第九章　平面图与图的着色

- 9.1　平面图与欧拉公式
- 9.1 平面图与欧拉公式（补充）
- 9.2　顶点着色
- 9.3　平面图的着色
- 9.4　边的着色
- 9.5　图着色的应用

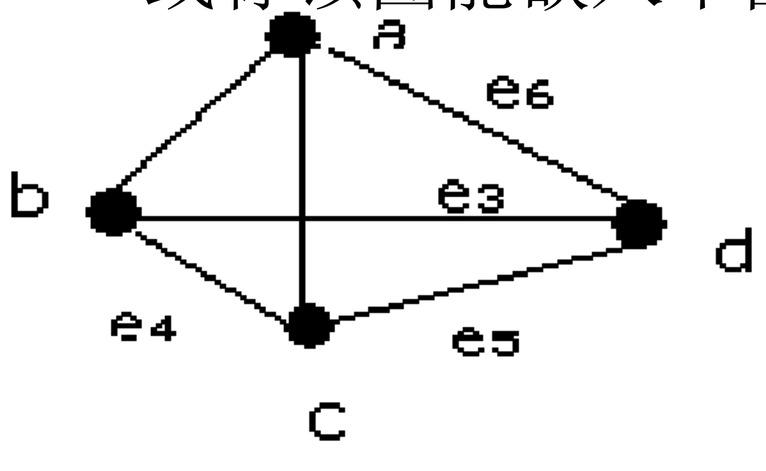
平面图

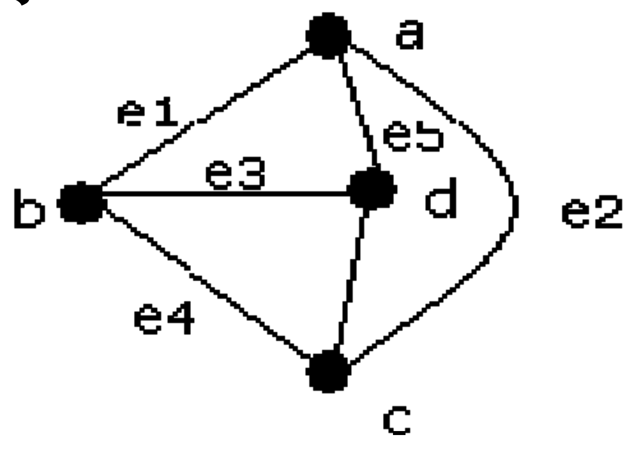
- 在现实生活中，常常要画一些图形，希望边与边之间尽量减少相交的情况，例如印刷线路板上的布线，交通道的设计等。
- 同构

9.1　平面图与欧拉公式

- 一、平面图
- 定义9.1（平面图）

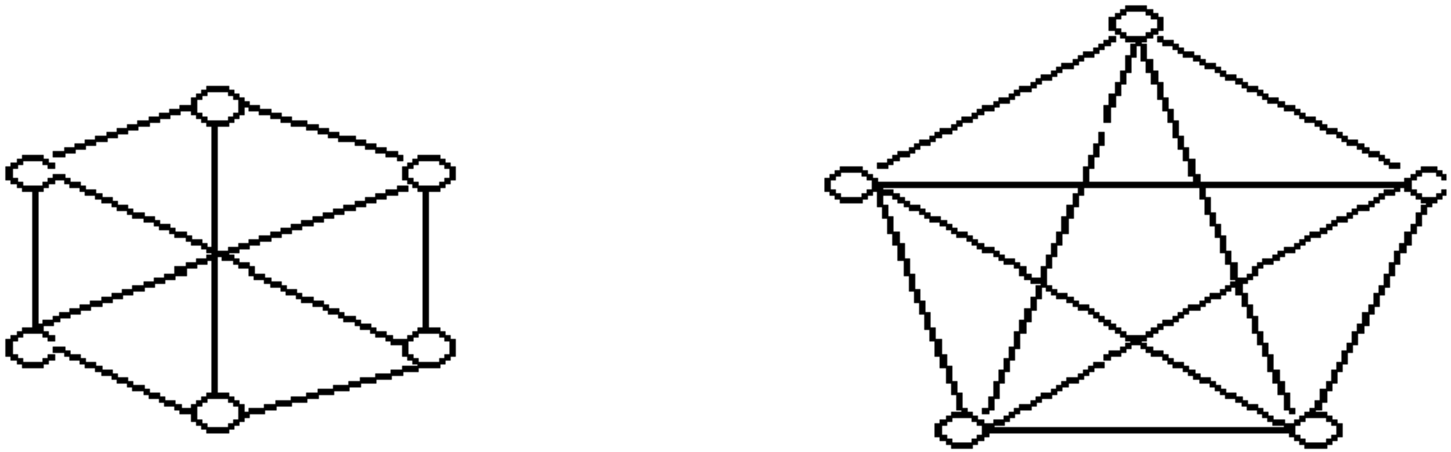
　　　　若一个图能画在平面上使它的边互不相交（除在顶点处），则称该图为平面图，或称该图能嵌入平面的。





- 图9.1(a),(b)
- 图9.1(a)平面图G, (b) 所示的Ğ是G的平面嵌入。

- 图9.2：并不是所有的图都是平面图。（K_5和$K_{3,3}$）



(a) (b)

