbb{R}, \forall t \in (\alpha, \beta) \\ y(t) \in C[\alpha, \beta], \exists \dot{y}(t) \in \mathbb{R}, \forall t \in (\alpha, \beta), \text{ 可记为 } \vec{r}(t) \in C[\alpha, \beta], \exists \dot{\vec{r}}(t) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in (\alpha, \beta) \\ z(t) \in C[\alpha, \beta], \exists \dot{z}(t) \in \mathbb{R}, \forall t \in (\alpha, \beta) \end{cases}$$

以下考虑极限过程。按上述分析，在每一子区间上， $\xi_i, \eta_i, \zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ 取值各不相同，这同原来的部分和选取有所不同。但我们仍可考虑极限：

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \Delta L_i = \lim_{|P| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^N \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\zeta_i)} \cdot \Delta t_i \right], \quad \forall \xi_i, \eta_i, \zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

可按 Cauchy 叙述，Heine 叙述以及 Cauchy 收敛原理认识，因为原有的分析都适用现有情形。

结合上述部分和的实际结构，我们要求存在极限

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\vec{r}}(t)|_{\mathbb{R}^3} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \in \mathbb{R}$$

故需要进一步引入条件： $\vec{r}(t) \in C[\alpha, \beta], \exists \dot{\vec{r}}(t) \in R[\alpha, \beta]$ ，亦即各分量在 $[\alpha, \beta]$ 存在一阶导函数且 Riemann 可积。现我们猜测：

Claim: 下述极限存在

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^N \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\zeta_i)} \cdot \Delta t_i \right] = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$$

分析：

估计

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^N \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\zeta_i)} \cdot \Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \right| \\ & \leq \left| \sum_{i=1}^N \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\zeta_i)} \cdot \Delta t_i - \sum_{i=1}^N \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i) + \dot{z}^2(\tau_i)} \cdot \Delta t_i \right| \\ & \quad + \left| \sum_{i=1}^N \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i) + \dot{z}^2(\tau_i)} \cdot \Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \right| \end{aligned}$$

此处 $\forall \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$

对于 RHS 的第 2 项，由于 $\exists \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \in \mathbb{R}$ ，则有估计：

对 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta_{\varepsilon} > 0$ ，成立

$$\left| \sum_{i=1}^N \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i) + \dot{z}^2(\tau_i)} \cdot \Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \right| < \varepsilon, \quad \forall |P| < \delta_{\varepsilon}$$

对于 RHS 的第 1 项的估计，考虑引入如下结构。

Lemma:

$$\left| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} - \sqrt{E^2 + F^2 + G^2} \right| \leq |A - E| + |B - F| + |C - G|$$

分析：

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} - \sqrt{E^2 + F^2 + G^2} \right| = \frac{|A^2 + B^2 + C^2 - (E^2 + F^2 + G^2)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \sqrt{E^2 + F^2 + G^2}} \\ & \leq \frac{|A + E|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \sqrt{E^2 + F^2 + G^2}} \cdot |A - E| + \dots \\ & \leq |A - E| + \dots \end{aligned}$$

故对于 RHS 的第 1 项的有估计：

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^N \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\zeta_i)} \cdot \Delta t_i - \sum_{i=1}^N \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i) + \dot{z}^2(\tau_i)} \cdot \Delta t_i \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^N \left| \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\zeta_i)} - \sqrt{\dot{x}^2(\tau_i) + \dot{y}^2(\tau_i) + \dot{z}^2(\tau_i)} \right| \cdot \Delta t_i \\ & \leq \sum_{i=1}^N \left[|x(\xi_i) - x(\tau_i)| + |y(\eta_i) - y(\tau_i)| + |z(\zeta_i) - z(\tau_i)| \right] \cdot \Delta t_i \\ & = \sum_{i=1}^N |x(\xi_i) - x(\tau_i)| \cdot \Delta t_i + \sum_{i=1}^N |y(\eta_i) - y(\tau_i)| \cdot \Delta t_i + \sum_{i=1}^N |z(\zeta_i) - z(\tau_i)| \cdot \Delta t_i \\ & \leq \omega(x(t), P) + \omega(y(t), P) + \omega(z(t), P) \end{aligned}$$

