8.12 写出二维空间中平衡辐射的普朗克公式．并据此求平均总光子数、内能．

解：

对面积为 A 的光子气体，$\mathrm{d}p$ 动量大小间隔内的量子态数为 $2\dfrac{A}{h^2}2\pi p\mathrm{d}p$．由 $p=\dfrac{\hbar\omega}{c}$ 得，在 $\mathrm{d}\omega$ 频率间隔内的量子态数为 $\dfrac{A}{\pi c^2}\omega\mathrm{d}\omega$．光子遵循玻色分布，故 $\mathrm{d}\omega$ 频率间隔内的平均光子数为 $\dfrac{A}{\pi c^2}\dfrac{\omega\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT}-1}$，辐射能为 $\dfrac{A}{\pi c^2}\dfrac{\hbar\omega^2\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT}-1}$．

平均总光子数 $\overline{N}=\dfrac{A}{\pi c^2}\displaystyle\int_0^\infty\dfrac{\omega\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT}-1}=\dfrac{A}{\pi c^2}\left(\dfrac{kT}{\hbar}\right)^2\int_0^\infty\dfrac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=\dfrac{\pi Ak^2}{6\hbar^2c^2}T^2$，内能 $U=\dfrac{A\hbar}{\pi c^2}\displaystyle\int_0^\infty\dfrac{\omega^2\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT}-1}=\dfrac{A\hbar}{\pi c^2}\left(\dfrac{kT}{\hbar}\right)^3\int_0^\infty\dfrac{x^2\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=\dfrac{2.404Ak^3}{\pi\hbar^2c^2}T^3$（积分见教材附录）．

8.13 室温下某金属中自由电子气体的数密度 $n=6\times10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$；某半导体中导电电子的数密度为 $n=10^{20}\ \mathrm{m}^{-3}$．试验证这两种电子气体是否为简并气体．

解：

费米能 $\varepsilon_{\mathrm{F}}=\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2n\right)^{\frac{2}{3}}$，费米温度 $T_{\mathrm{F}}=\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{F}}}{k}$．对 $n=6\times10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$ 的金属，$T_{\mathrm{F}}=6.5\times10^4\ \mathrm{K}$，远高于室温，是简并气体；对 $n=10^{20}\ \mathrm{m}^{-3}$ 的半导体，$T_{\mathrm{F}}=9.1\times10^{-2}\ \mathrm{K}$，远低于室温，是非简并气体，玻耳兹曼统计适用．

8.20 假设自由电子在二维平面上运动，面密度为 n．试求 0 K 时二维电子气体的费米能量、内能和简并压．

解：

计入自旋后，二维电子气体的态密度 $D(\varepsilon)=\dfrac{4\pi A}{h^2}m\mathrm{d}\varepsilon$．由零温费米分布得粒子数 $N=\dfrac{4\pi A}{h^2}m\displaystyle\int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\mathrm{d}\varepsilon$，所以费米能量 $\varepsilon_{\mathrm{F}}=\dfrac{\hbar^2}{2m}(2\pi n)$．

零温内能 $U_0=\dfrac{4\pi A}{h^2}m\displaystyle\int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon=N\dfrac{\int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\varepsilon\mathrm{d}\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\mathrm{d}\varepsilon}=\dfrac{1}{2}N\varepsilon_{\mathrm{F}}$．

二维电子能级 $\varepsilon=\dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{h}{L}\right)^2\left(n_x^2+n_y^2\right)$，$n_x,n_y=0,\pm1,\pm2,\ldots$．由 $A=L^2$，得到 $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial A}=-\dfrac{\varepsilon}{A}$．代入二维压强公式 $p=-\displaystyle\sum_l a_l\dfrac{\partial\varepsilon_l}{\partial A}$，得 $p=\dfrac{1}{A}\displaystyle\sum_l a_l\varepsilon_l=\dfrac{U}{A}$．所以简并压 $p_0=\dfrac{U_0}{A}=\dfrac{1}{2}n\varepsilon_{\mathrm{F}}$．