9.1 平面图与欧拉公式

- 二、欧拉公式
- 1 定义9.2（面/外部面/内部面）

平面图G嵌入平面后将Ğ分成若干个连通闭区域，每一个连通闭区域称为G的一个面。

恰有一个无界的面，称为外部面。

其余的面称为内部面。

9.1　平面图与欧拉公式

- 2 欧拉公式
- （1）定理9.1

　　若连通平面图G有n个顶点，e条边和f个面，则

$$n-e+f=2$$

称为欧拉公式。

- 证明方法：归纳法

- 证明：
- （1）归纳基础：一条边，欧拉公式成立；
- （2）归纳步骤：假设*m-1*条边，欧拉公式成立；

考察*m*条边的连通平面图：

1）若有度数为1的顶点，则删去该顶点及其关联边，便得到连通平面图*G'*，*G'*满足欧拉公式，再将删去的点和边加回*G'*得到*G*也满足欧拉公式；

2）若没有度数为1的顶点，则删去有界面边界上的任一边，便得到连通平面图*G'*， *G'*满足欧拉公式，再将删去的边加回*G'*得到*G*也满足欧拉公式。

9.1　平面图与欧拉公式

- (2)推论9.1

若G是$n \geq 3$的平面简单图，则$e \leq 3n-6$。

证明：只证明连通的平面简单图的情况，G是$n \geq 3$的平面简单图，每个面由3条或更多条边围成，因此边的总数大于等于$3f$，因为每条边至多被计算两次，所以G中至少有$3f/2$条边，即$e \geq 3f/2$。