上述 $\omega(x(t), P)$ 表示 $x(t)$ 振幅和。按 Riemann 积分有关分析理论，

$$x(t) \in R[\alpha, \beta] \Leftrightarrow \lim_{|P| \rightarrow 0} \omega(x(t), P) = 0$$

至此获证。

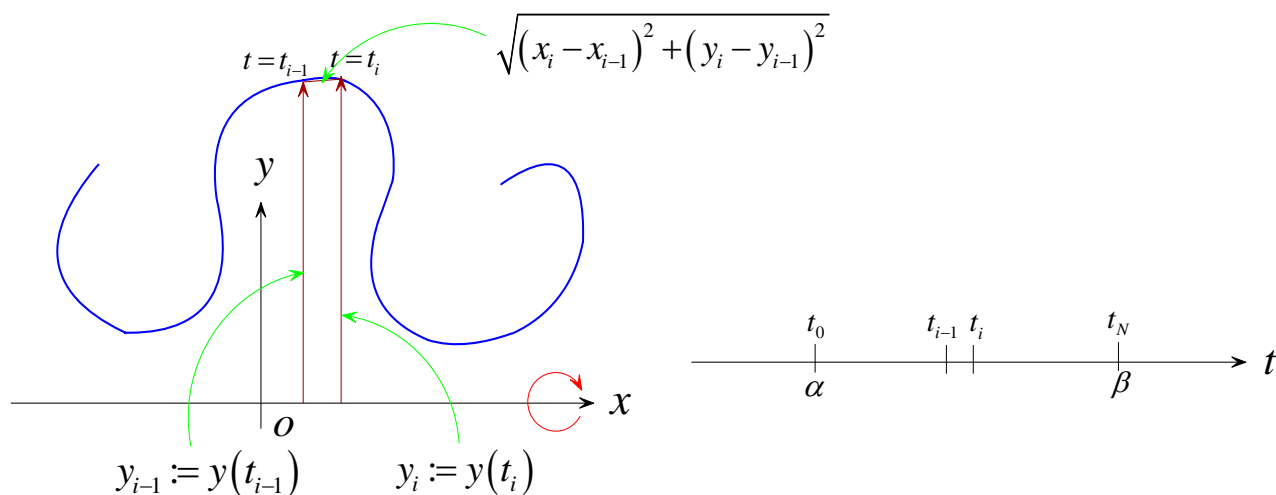
综上所述，我们数学实验的结论为：

当有 $\vec{r}(t) \in C[\alpha, \beta]$, $\exists \dot{\vec{r}}(t) \in R[\alpha, \beta]$, 则有：

$$\exists \lim_{|P| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^N \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\zeta_i)} \cdot \Delta t_i \right] = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \in \mathbb{R}$$

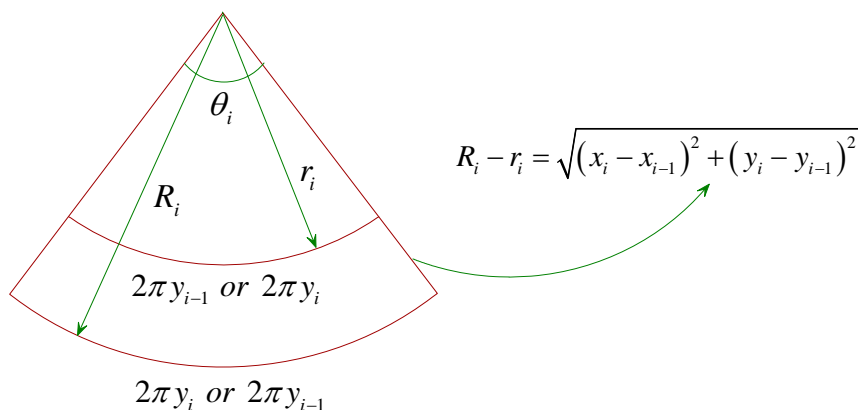
亦即通过“折线逼近”的方式给出曲线弧长的上述计算方案。需指出，由于没有真实弧长被相关 Darboux 小和和大和控制的估计，故上述数学实验的结论不能直接确定结论为“真理”，对此结论必须经实践检验。然而，经实践，上述对曲线弧长的计算方案正确。

