1.9 在温度$T_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$和压强$p = 1p_\mathrm{n}$下，空气密度$\rho_0 = 1.29\,\mathrm{Kg\cdot m^{-3}}$．空气定压比热容$c_p = 0.996\,\mathrm{J\cdot Kg^{-1}\cdot K^{-1}}$，$\gamma = 1.41$．今有体积$V = 27\,\mathrm{m^3}$的空气，试计算：

(1) 维持体积不变，将空气由$0\,^\circ\mathrm{C}$加热到$T = 20\,^\circ\mathrm{C}$所需热量．

(2) 维持压强不变，将空气由$0\,^\circ\mathrm{C}$加热到$T = 20\,^\circ\mathrm{C}$所需热量．

(3) 若容器有裂缝，将空气由$0\,^\circ\mathrm{C}$缓慢加热到$T = 20\,^\circ\mathrm{C}$所需热量．

解：

(1) 定容过程 $Q = \int_{T_0}^{T} c_V m_0 \mathrm{d}T = \dfrac{c_p}{\gamma}\rho_0 V(T - T_0) = 4.920\times10^5\ \mathrm{J}$．

(2) 定压过程 $Q = \int_{T_0}^{T} c_p m_0 \mathrm{d}T = c_p\rho_0 V(T - T_0) = 6.937\times10^5\ \mathrm{J}$．

(3) 加热部分定压膨胀，由理想气体物态方程$\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{n}{n_0} = \dfrac{T_0}{T}$，$m = \dfrac{T_0}{T}\rho_0 V$，

$$Q = \int_{T_0}^{T} c_p m \mathrm{d}T = \int_{T_0}^{T} c_p \rho_0 V \frac{T_0}{T}\mathrm{d}T = c_p\rho_0 V T_0 \ln\frac{T}{T_0} = 6.678\times10^5\ \mathrm{J}.$$

1.10 抽成真空的小匣带有活门，打开活门让气体冲入．当压强达到外界压强p_0时，将活门关上．试证明：小匣内的空气在与外界交换热量之前，其内能U与原来在大气中的内能之差为$U - U_0 = p_0 V_0$，其中V_0是它原来在大气中的体积．若气体是理想气体，求它的温度T和体积V．

解：

将冲入小匣内的空气作为系统．过程进行很快，可视为绝热．起初冲入空气与小匣占据的总体积为$V + V_0$，过程结束后体积压缩为V，所以外界做功$W = p_0 V_0$．根据第一定律，$U - U_0 = W = p_0 V_0$．

对理想气体，$\Delta U = C_V(T - T_0) = \dfrac{nR}{\gamma - 1}(T - T_0)$，物态方程为$p_0 V_0 = nRT_0$，$p_0 V = nRT$．由此解得$T = \gamma T_0$，$V = \gamma V_0$．

1.12 满足$pV^n = C$的过程称为多方过程，其中n为多方指数．试证：在某一过程中理想气体热容量C_n若是常数，该过程一定是多方过程，其中多方指数$n = \dfrac{C_n - C_p}{C_n - C_V}$．假设气体的定压热容量和定容热容量是常数．

解：

由物态方程

$$pV = \nu RT \tag{1.1}$$

两边微分得

$$pdV + Vdp = \nu RdT \text{，} \tag{1.2}$$

两式相除得

$$\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} \text{.} \tag{1.3}$$

理想气体 $dU = C_V dT$，多方过程 $đQ = C_n dT$．根据第一定律，$C_n dT = C_V dT + pdV$，利用(1.1)和(1.3)，得到

$$\left(C_n - C_p\right)\frac{dV}{V} + \left(C_n - C_V\right)\frac{dp}{p} = 0 \text{，} \tag{1.4}$$

这里还利用了理想气体 $C_p - C_V = \nu R$．

令 $n = \dfrac{C_n - C_p}{C_n - C_V}$，(1.4)简化为

$$n\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \text{，} \tag{1.5}$$

积分即得多方过程方程．命题得证．

1.21 温度 $T_1 = 0\,^\circ\mathrm{C}$，质量 $m = 1\,\mathrm{Kg}$ 的水与温度 $T_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}$ 的恒温热源接触后，水温达到 $100\,^\circ\mathrm{C}$．试分别求水和热源的熵变和整个系统的总熵变．欲使整个系统的熵保持不变，应如何使水温从 $0\,^\circ\mathrm{C}$ 升至 $100\,^\circ\mathrm{C}$？已知水的比热容为 $c_p = 4.18\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{Kg}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$．

解：

分别用可逆等压过程和可逆等温过程联系水和热源的初终态．热源放出的热量等于水吸收的热量．

$$\Delta S_{水} = \int_{T_1}^{T_0} \frac{c_p m}{T} dT = c_p m \ln\frac{T_0}{T_1} = 1304\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\text{.}$$

$$\Delta S_{热源} = -\frac{c_p m\left(T_0 - T_1\right)}{T_0} = -c_p m\left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) = -1120\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\text{.}$$

$$\Delta S_{总} = \Delta S_{水} + \Delta S_{热源} = 184\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\text{.}$$

欲使 $\Delta S_{总} = 0$，过程必须可逆．应使水由低到高依次与 $0\,^\circ\mathrm{C}$ 至 $100\,^\circ\mathrm{C}$ 范围内温差为无穷小的一系列热源接触，使水吸热过程中始终与接触热源处于无限接近平衡态的状态．

1.23 均匀杆两端温度分别为 T_1 和 T_2．试计算达到均匀温度 $\dfrac{T_1 + T_2}{2}$ 后的熵变．

解：

均匀杆的初始温度分布为$T(x)=\dfrac{(l-x)T_1+xT_2}{l}$． $\mathrm{d}x$段的定压热容量

$\mathrm{d}C_p=\dfrac{C_p}{l}\mathrm{d}x$，

$$\Delta S=\frac{C_p}{l}\int_0^l \mathrm{d}x\int_{\frac{(l-x)T_1+xT_2}{l}}^{\frac{T_1+T_2}{2}}\frac{\mathrm{d}T}{T}=C_p\left(\ln\frac{T_1+T_2}{2}-\frac{T_2\ln T_2-T_1\ln T_1}{T_2-T_1}+1\right).$$

1.26 有两个相同的物体，热容量为常量，初始温度同为T_i．今令一致冷机在此两物体间工作，使其中一个物体温度降低到T_2为止．假设物体维持在定压下，并且不发生相变．试根据熵增加原理证明，此过程所需的最小功为$W_{\min}=C_p\left(\dfrac{T_i^2}{T_2}+T_2-2T_i\right)$.

解：

两物体与致冷机组成绝热系统．由第一定律知，$Q=Q_1+Q_2=W$，即

$$W=C_p\left(T_1-T_i\right)+C_p\left(T_2-T_i\right). \tag{1.6}$$

致冷机经循环后熵不变，根据熵增加原理，

$$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2=\int_{T_i}^{T_1}\frac{C_p}{T}\mathrm{d}T+\int_{T_i}^{T_2}\frac{C_p}{T}\mathrm{d}T=C_p\ln\frac{T_1T_2}{T_i^2}\geq 0. \tag{1.7}$$

由此解得$T_1\geq\dfrac{T_i^2}{T_2}$.

将上式代入(1.6)，得$W\geq C_p\left(\dfrac{T_i^2}{T_2}+T_2-2T_i\right)$．命题得证．