根据欧拉公式，有$n-e+2e/3 \geq 2$。

所以$3n-6 \geq e$。

- (3)推论9.2

  若平面图的每个面由四条或更多条边围成，则$e \le 2n-4$。
- 证明：类似推论9.1的证明
- （*<u>由学生在课堂上当场进行推导</u>*）

- (4)推论9.3

  K_5和$K_{3,3}$是非平面图。

证明：反证法：若K_5是平面图，由推论9.1，当$n=5, e=10$时，$3n-6 \geq e$不可能。所以K_5是非平面图。

若$K_{3,3}$ 是平面图，由推论9.2，当$n=6, e=9$时，$2n-4 \geq e$不可能。所以$K_{3,3}$是非平面图。

9.1 平面图与欧拉公式

- (5)定理9.2

在平面简单图G中至少存在一个顶点v_0，

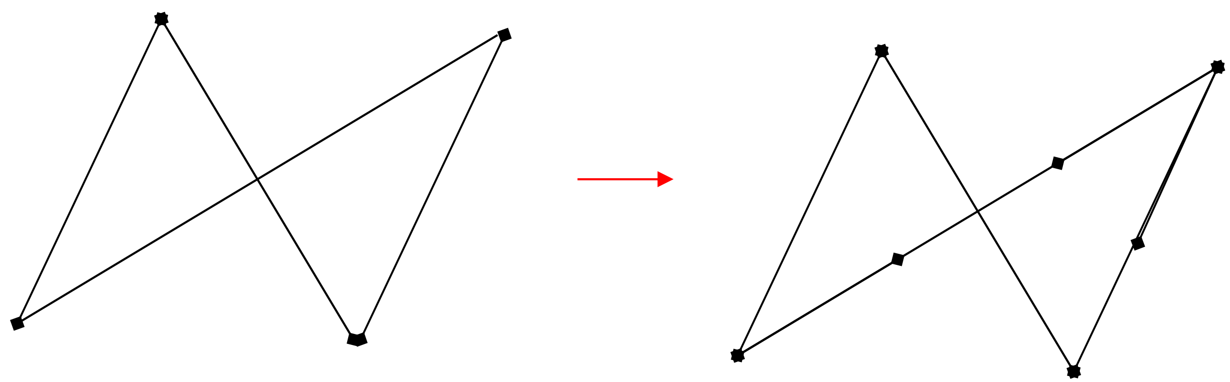
$$d(v_0) \leq 5$$

- 证明方法：反证法，假设所有顶点度数大于5，由推论9.1，导致矛盾。

9.1 平面图与欧拉公式

三 平面图的特征

- 1 剖分
- 在G的边上插入有限个点便得到G的一个剖分。
- 例：



- 2 定理9.3（库拉托斯基定理）

图G是平面图$\Leftrightarrow$ 它的任何子图都不是K_5和$K_{3,3}$的剖分。

9.1 平面图与欧拉公式

四 对偶图

- 1 定义9.3（几何对偶）

设Ğ是平面图G的平面嵌入，则G的几何对偶G*构造如下：

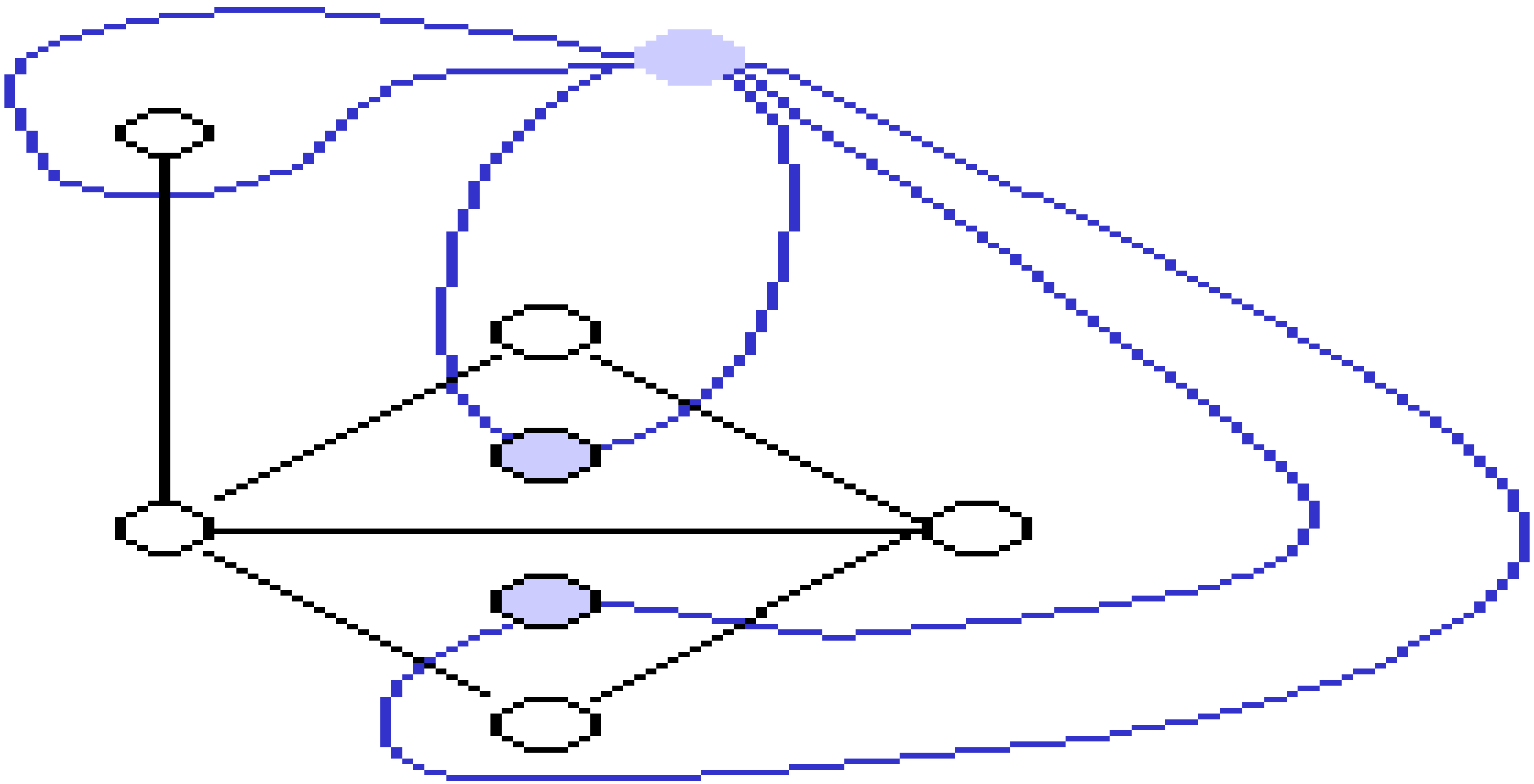
(1) 在Ğ的每一个面f内恰放唯一的一个顶点f*；

(2) 对Ğ的两个面f_i, f_j的公共边x_k，作边x_k*={f_i*, f_j*}与相交；得到图记为G*，即G的几何对偶（简称G的对偶）。

图9.4

如下图中，G的边和结点分别用黑线和“○”表示。而它的对偶图的边和结点分别用蓝线和“●”表示。

<u>请指出错误之处</u>



- 若G是连通平面图，则G*也是连通平面图。
- */*由定义*/*

9.1 平面图与欧拉公式

- 2 定理9.4（ G和G^*的顶点数，面数和边数的关系）

  设G是有n个顶点，e条边，f个面的连通平面图；又设G的几何对偶G^*有n^*个顶点，e^*条边，f^*个面，则$n^*=f$, $e^*=e$, $f^*=n$。

证明方法：前两个关系式直接由G^*的定义给出，第3个关系式由欧拉公式推出。

- 3 定理9.5

  G是连通平面图$\Leftrightarrow G^{**}$同构于G。

6.1 平面图与欧拉公式（补充）

- 一、球面与平面
- 1. 嵌入曲面
- 设S是一个给定的曲面，比如平面，球面等，如果图G能画在曲面S上使得它的边仅在端点处相交，则称G可嵌入曲面(embeddable in the surface) S。

- 2. 定理6A.
- 图G可嵌入球面$S \Leftrightarrow G$可嵌入平面P。

- /*证明基于球极平面射影。*/
- /*图嵌入平面与球面是一回事。*/

- 二、平面图
- 1 边界和度数
- 1）定义6A：

包围每个面的所有边组成的回路组称为该面的***<u>边界(boundary)</u>***，边界的长度称为该面的***<u>度(degree of a face)</u>***。面R的度记为$deg(R)$。

- 2）定理6B：

平面图G中所有面的度数之和等于边数e的2倍：

$$\sum_{i=1}^{f} \deg(R_i) = 2e$$

其中f为G的面数。

- 证明：/*正向推导*/
- $\forall e \in G$, e为面R_i和R_j $(i \neq j)$的公共边界上的边时，在计算R_i和R_j的度数时各提供次数1，而当e只在某一个面R的边界上出现时，它必出现两次，所以在计算R的度数时e提出的次数为2，于是每条边在$\Sigma deg(R_i)$中，各提供度数2，所以命题成立。

- 2 极大平面图、极小非平面图
- 1）定义6B（极大平面图、极小非平面图）

设G为简单平面图，若在G的任意不相邻u, v之间加边(u, v)，所得图为非平面图，则称G为***极大平面图***。

若在非平面图G中任意删除一条边，所得图为平面图，则称G为***极小非平面图***。

K_5-e均为极大平面图

$K_5, K_{3,3}$都是极小非平面图

- 2）定理6C

  G为n（$n \geq 3$）个顶点的简单的连通平面图，G为极大平面图当且仅当G的每个面的度数均为3。

<u>/*极大平面图G的每个面都是三角形*/</u>

- 3）定理6D
- 在$n(n\geq 4)$个顶点的极大平面图G中，$\delta(G)\geq 3$。
- */*δ(G) 为G的最小度*/*

- 定理6E.