研究事例 2：旋成体侧面积的计算



如上图所示，将曲线绕 x 轴旋转一圈可形成旋成体，现需给出其侧面积计算方案。对此，我们开展数学实验。针对旋成体局部侧面积的近似方法不同，我们可有如下两种方案。

方案 1：“旋成体局部侧面积用圆台侧面积进行近似”



局部圆台侧面积近似的几何关系如上图所示，可得：

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{2} \cdot (R_i^2 - r_i^2) \cdot \theta_i = \frac{1}{2} \cdot (R_i + r_i) \cdot (R_i - r_i) \cdot \theta_i = \frac{1}{2} \cdot 2\pi(y_{i-1} + y_i) \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ &= \pi(y_{i-1} + y_i) \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \end{aligned}$$

利用 Lagrange 中值定理，

$$\begin{aligned} x_i - x_{i-1} &= \dot{x}(\xi_i) \cdot \Delta t_i & y_{i-1} &= y(\zeta_i) + \dot{y}(\alpha_i) \cdot (t_{i-1} - \zeta_i), \quad \alpha_i \in (t_{i-1}, \zeta_i) \\ y_i - y_{i-1} &= \dot{y}(\eta_i) \cdot \Delta t_i & y_i &= y(\zeta_i) + \dot{y}(\beta_i) \cdot (t_i - \zeta_i), \quad \beta_i \in (\zeta_i, t_i) \end{aligned}$$

此处 $\forall \zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ 。

$$\begin{aligned} S_i &= \pi(y_{i-1} + y_i) \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ &= 2\pi \cdot y(\zeta_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i + \pi \cdot \dot{y}(\alpha_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i \cdot (t_{i-1} - \zeta_i) \\ &\quad + \pi \cdot \dot{y}(\beta_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i \cdot (t_i - \zeta_i) \end{aligned}$$

籍此，我们易得估计：

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^N S_i - \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\zeta_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left| \pi \cdot \dot{y}(\alpha_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i \cdot (t_{i-1} - \zeta_i) \right| + \sum_{i=1}^N \left| \pi \cdot \dot{y}(\beta_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i \cdot (t_i - \zeta_i) \right| \\ &\leq 2\pi \cdot \sup_{[\alpha, \beta]} |\dot{y}(t)| \cdot \left(\sup_{[\alpha, \beta]} |\dot{x}(t)| + \sup_{[\alpha, \beta]} |\dot{y}(t)| \right) \cdot (\beta - \alpha) \cdot |P| \end{aligned}$$

对于上述分析，我们要求： $\vec{r}(t) \in C[\alpha, \beta]$ ， $\exists \dot{\vec{r}}(t) \in R[\alpha, \beta]$ 。

进一步，考虑估计：

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\zeta_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi \cdot y(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\zeta_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i - \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\zeta_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\zeta_i) + \dot{y}^2(\zeta_i)} \cdot \Delta t_i \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\zeta_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\zeta_i) + \dot{y}^2(\zeta_i)} \cdot \Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi \cdot y(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \right| \end{aligned}$$

对于 RHS 的第 2 项，由于 $\exists \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi \cdot y(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \in \mathbb{R}$ ，则有估计：

对 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta_{\varepsilon} > 0$ ，成立

$$\left| \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\zeta_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\zeta_i) + \dot{y}^2(\zeta_i)} \cdot \Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi \cdot y(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \right| < \varepsilon, \quad \forall |P| < \delta_{\varepsilon}$$

