§4　线性方程组的解的结构

引言

问题：什么是线性方程组的解的结构?

答：所谓线性方程组的解的结构，就是当线性方程组有无限多个解时，解与解之间的相互关系.

备注：

- 当方程组存在唯一解时，无须讨论解的结构.
- 下面的讨论都是假设线性方程组有解.

解向量的定义

定义：设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ ，如果

$$x_1 = \xi_{11},\quad x_2 = \xi_{21},\quad \ldots,\quad x_n = \xi_{n1}$$

为该方程组的解，则

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$$

称为方程组的解向量.

齐次线性方程组的解的性质

性质1：若 $x=\xi_1$，$x=\xi_2$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，

则 $x=\xi_1+\xi_2$ 还是 $Ax=0$ 的解.

证明：$A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0+0=0$.

性质2：若 $x=\xi$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，k 为实数，

则 $x=k\xi$ 还是 $Ax=0$ 的解.

证明：$A(k\xi)=k(A\xi)=k0=0$.

结论：若 $x=\xi_1,\ x=\xi_2,\ \ldots,\ x=\xi_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_t\xi_t$ 还是 $Ax=0$ 的解.

- 已知齐次方程组 $Ax=0$ 的几个解向量，可以通过这些解向量的线性组合给出更多的解.
- 能否通过有限个解向量的线性组合把 $Ax=0$ 的解全部表示出来？
- 把 $Ax=0$ 的全体解组成的集合记作 S，若求得 S 的一个极大无关组 S_0：$x=\xi_1,\ x=\xi_2,\ \ldots,\ x=\xi_t$，那么 $Ax=0$ 的通解可表示为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_t\xi_t$.
- 齐次线性方程组的解集的极大无关组称为该齐次线性方程组的基础解系（不唯一）.

回顾：向量组的秩的概念

定义：设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量 $a_1, a_2, \cdots,$ a_r，满足

① 向量组 A_0： $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关；

② 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话）都线性相关；

②' 向量组 A 中任意一个向量都能由向量组 A_0 线性表示；

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个**极大无关组**.

向量组的极大无关组一般是不唯一的.

返回

基础解系的概念

定义：齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一组解向量：$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$

如果满足

① ξ_1，ξ_2，…，ξ_r线性无关；

②方程组中任意一个解都可以表示$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$的线性组合，

那么称这组解是齐次线性方程组的一个基础解系.

设 $R(A) = r$，为叙述方便，

不妨设 A 行最简形矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}_{\text{前 } r \text{ 列}} & & & & \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{\text{后 } n-r \text{ 列}} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = 0, \\ \qquad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = 0. \end{cases}$$

令 x_{r+1}，$\cdots$，x_n 作自由变量，则

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

齐次线性方程组的通解

令 $x_{r+1} = c_1$，$x_{r+2} = c_2$, …, $x_n = c_{n-r}$, 则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} \\ c_1 \\ \ddots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

记作 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$.　（满足基础解系②）

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r})=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{cccc}-b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1,n-r}\\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2,n-r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b_{r,1} & -b_{r,2} & \cdots & -b_{r,n-r}\\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right) & \begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\text{前 } r \text{ 行}\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\text{后 } n-r \text{ 行}\end{array}\\ \underbrace{\hphantom{-b_{11}\quad -b_{12}\quad \cdots\quad -b_{1,n-r}}}_{n-r\text{ 列}} & \end{array}$$

故 $R(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}) = n - r$，

即 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关. （满足基础解系①）

于是 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 就是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系.

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

线性方程组的通解

令 $x_{r+1} = c_1$，$x_{r+2} = c_2$, …, $x_n = c_{n-r}$， 则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

记作 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$.（满足基础解系②）

$$\begin{cases} x_1 = \boxed{-b_{11}} x_{r+1} \boxed{-b_{12}} x_{r+2} - \cdots \boxed{-b_{1,n-r}} x_n, \\ x_2 = -b_{21} x_{r+1} - b_{22} x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r} x_n, \\ \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1} x_{r+1} - b_{r2} x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r} x_n. \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ，则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2, \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

此即为 $Ax = 0$ 的基础解系.

通解为

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$$

定理： 设 $m \times n$ 矩阵的秩 $R(A) = r$，则 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集 S 的秩 $R_S = n - r$.

例：求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系．

方法1：先求出通解，再从通解求得基础解系．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

令$x_3 = c_1$， $x_4 = c_2$， 得通解表达式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 - 4c_2 \\ -2c_1 + 3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

因为

- ✓ 方程组的任意一个解都可以表示为ξ_1, ξ_2的线性组合.
- ✓ ξ_1, ξ_2的四个分量不成比例，所以 ξ_1, ξ_2线性无关.