  G为n（$n \geq 3$）个顶点、e条边的简单平面图，则G为极大平面图当且仅当$e=3n-6$。

- 证明：
- $\Rightarrow$：因为G是连通的，由欧拉公式得$f=2+e-n$。又因为G是极大平面图，所以$2e=3f$。所以$e=3n-6$。
- $\Leftarrow$：如果$e=3n-6$，但G不是极大平面图，则在G中可以继续加边，产生的还是平面简单图G'，$e'>3n-6$ 。因为由推论6. 1，对$n\geq3$的平面简单图G'，则$e'\leq3n-6$，导致矛盾。

- 三、欧拉公式
- 应用欧拉公式及其推广形式得到平面图的另外一些性质。

- 定理6F

设G是连通平面图，且G的各面的度数至少为l（$l\geq 3$），则G的边数e与顶点数n有如下关系：

$$e \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

证明：因为平面图G中所有面的次数之和等于边数e的2倍，所以

$$2e = \sum_{i=1}^{f} \deg(R_i) \geq l * f$$

由欧拉公式$f=2+e-n$，代入$2e \geq l(2+e-n)$，所以

$$e \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

- 推论1

设G是具有ω（$\omega\geq2$）个连通分支的平面图，且G的各面的次数至少为l（$l\geq3$），则G的边数e与顶点数n有如下关系：

$$e \leq \frac{l}{l-2}(n-\omega-1)$$

- 定理6G

  G为n（$n \geq 3$）个顶点、e条边的简单平面图，则$e=3n-6$。

- 证明：设G有ω（$\omega\geq l$）个连通分支。

  若G是森林，则$e=n-\omega\leq 3n-6$（$n\geq 3$）。

  若G不是森林，则G中存在圈；由于G是简单图，所以圈的长度大于等于3，因而各面的次数至少为l（$l\geq 3$），$l/(l-2)$在$l=3$时达到最大值，因此

$$e\leq\frac{l}{l-2}(n-\omega-1)\leq 3(n-\omega-1)$$
$$\leq 3(n-2)=3n-6$$

- 四、平面图的判断
- 1. 定义6C（插入2度顶点/消去2度顶点）

设$e=(u, v)$为图G中一条边，在G中删除e，增加新的顶点w，使u与v均与w相邻，即$G'=(G-e)\cup\{(u, w), (w, v)\}$，称为在$G$中***插入2度顶点w***。

设w为G中的一个2度顶点，w与u, v相邻，删除w，增加新边(u, v)，即$G'=(G-w)\cup\{(u, v)\}$，称为在G中***消去2度顶点w*** 。

- 2. 定义6D（同胚）
- 若两个图G_1与G_2是同构的，或通过反复插入或消去2度顶点后是同构的，则称G_1与G_2是***<u>同胚</u>***的。

- 3. 库拉托斯基定理的两种形式
- 1) 图G是平面图当且仅当G不含与K_5同胚子图，也不含与$K_{3,3}$同胚子图。
- 2) 图G是平面图当且仅当G中没有可以收缩到K_5的子图，也没有可以收缩到$K_{3,3}$的子图。

- 五、平面图的应用——正多面体
- 1. 每个凸多面体对应一个平面图：
- 设P是凸多面体。以P的顶点为顶点，P的棱为边而得到的平面图$G(P)$称为对应于P的平面图。则$G(P)$是连通的且$\delta(G(P))\geq 3$，P的面就是$G(P)$的面，而且$G(P)$的每条边正好在两个面的边界上。

- 2. 欧拉凸多面体公式
- 以V, E, F分别表示凸多面体P的顶点数、棱数和面数，则$V-E+F=2$。

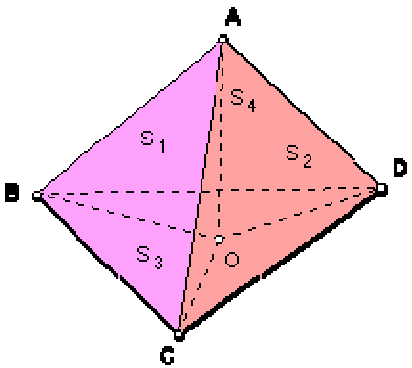
- 3. 设V_n和F_n分别表示凸多面体P的n度点和n度面的数目，当$n\geq 3$时， $2E=\sum nF_n$ = $\sum nV_n$ 。

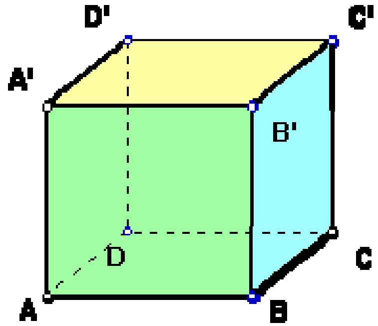
- 4. 定理6H.
- 每个凸多面体中都至少有一个n度面，$3 \le n \le 5$。

