6.3　试证明，对于二维自由粒子，在面积 L^2 内，在 ε 到 $\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ 的能量范围内，量子态数为 $D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\dfrac{\pi L^2}{h^2}(2m)\mathrm{d}\varepsilon$.

解：

二维动量空间内，一个量子态占据的面积为 $\left(\dfrac{h}{L}\right)^2$，因而在圆环形区域 $2\pi p\mathrm{d}p$ 内的量子态数为

$$D(p)\mathrm{d}p=\frac{2\pi L^2}{h^2}p\mathrm{d}p. \tag{6.1}$$

由 $\varepsilon=\dfrac{p^2}{2m}$ 得 $p=\sqrt{2m\varepsilon}$， $\mathrm{d}p=\sqrt{\dfrac{m}{2\varepsilon}}\mathrm{d}\varepsilon$，代入(6.1)，得到

$$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{\pi L^2}{h^2}(2m)\mathrm{d}\varepsilon. \tag{6.2}$$

6.4　在极端相对论情形下，粒子的能量动量关系为 $\varepsilon=cp$. 试求在体积 V 内，在 ε 到 $\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ 的能量范围内三维粒子的量子态数.

解：

三维动量空间内，一个量子态占据的体积为 $\left(\dfrac{h}{L}\right)^3$，因而在球壳形区域 $4\pi p^2\mathrm{d}p$ 内的量子态数为

$$D(p)\mathrm{d}p=\frac{4\pi V}{h^3}p^2\mathrm{d}p. \tag{6.3}$$

由 $\varepsilon=cp$ 得 $p=\dfrac{\varepsilon}{c}$， $\mathrm{d}p=\dfrac{1}{c}\mathrm{d}\varepsilon$，代入(6.3)，得到

$$D(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{4\pi V}{h^3c^3}\varepsilon^2\mathrm{d}\varepsilon. \tag{6.4}$$