对于 RHS 的第 1 项，考虑上述 Lemma，有：

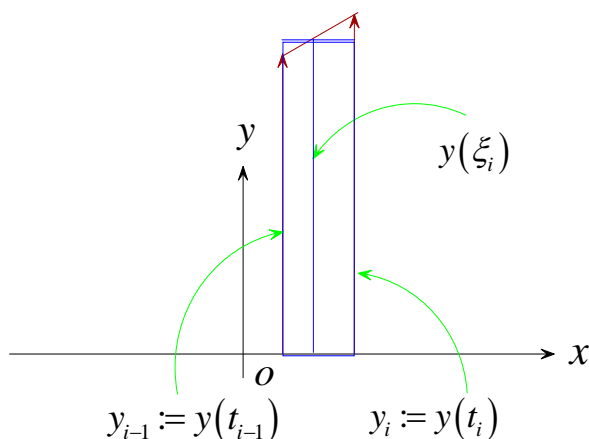
$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\zeta_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i - \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\zeta_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\zeta_i) + \dot{y}^2(\zeta_i)} \cdot \Delta t_i \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^N |2\pi \cdot y(\zeta_i)| \cdot \left| \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i)} - \sqrt{\dot{x}^2(\zeta_i) + \dot{y}^2(\zeta_i)} \right| \cdot \Delta t_i \\ & \leq \sum_{i=1}^N |2\pi \cdot y(\zeta_i)| \cdot \left[|\dot{x}(\xi_i) - \dot{x}(\zeta_i)| + |\dot{y}(\eta_i) - \dot{y}(\zeta_i)| \right] \cdot \Delta t_i \\ & \leq 2\pi \cdot \sup_{[\alpha, \beta]} |y(t)| \cdot \left[\omega(\dot{x}(t), P) + \omega(\dot{y}(t), P) \right] \end{aligned}$$

综上，我们基于圆台侧面积近似的数学实验的结论为：

当有 $\vec{r}(t) \in C[\alpha, \beta]$, $\exists \dot{\vec{r}}(t) \in R[\alpha, \beta]$, 则有：

$$\exists \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N S_i \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi \cdot y(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \in \mathbb{R}$$

方案 2：“旋成体局部侧面积用圆柱侧面积进行近似”



基于局部圆柱侧面积近似，有：

$$S_i = 2\pi \cdot y(\xi_i) \cdot |\Delta x_i| = 2\pi \cdot y(\xi_i) \cdot |x_i - x_{i-1}| = 2\pi \cdot y(\xi_i) \cdot |\dot{x}(\eta_i)| \Delta t_i$$

考虑如下估计：

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^N S_i - \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi \cdot y(t) \cdot |\dot{x}(t)| dt \right| \\ & \leq \left| \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\xi_i) \cdot |\dot{x}(\eta_i)| \Delta t_i - \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\xi_i) \cdot |\dot{x}(\xi_i)| \Delta t_i \right| + \left| \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\xi_i) \cdot |\dot{x}(\xi_i)| \Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi \cdot y(t) \cdot |\dot{x}(t)| dt \right| \end{aligned}$$

对于 RHS 的第 2 项，由于 $\exists \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi \cdot y(t) \cdot |\dot{x}(t)| dt \in \mathbb{R}$, 则有估计：

对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, 成立

$$\left| \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\xi_i) \cdot |\dot{x}(\xi_i)| \Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi \cdot y(t) \cdot |\dot{x}(t)| dt \right| < \varepsilon, \quad \forall |P| < \delta_\varepsilon$$

对于 RHS 的第 1 项, 考虑上述 Lemma, 有:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\xi_i) \cdot |\dot{x}(\eta_i)| \Delta t_i - \sum_{i=1}^N 2\pi \cdot y(\xi_i) \cdot |\dot{x}(\xi_i)| \Delta t_i \right| \\ & \leq 2\pi \cdot \sup_{[\alpha, \beta]} |y(t)| \cdot \left[\sum_{i=1}^N \left| |\dot{x}(\eta_i)| - |\dot{x}(\xi_i)| \right| \Delta t_i \right] \leq 2\pi \cdot \sup_{[\alpha, \beta]} |y(t)| \cdot \left[\sum_{i=1}^N |\dot{x}(\eta_i) - \dot{x}(\xi_i)| \Delta t_i \right] \\ & \leq 2\pi \cdot \sup_{[\alpha, \beta]} |y(t)| \cdot \omega(\dot{x}(t), P) \end{aligned}$$