- ***/*证明方法：反证法*/***

- 证明：设$F_3=F_4=F_5=0$。
- 因为所有面的度数之和为$2E$，$2E=\sum nF_n \geq \sum 6F_n=6\sum F_n=6F$，其中$n\geq 6$，则$2E\geq 6F$，$F\leq E/3$。
- 因$2E=\sum nV_n \geq 3\sum V_n=3V$，其中$n\geq 3$，则$V\leq 2E/3$。
- 由凸多面体公式$V-E+F=2$，得$E=V+F-2 \leq 2E/3+ E/3-2=E-2$，导致矛盾。

- 5. 正多面体(regular polyhedron, Plato体)
- [1] 定义(正多面体).
- 每个面并且每个多面角都相等的凸多面体称为正多面体.对应的平面图称为Plato图.
- [2] Euclid(约公元前330年-前275年)《几何原本》:
- 仅有5个正多面体：四面体、立方体、十二面体、八面体、二十面体。


A
B
C
D
O
S 1
S 2
S 3
S 4


A
B
C
D
A'
B'
C'
D'

- [3]. 定理6I.
- 仅有5个正多面体。

- 证明：设P是正多面体$G(P)$对应的平面图。由$V\text{-}E+F=2$，得$-8=4E-4V-4F=2E+2E-4V-4F= \Sigma nF_n+\Sigma nV_n$ -4ΣV_n -4ΣF_n = $\Sigma(n-4)F_n+\Sigma(n-4)V_n$，$n\geq 3$。
- 因为P是正多面体，所以存在两个整数h和k使$F=F_h$且$V=V_k$，因此有$-8=(h-4)F_h+(k-4)V_k$，并且由$2E=\Sigma nF_n$ = ΣnV_n，有$hF_h=2E= kV_k$。由定理6H，$3\leq h\leq 5$，分3种情况。

- ***情形1.*** 当$h=3$时，因为$-8=(h-4)F_h+(k-4)V_k$，且$hF_h=2E=kV_k$，所以$12=(6-k)V_k$。因此有$3\leq h\leq 5$。由$-8=(h-4)F_h+(k-4)V_k$和$12=(6-k)V_k$，得：
- 当$k=3$时，$V_3=4$，$F_3=4$，因此P是四面体；
- 当$k=4$时，$V_4=6$，$F_3=8$，因此P是八面体；
- 当$k=5$时，$V_5=12$，$F_3=20$，因此P是十二面体；

- ***情形2.*** 当$h=4$时，因为$-8=(h-4)F_h+(k-4)V_k$，所以$8=(4-k)V_k$，则$k=3$，$V_3=8$，$F_4=6$，因此P是立方体。
- ***情形3.*** 当$h=5$时，因为$-8=(h-4)F_h+(k-4)V_k$，且$hF_h=2E= kV_k$，所以$20=(10-3k)V_k$。则$k=3$，$V_3=20$，$F_5=12$，因此P是立方体。

图的着色

- 9.2—9.4

图的着色问题起源

- 四色猜想：
- 至多用4种颜色给平面或球面上的地图着色，使得相邻的国家着不同的颜色。

9.2 顶点着色

- 一、顶点着色
- 定义9.4 (顶点着色)

设G是一个没有自环的图，对G的每个顶点着色，使得没有两个相邻的顶点着上相同的颜色，这种着色称为***图的正常着色***。

图G的顶点可用k种颜色正常着色，称G为***k-可着色的***。

使G是k-可着色的数k的最小值称为G的***色数***，记为$\boldsymbol{\chi(G)}$。如果$\chi(G)=k$，则称G是***k色的***。

图9.6

9.2 顶点着色

- 二、性质
- 1. 定理9.6

(1)G是零图$\Leftrightarrow$ $\chi(G)=1$；

(2)对于完全图K_n， $\chi(K_n)=n$， 而$\chi(\overline{K}_n)=1$；

(3)对于n 个顶点构成的回路G_n， 当n是偶数时， $\chi(G_n)=2$； 当n是奇数时， $\chi(G_n)=3$；

(4)G是二分图$\Leftrightarrow$ $\chi(G)=2$。

- 证明方法：由定义

9.2 顶点着色

- 2. 定理9.7

  如果图G的顶点最大度数为$\Delta(G)$，则$\chi(G)\leq 1+\Delta(G)$。

- */*证明方法：对G的顶点数采用数学归纳法，证明G是1+Δ(G)-可着色的。*/*

- /*对于$n\geq 3$的n色图的特征至今没有得出，然而可以给出色数上界*/

- 证明：
- 1）当$n=2$时，G只有一条边，$\Delta(G)=1$，G是2-可着色的。所以$\chi(G)\leq 1+\Delta(G)$。
- 2）假设对于$n-1$个顶点的图，结论成立。

现在设G有n个顶点，顶点的最大度数是$\Delta(G)$，如果删去任一点v及其相关联的边，得到$n-1$个顶点的图G'，它的最大顶点度数至多是$\Delta(G')$，且$\Delta(G')\leq\Delta(G)$。根据归纳假设，该图是$1+\Delta(G)$-可着色的，再将v及其相关联的边加回该图，得到图G，顶点v的度数至多是$\Delta(G)$，v的相邻顶点最多着上$\Delta(G)$种颜色，然后v着上第$1+\Delta(G)$种颜色。