所以ξ_1, ξ_2是原方程组的基础解系.

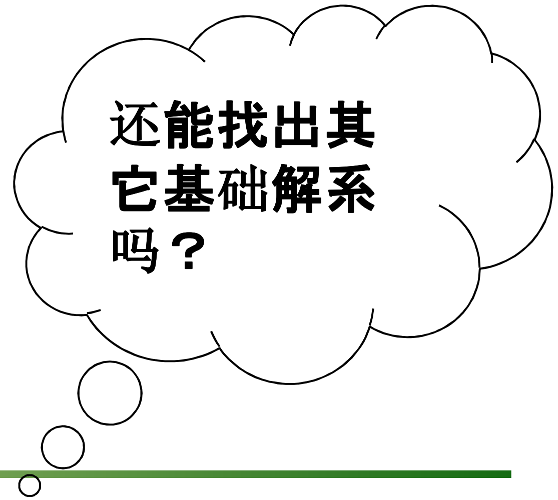
方法2：先求出基础解系，再写出通解.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1 \quad -3x_3+4x_4=0\\ \quad x_2+2x_3-3x_4=0\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}x_1=\ \ 3x_3-4x_4\\ x_2=-2x_3+3x_4\end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ，得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

合起来便得到基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\1\end{pmatrix}$



方法2：先求出基础解系，再写出通解.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -5 & 7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1 \qquad -3x_3+4x_4=0\\ \qquad x_2+2x_3-3x_4=0\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}x_1= \quad 3x_3-4x_4\\ x_2=-2x_3+3x_4\end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

合起来便得到基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\1\end{pmatrix}$

还能找出其它基础解系吗？

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -5 & 7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

问题：**是否可以把 x_1 选作自由变量？**

答：**可以，因为是否把系数矩阵化为行最简形矩阵，其实并不影响方程组的求解．当两个矩阵行等价时，以这两个矩阵为系数矩阵的齐次线性方程组同解．**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -5 & 7\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\underset{r_1+2r_2}{\overset{r_2\div(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}-3 & -4 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-3&-4&1&0\\-2&-3&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-3x_1-4x_2+x_3 \qquad =0\\-2x_1-3x_2 \qquad +x_4=0\end{cases} \quad \text{即} \begin{cases}x_3=3x_1+4x_2\\x_4=2x_1+3x_2\end{cases}$$

令 $x_1=c_1$， $x_2=c_2$， 得通解表达式

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\3c_1+4c_2\\2c_1+3c_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\4\\3\end{pmatrix}=c_1\eta_1+c_2\eta_2$$

从而可得另一个基础解系：η_1和 η_2.

定理：设 $m \times n$ 矩阵的秩 $R(A)=r$，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩 $R_S = n - r$.

例：设 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，证明 $R(A)=R(B)$.

例：设 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$（零矩阵），证明 $R(A)+R(B)\le n$.

例：证明 $R(A^{\mathrm{T}}A)=R(A)$.

非齐次线性方程组的解的性质

性质3：若 $x=\eta_1$，$x=\eta_2$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则 $x=\eta_1-\eta_2$ 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$（导出组）的解.

证明： $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$.

性质4：若 $x=\eta$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，$x=\xi$ 是导出组 $Ax=0$ 的解，则 $x=\xi+\eta$ 还是 $Ax=b$ 的解.

证明： $A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b$.

根据性质3 和性质4 可知

- 若 $x = \eta^*$ 是 $Ax = b$ 的解， $x = \xi$ 是 $Ax = 0$ 的解，那么 $x = \xi + \eta^*$ 也是 $Ax = b$ 的解.
- 设 $Ax = 0$ 的通解为 $\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$.

于是 $Ax = b$ 的通解为

$$\eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$$

例：求线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2-x_4=5 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$ 的通解.

解：容易看出 $\eta^*=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ 是方程组的一个特解 .

其对应的齐次线性方程组为 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$

根据前面的结论，导出组的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\1\end{pmatrix}$

于是，原方程组的通解为

$$\eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \eta^* = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

很多时候特解未必很直观
可以直接对增广矩阵进行航变换，于是通解可直接得出

例：求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$ **的通解.**

解：增广矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得：$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 + 1 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 + 1 \end{cases}$

即通解为：

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

小结：关于线性方程组

- 求解线性方程组（利用矩阵的初等行变换）

- 线性方程组的几何意义（四种等价形式）

1. 齐次线性方程组的通解能由它的基础解系来构造.

   ① 基础解系是解集 S 的极大无关组.

   ② 解集 S 是基础解系的所有可能的线性组合.

2. 非齐次线性方程组的通解与其导出组的基础解系的关系.