综上, 我们基于圆柱侧面积近似的数学实验的结论为:

当有 $\vec{r}(t) \in C[\alpha, \beta]$, $\exists \dot{\vec{r}}(t) \in R[\alpha, \beta]$, 则有:

$$\exists \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N S_i \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi \cdot y(t) \cdot |\dot{x}(t)| dt \in \mathbb{R}$$

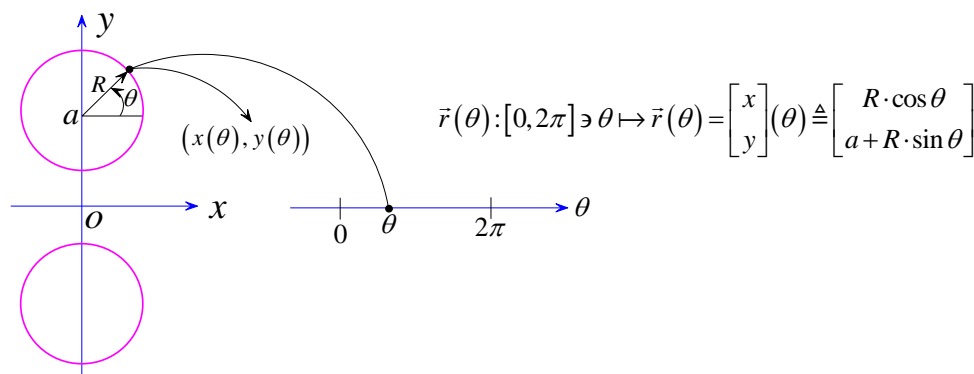
至此, 我们关于旋成体侧面积的计算提供了两种方案:

1. 按圆台侧面积近似, 有: $\int_{\alpha}^{\beta} 2\pi \cdot y(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$
2. 按圆柱侧面积近似, 有: $\int_{\alpha}^{\beta} 2\pi \cdot y(t) \cdot |\dot{x}(t)| dt$

从数学实验角度而言, 上述二者方案的数学建模、数学分析过程均符合逻辑过程。然而, 经实践鉴别, 按圆台侧面积近似所得的数学实验结论是正确的。仅需考虑圆锥侧面积就可鉴别。

应用事例:

1. “救生圈”的表面积计算:



2. 将 \mathbb{R}^3 中曲线弧长的计算公式推广到 \mathbb{R}^m 情形。

3. 考虑具有线密度的曲线质量的计算：

当有 $\vec{r}(t) \in C[\alpha, \beta]$, $\exists \dot{\vec{r}}(t) \in R[\alpha, \beta]$, 线密度分布 $\rho(t) \in R[\alpha, \beta]$, 则有：

$$\begin{aligned} & \exists \lim_{|P| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^N \rho(\theta_i) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\zeta_i)} \cdot \Delta t_i \right] \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

本结论易于向高维推广。

3. 课时安排

本知识点，共计安排 2 课时：

第 1 课时：①数学实验可确认实验结论为“真理”的事例及其理论依据。主要细致进行平面曲边扇形的面积计算。②数学实验未能确认实验结论为“真理”的事例。主要细致进行 \mathbb{R}^3 中曲线弧长的计算。

第 2 课时：②数学实验未能确认实验结论为“真理”的事例。主要细致进行旋成体侧面积的计算，按圆台侧面积近似以及圆柱侧面积近似两种方案。

4. 讲述特点及追求效果

- ✧ 基于 Riemann 积分理论，研究平面上曲边扇形，曲边梯形，有限 Euclid 空间中曲线弧长，旋成体侧面积等的计算，切实体会数学实验的基本过程“数学建模→数学分析→指导实际”。
- ✧ 基于实际事例，体会数学实验的结论，有时可直接确定实验结论为“真理”，而有时实验结论必须经实践鉴别或者检验。
- ✧ 体会数学通识的意义及具体反映形式。
- ✧ 相关处理中，我们追求一般形式，如旋成体的侧面积计算，我们基于曲线的一般参数表达形式；以此尽量追求一般化的结论。

5. 教学方式

全程脱稿板书。