因此，G是1+Δ(G)-可着色的。

- 3. Brooks定理

  1941年， Brooks证明：使$\chi(G)=1+\Delta(G)$的图只有两类：或者是奇回路，或者是完全图。

- （1）定理9.8（Brooks定理)

　　如果连通图G的顶点的最大度数为$\Delta(G)$，G不是奇回路，又不是完全图，则$\chi(G) \leq \Delta(G)$。

- （2）例：证明对于Petersen图G，$\chi(G)=3$。

- 证明：由Brooks定理，对于Petersen图G，$\chi(G) \leq \Delta(G)=3$。又因为图中有奇回路，奇回路图是3色图，所以$\chi(G) \geq 3$。所以$\chi(G)=3$。

- 三、着色与等价关系
- 对图G进行$\chi(G)$-着色，设$R=\{(u, v) \mid u, v\in V(G)$且$u, v$涂一样的颜色$\}$，则R是V(G)上的等价关系。

- 四、色多项式
- 1. 定义（色多项式）
- 设G是n个结点的无向图，对G进行的两个k-可着色被认为是不同的，是指至少有一个顶点在两个k-可着色中被涂不同颜色，以$f(G, k)$表示G的不同k-可着色方式的总数，称$f(G, k)$为G的色多项式。

- 若$k<\chi(G)$，$f(G, k)=0$；
- $\chi(G)$是使$f(G, k)>0$的最小整数；

- 2 定理
- $f(K_n, k)=k(k-1)\dots(k-n+1)$
- $f(N_n, k)=k^n$
- 其中K_n，N_n分别n个顶点的完全图和零图。

- 推论
- $f(K_n, k) = f(K_{n-1}, k)(k-n+1),\ n \geq 2.$

9.3　平面图的着色

- 一、地图的四色问题
- 1　历史与发展
- 1852年，英国青年Guthrie在画地图时发现：如果相邻两国着上不同的颜色，那么画任何一张地图只需要四种颜色就够了（地图的四色问题）；
- 1976年。高速电子计算机证明地图的四色问题。

- 2　定义6.5（地图）

　　一个没有桥的连通平面图称为地图。

　　/*桥：图G中的边e满足$\omega(G-e)>\omega(G)$，称e为G的割边（或桥）。*/

　　地图可以有自环和多重边。地图中的每一边是两个面的公共边。两个面相邻是指两个面至少有一条公共边。

- 3　定义6.6（地图的正常着色）

设G是一个地图，对G的每个面着色，使得没有两个相邻的面着上相同的颜色，这种着色称为***地图的正常面着色***。

地图G可用k种颜色正常面着色，称G是k-***面可着色的***。

使G的k-面可着色的数k的最小值称为G的***面色数***，记为$x^*(G)$。

若$x^*(G)=k$，则称G是k***面色的***。

- 地图的四色问题：任何地图是4-面可着色的。

- 4　定理9.9

　　设G是没有自环的平面图，G*是G的对偶，则G是k-可着色当且仅当G*是k-面可着色。

　　没有自环的平面图的对偶是没有桥的连通平面图。

/*证明方法：根据定义，直接推导。*/

- 证明：⇒：
- 　　设G是没有自环的平面图，G的对偶G*是一个地图。如果G是k-可着色的，则由于G*的每个面恰含G中的一个顶点，把G*的每个面着上它所包含的顶点的颜色。因为G是k-可着色的，G中的任何两个相邻的顶点有不同的颜色，所以G*中任何两个相邻的面着上不同的颜色，因此G*是k-面可着色的。

- $\Leftarrow$:
- G*是k-面可着色的，由于G的每个顶点包含在G*的一个面中，并且G的不同顶点包含在G*的不同面上，把G中的每个顶点着上它所在面的颜色。因为G*中没有两个相邻面着上相同的颜色，所以G中没有两个相邻顶点着上相同的颜色，因此G是k-可着色的。

- 地图的四色问题：
- 任何平面图是4-可着色的。
- 任何地图是4-面可着色的。

6.3 平面图的着色

- 二、五色定理（Heawood 1890）
  任何平面图G是5-可着色的。

/*数学归纳法，分治*/

- 证明：不妨设G是平面简单图. 对G的顶点数采用数学归纳法. 当$n \le 5$时结论成立. 假设对$n-1$个顶点的所有平面简单图G是5-可着色的. 考虑n个顶点的平面简单图G, 由定理6.2, 在G中存在顶点v_0, 使$d(v_0) \le 5$. 由归纳假设, $G-v_0$是5-可着色的, 在给定$G-v_0$的一种着色之后, 将v_0及其关联边加回到原图中, 得到G, 分两种情况:

- (1)如果$d(v_0)<5$, 则v_0的相邻点已着上颜色小于等于4种, 所以v_0可以着另一颜色, 使G是5-可着色的.
- (2)如果$d(v_0)=5$，则将v_0的相邻点依次记为v_1, v_2,……, v_5，并且对应的v_i点着上第i色。
- 设H_{13}为$G-v_0$的一个子图，它是由色1和色3的顶点集导出的子图。如果v_1和v_3属于H_{13}的不同分支，将v_1所在分支中着色1的顶点和着色3的顶点进行颜色对换，这时v_1着色3，并不影响$G-v_0$的正常着色。然后在v_0着色1，因此G是5-可着色的。
- 如果v_1和v_3属于H_{13}的同一分支中，则在G中存在一条从v_1到v_3的路，它的所有顶点着色1或3，这条路与（v_1，v_0，v_3）一起构成一条回路。它或者将v_2围在里面，或者把v_4和v_5一同围在它里面。因为G是平面图，在任何一种情况下，都不存在连接v_2和v_4并且顶点着色2或4的一条路。现在设H_{24}为$G-v_0$的另一个子图，它是由着色2和4的顶点集导出的子图，则v_2和v_4属于H_{24}的不同的分支中，所以在v_2所在分支中将着色2的顶点和着色4的顶点进行颜色对换，v_2着色4，这样导出了$G-v_0$的另一种正常着色。然后在v_0着色2，同样得到G是5-可着色的。

