曲面度量张量与曲率张量

谢锡麟　复旦大学 力学与工程科学系

2015 年 4 月 2 日

1　知识要素

1.1　曲面第一基本形式及曲面度量张量

定义 1.1 (曲面第一基本形式)**.** 由 $g_{ij}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = (\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}_\Sigma))_{\mathbb{R}^{m+1}}$ 构成的 $m \times m$ 矩阵

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = \begin{pmatrix} g_{11}(\boldsymbol{x}_\Sigma) & \cdots & g_{1m}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(\boldsymbol{x}_\Sigma) & \cdots & g_{mm}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \end{pmatrix} = D\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_\Sigma) D\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

称为曲面 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 的第一基本形式.

性质 1.1 (曲面第一基本形式的对称性、正定性)**.** 曲面的第一基本形式矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是对称矩阵; 在曲面的正则点处, 曲面的第一基本形式矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是对称正定矩阵.

证明 由内积的对称性, 矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的对称性是显然的. 下面证明正定性.

设 $\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$, 则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} D\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}} D\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\xi} = (D\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}(D\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\xi}) \\ &= |D\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\xi}|^2_{\mathbb{R}^m} = (\xi^i \boldsymbol{g}_i)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

在曲面的正则点处, 有 $\mathrm{rank} D\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = m$, 即 $\{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_\Sigma)\}_{i=1}^m$ 线性无关. 所以当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{\xi} = (\xi^i\boldsymbol{g}_i)^2 = 0$ 时, 必然有 $\xi^i = 0, i = 1, \cdots, m$, 即 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$.

因此矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是对称正定矩阵. □

定义 1.2 (曲面的度量张量)**.** 定义仿射量

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \triangleq g_{ij}\boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j = g^{ij}\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j = \delta^i_j \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \in \mathbf{PSym}$$

为曲面的度量张量.

就高维曲面情形, 可有如下关于曲面度量 $g := \det\left(g_{ij}\right)$ 的引理.

引理 1.2 (关于曲面度量的恒等式)**.**

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^l_\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l_\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma).$$

证明 考虑

$$g := \det(g_{ij}) = \sum_{s=1}^{m} \Delta_{is} g_{is}, \quad \forall\, i = 1, \cdots, m,$$

此处 Δ_{is} 表示度量矩阵 $\left(g_{pq}\right)$ 的伴随矩阵第 i 行第 s 列的元素. 由此可知, 如果 g_{ij} 包含在 g 的表达式中, 则有 $\Delta_{ij} \neq 0$; 并且如果 g 的表达式不包含 g_{ij}, 则有 $\Delta_{ij} = 0$.

随后, 可作以下推导:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x_\Sigma^l} &= \sum_{\text{包含}g_{ij}} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\Sigma^l}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = \sum_{\text{包含}g_{ij}} \Delta_{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\Sigma^l}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \\ &= \sum_{p,q=1}^{m} \Delta_{pq} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x_\Sigma^l}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = g g^{pq} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x_\Sigma^l}(\boldsymbol{x}_\Sigma).\end{aligned}$$ □

值得指出, 上述证明说明此恒等式亦适用于一般曲线坐标系.

1.2 曲面第二基本形式及曲面曲率张量

定义 1.3 (曲面第二基本形式)**.** 令

$$b_{ij}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x_\Sigma^i}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} = -\left(\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}_\Sigma), \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x_\Sigma^i}\right)_{\mathbb{R}^{m+1}},$$

并引入 $m \times m$ 矩阵

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_\Sigma) = \begin{pmatrix} b_{11}(\boldsymbol{x}_\Sigma) & \cdots & b_{1m}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}(\boldsymbol{x}_\Sigma) & \cdots & b_{mm}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \end{pmatrix} = -D\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \cdot D\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

称为曲面 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}_\Sigma)$ 的**第二基本形式**.

因为

$$\begin{aligned} b_{ij}(\boldsymbol{x}_\Sigma) &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x_\Sigma^i}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Sigma}}{\partial x_\Sigma^i \partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} \\ &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x_\Sigma^j}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_\Sigma)\right)_{\mathbb{R}^{m+1}} = b_{ji}(\boldsymbol{x}_\Sigma), \end{aligned}$$

所以曲面第二基本形式 $\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵.