6.3 平面图的着色

- 三、二色定理
- 地图G是2-面可着色的$\Leftrightarrow$它是一个欧拉图。

- 证明：
- */*地图G是2-面可着色的 $\Rightarrow$ 它是一个欧拉图。*/*
- 设地图G是2-面可着色的，对于G中任一个顶点v，围绕顶点v的面必为偶数个，于是可推出v是偶顶点，由定理5.8，可知G是欧拉图。

- */* 地图G是2-面可着色的 ⇐ 它是一个欧拉图。*/*
- */* <u>归纳证明。</u>设G是欧拉图，则G可分解成若干个边不相重的回路的并。对图的回路数采用数p采用数学归纳法。*/*

- 归纳基础：当$p=1$时， G是2-面可着色的。
- 归纳步骤：假设回路为$p-1$的地图G是2-面可着色的。对于由p条回路构成的地图G，由于G的每个顶点都是偶顶点，在G中删去一条回路，得到图G'，G'的每个顶点的度数也是偶数。根据归纳假设，G'是2-面可着色的。再把删去的回路加回到G'中得到G，并且使这条回路外的所有面的颜色保持不变，而回路所围的各面已着两种颜色，将这两种颜色对换，得到G是2-面可着色的。

6.4 边的着色

一、定义

- 定义6.7（边的着色）

  设图G是没有自环的，若对G的边着色，使得没有两条相邻的边着上相同的颜色，称此种着色为***正常边着色***。

  G的边可用k种颜色正常边着色称G是***k-边可着色***。

  使G是k-边可着色的数k的最小值称为G的***边色数***，记为$\boldsymbol{\chi'(G)}$。

  若$\chi'(G)=k$，则称G是***k边色的***。

- 二、性质
- 因为任何一个正常边着色中，每一个顶点关联的边着色不同，所以$\chi'(G)\geq\Delta(G)$。

- 1　定理6.12（1964年，Vizing）

　　设G是一个简单图，它的顶点最大度数是$\Delta(G)$，则$\chi'(G)=\Delta(G)$或者$\chi'(G)=\Delta(G)+1$。

$x'(G)$的上界和下界： $\Delta(G) \leq x'(G) \leq \Delta(G)+1$。

n个点构成的回路，$\Delta(G)=2$，当n为偶数时，$x'(G)=2$；当n为奇数时，$x'(G)=3$。

- 2 定理6.13

  如果G是二分图，则$\chi'(G)=\Delta(G)$。

/*证明方法类似于定理6.10，对边数进行数学归纳*/

- 证明：
- ***归纳基础：*** 边数为1的二分图G中$\Delta(G)=1$，显然$x'(G)=\Delta(G)=1$。
- ***归纳步骤：*** 假设对任何$e-1$条边的二分图，命题成立。对于e条边的二分图G，从G中删去任一边$\{u, v\}$，得G'。根据归纳假设G'的顶点的最大度数是$\Delta(G')$，$\Delta(G')\leq\Delta(G)$，那么G'是$\Delta(G')$-边可着色，显然也是$\Delta(G)$-边可着色，并且在u点和v点的度数$<\Delta(G)$，在u点至少缺少一种颜色，在v点也缺少一种颜色。

- 将边$\{u, v\}$加回得图G，这时G中边$\{u, v\}$尚未着色。如果u点和v点缺少的颜色相同，边$\{u, v\}$着上这种颜色；如果u点和v点缺少的颜色不同，设u点缺少色1，v点缺少色2，则可以作一个连通子图H，它由v点出发的色1和色2交替边构成的路。因为G是二分图，并且子图H不包含u，所以可在H上对换色1和色2，这样并不影响u点已经着上的颜色。于是边$\{u, v\}$着上色1。因此图G是$\Delta(G)$-边可着色的，并且$\chi'(G)=\Delta(G)$。

- 定理6.14

  设K_n是完全图，当n为奇数($n \neq 1$)时，$x'(K_n)=n$，当n为偶数时，$x'(K_n)=n-1$。

6.5 图着色的应用

- 例1（课程表问题）.
- 某学校有m位教师$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$和$n$个班级$y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$，要求教师$x_i$每周给班级$y_j$上$p_{ij}$节课，问如何安排一张周课程表，使所排课时数目尽可能地少？
- /*对任何一个课时，一个教师最多只能给一个班级上课，并且每个班级最多只能由一位教师上课。*/

- 解题思想：利用边的着色理论。

作二分图$G(V_1, V_2)$，$V_1=\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m\}, V_2=\{y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n\}$，$x_i$与$y_j$有边相连当且仅当教师$x_i$给班级$y_j$上了一个课时的课， x_i与y_j间有p_{ij}条边。

根据定理6.13，如果G的顶点最大度数是$\Delta(G)$，则$x'(G)=\Delta(G)$。因此，如果每位教师至多上$\Delta(G)$个课时，并且每个班级至多有$\Delta(G)$个课时，则一定可以安排一张$\Delta(G)$个课时的课程表。在二分图中，同一颜色的边对应于同一课时中教师安排班级上课的情况。

- **例2．色数**
- **1．储藏问题（Storage Problem）．**
- 某公司生产n种化学制品$C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$，其中某些制品是互不相容的。若它们互相接触，就会引起爆炸。作为一种预防措施，该公司希望把仓库分成若干隔间，以便把不相容的化学制品储藏在不同的隔间里。
- 问：这个仓库至少应该分成几个隔间？

- 构造无向图$G(V, E)$, $V=\{x_1, \ldots\ldots, x_n\}$, $\{x_i, x_j\} \in E \Leftrightarrow$化学制品$C_i$和$C_j$互不相容。
- 仓库的最小隔间数等于G的色数$\chi(G)$。

- **2. 电视频道分配问题**
- 某地区有n家电视发射台T_1, T_2, ……, T_n。主管部门对每家电视发射台分配一个频道。为了排除干扰，使用同一频道的发射台之间相距必须大于指定的正数d。
- 问：该地区至少需要多少频道？

- 构造无向图$G(V, E)$, $V=\{x_1, \ldots\ldots, x_n\}$, $\{x_i, x_j\} \in E \Leftrightarrow T_i$和$T_j$之间距离$\leq d$。
- 需要的最小频道数等于G的色数$\chi(G)$。

- 3. 考试安排问题
- 某学校有门选修课程需要进行期末考试。同一个学生不能在同一天里参加两门课程的考试。
- 问：该校的期末考试至少要几天？

- 构造无向图$G(V, E)$, $V=\{x_1, \ldots\ldots, x_n\}$, $\{x_i, x_j\} \in E \Leftrightarrow L_i$和$L_j$被同一位学生选修。
- 考试需要的最少天数等于G的色数$\chi(G)$。

- 4 目前还没有一个有效算法来确定色数。

习题解析1——是非题

- (1)设G_1与G_2是两个平面图，若$G_1 \cong G_2$，则它们的对偶图$G_1^* \cong G_2^*$。
- 假。存在反例。

- (2)任何平面图G的对偶图G*的对偶图G**与G同构。
- 假。任何平面图的对偶图都是连通图，如果G是非连通的平面图，显然命题不成立。

- (3)任何平面图G的对偶图G*的面数r*都等于G的顶点数n。
- 假。如果G是非连通的平面图，r*=n-k+1，其中k为G的连通分支数。

习题解析2——证明题

- （1）*欧拉公式的推广。*设G是具有k(k≥2)个连通分支的平面图，则

$$n - e + f = k + 1$$

其中n, e, f分别是G的顶点数，边数和面数。

/*证明方法：分而治之*/

- 证明：设G的k个连通分支分别为G_1, G_2, ……, G_k， n_i, e_i, f_i分别是G_i的顶点数，边数和面数，i=1, 2, ……, k。由欧拉公式， $n_i - e_i + f_i=2$，i=1, 2, ……, k。
- 求和得

$$\sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} e_i + \sum_{i=1}^{k} f_i = 2k$$

- 而

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n, \sum_{i=1}^{k} e_i = e, \sum_{i=1}^{k} f_i = f + k - 1$$

- 所以$\boldsymbol{n - e + f = k + 1}$。

- （2）设简单平面图G中顶点数n=7，边数e=15，证明G是连通的。
- 证明：反证法。设G是非连通的，连通分支为G_1, G_2, ……, G_k，n_i, e_i分别是G_i的顶点数，边数，i=1, 2, ……, k。
- 若n_i=1，则k=2。此时G是一个平凡图并上一个K_6才能使边数为15，而K_6不是平面图（ K_5也不是平面图）。
- 若n_i=2，则G至多含一条边，另外5个结点构成K_5时边数最多，但只有10条边。
- 所以$n_i \geq 3$， $e_i \leq 3n_i-6$，求和得$e \leq 3n-6k$，代入n=7，e=15，得$15 \leq 21-6k$，则$k \leq 1$，导致矛盾。

- （3）证明：在6个结点12条边的连通平面简单图中，每个面用3条边围成。
- 证明方法：利用欧拉公式进行推导。
- 证明：n-e+f=2, n=6, e=12, f=2-6+12=8;

因为$\sum_{i=1}^{8}\deg(f_i)=2e=24$

而$\deg(f_i)\geq 3$，所以$\deg(f_i)=3$，即每个面用3条边围成。

- （4）设G有11个结点或更多结点的图，证明G或G的补图是非平面图。
- 证明方法：反证法。

- 证明：假设G和G的补图都是平面图。
- 设G的结点数为v，边数为e，G的补图结点数为v'，边数为e'；则v=v'，e+e'=v(v-1)/2。
- 因为e≤3v-6，e'≤3v'-6；所以e+e'= v(v-1)/2 ≤ 6v-12；则v^2 -13v+24≤0, v<11，与假设矛盾。

- （5）证明：小于30条边的平面简单图有一个结点度数小于等于4。
- 证明方法：反证法和欧拉公式的推论。

- 证明：假设每个结点的度数大于4。因为 $2e=\sum deg(v) \geq 5v$，即 $v \leq 2e/5$, 因为 $e \leq 3v-6$, 代入后得 $e \leq 6e/5-6$, 即有 $e \geq 30$，与小于30条边矛盾。