定义 1.4 (曲面曲率张量)**.** 定义仿射量

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}_\Sigma) \triangleq b_{ij} \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j = b^{ij} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j = b^i_j \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \in \mathbf{Sym}$$

为曲面的曲率张量, 式中

$$b^{ij} = g^{ik} g^{jl} b_{kl}, \quad b^i_j = g^{ik} b_{kj}.$$

1.3 Gauss 曲率和平均曲率

首先证明一个线性代数中很重要的定理.

定理 1.3 (同时对角化)**.** 设有对称正定矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 和对称矩阵 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, 则一定唯一存在一个非奇异的矩阵 $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 满足

$$\begin{cases} \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}_m, \\ \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}. \end{cases}$$

式中, $\boldsymbol{I}_m$ 为 m 阶单位矩阵, λ_i 满足 $\det(\boldsymbol{B} - \lambda_i \boldsymbol{A}) = 0, \quad i = 1, \cdots, m$.

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 因此一定唯一存在一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_A$, 使得

$$\boldsymbol{Q}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_A = \boldsymbol{\Lambda}_A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{pmatrix},$$

其中, $a_1, \cdots, a_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 所以它所有的特征值都是正的. 记

$$\boldsymbol{\Lambda}_A^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} a_1^{\frac{1}{2}} & & \\ & \ddots & \\ & & a_m^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

则有 $\boldsymbol{Q}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_A = \boldsymbol{\Lambda}_A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Lambda}_A^{\frac{1}{2}}$, 即

$$(\boldsymbol{\Lambda}_A^{\frac{1}{2}})^{-1}\boldsymbol{Q}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_A(\boldsymbol{\Lambda}_A^{\frac{1}{2}})^{-1} = \boldsymbol{I}_m,$$

因此令 $\boldsymbol{S}_A = \boldsymbol{Q}_A(\boldsymbol{\Lambda}_A^{\frac{1}{2}})^{-1}$, 有 $\boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_A = \boldsymbol{I}_m$.

令 $\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_A$, 因为 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵, 所以 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 也是对称矩阵, 而且唯一存在一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_B$, 满足

$$\boldsymbol{Q}_B^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{Q}_B = \boldsymbol{\Lambda}_{\widetilde{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix},$$

式中, $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 的特征值, 满足 $\det(\widetilde{\boldsymbol{B}} - \lambda_i \boldsymbol{I}_m) = 0, i = 1, \cdots, m$. 也就是

$$\boldsymbol{Q}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_A\boldsymbol{Q}_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

此处令 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_A\boldsymbol{Q}_B = \boldsymbol{Q}_A(\boldsymbol{\Lambda}_A^{\frac{1}{2}})^{-1}\boldsymbol{Q}_B$, 即有

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix},$$

而且

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_A\boldsymbol{Q}_B=\boldsymbol{Q}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{Q}_B=\boldsymbol{I}_m.$$

λ_i 满足

$$\det(\widetilde{\boldsymbol{B}}-\lambda_i\boldsymbol{I}_m)=\det(\boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_A-\lambda_i\boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_A)=\det[\boldsymbol{S}_A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}-\lambda_i\boldsymbol{A})\boldsymbol{S}_A]=0,$$

即 $\det(\boldsymbol{B}-\lambda_i\boldsymbol{A})=0$. □

根据同时对角化定理, 曲面第一基本形式 $\boldsymbol{G}$ 是对称正定矩阵, 曲面第二基本形式 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵, 因此唯一存在一个非奇异矩阵 $\boldsymbol{S}\in\mathbb{R}^{m\times m}$, 使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_m,\\ \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix}.\end{cases}$$

此处 λ_i 满足 $\det(\boldsymbol{B}-\lambda_i\boldsymbol{G})=0, i=1,\cdots,m$.

据此, 令

$$K_G=\prod_{i=1}^m\lambda_i=\det(\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{B})=\frac{\det\boldsymbol{B}}{\det\boldsymbol{G}},$$

称为 **Gauss 曲率**. 令

$$H=\sum_{i=1}^m\lambda_i=\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{B}),$$

称为**平均曲率**.

2 应用事例

3 建立路径

- 本讲稿直接将线性代数中将一个对称正定阵与对称阵同时对角化的结论应用于曲面度量张量 (协变分量矩阵为对称正定阵) 与曲率张量 (协变分量矩阵为对称阵), 以此定义 Gauss 曲率与平均曲率. 定义的过程是构造性, 由此也直接提供了计算 Gauss 曲率与平均曲率的方法.

- 认识上, 可以先在数学上明晰 Gauss 曲率与平均曲率的定义, 然后再研究 Gauss 曲率与平均曲率的意义.