体积形态连续介质有限变形理论—输运方程

谢锡麟　复旦大学 力学与工程科学系

2015 年 4 月 2 日

1　知识要素

1.1　相关变形刻画

性质 1.1 (当前物理构型中有向线元、面元模的物质导数同其之间的关系式).

1. $\overset{\cdot}{\overline{\left|\dfrac{\mathrm{d}\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\mathbb{R}^3}}}(\lambda) = (\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\tau})\left|\dfrac{\mathrm{d}\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\mathbb{R}^3}(\lambda);$

2. $\overset{\cdot}{\overline{\left|\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\lambda}\times\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\mu}\right|_{\mathbb{R}^3}}}(\lambda,\mu) = (\theta-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n})\left|\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\lambda}\times\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\mu}\right|_{\mathbb{R}^3}(\lambda,\mu).$

此处 $\boldsymbol{D}\triangleq\dfrac{\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^*}{2}$ 称为曲线坐标系显含时间有限变形理论的**变形率张量**; $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 分别表示有向线元的指向以及有向面元的单位法向量.

性质 1.2 (当前物理构型中有向线元、面元以及体元的物质导数同其之间的关系式).

1. $\overset{\cdot}{\overline{\dfrac{\mathrm{d}\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\mathrm{d}\lambda}}}(\lambda) = \boldsymbol{L}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda);$

2. $\overset{\cdot}{\overline{\left(\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\lambda}\times\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\mu}\right)}}(\lambda,\mu) = \boldsymbol{B}\cdot\left(\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\lambda}\times\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\mu}\right)(\lambda,\mu);$

3. $\overset{\cdot}{\overline{\left[\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\lambda},\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\mu},\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\gamma}\right]}}(\lambda,\mu,\gamma) = \theta\left[\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\lambda},\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\mu},\dfrac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\gamma}\right](\lambda,\mu,\gamma).$

此处 $\boldsymbol{B}\triangleq\theta\boldsymbol{I}-\square\otimes\boldsymbol{V}$ 称为曲线坐标系显含时间有限变形理论的**面变形梯度**.

1.2　输运方程

1.2.1　第一类输运定理

将第四类变形刻画 (性质1.1) 结合微积分中第一类线积分以及面积分的计算式, 可得第一类输运定理.

1. 物质线第一类输运定理

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{C}}\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}l &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b \boldsymbol{\Phi}\left|\frac{\mathrm{d}\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\mathbb{R}^3}(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{\overset{t}{C}}\dot{\boldsymbol{\Phi}}\mathrm{d}l + \int_{\overset{t}{C}}\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)\mathrm{d}l;\end{aligned}$$

2. 物质面第一类输运定理

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\Sigma}}\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}\sigma &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D_{\lambda\mu}}\boldsymbol{\Phi}\left|\frac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\lambda}\times\frac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\mu}\right|_{\mathbb{R}^3}(\lambda,\mu)\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\overset{t}{\Sigma}}\dot{\boldsymbol{\Phi}}\mathrm{d}\sigma + \int_{\overset{t}{\Sigma}}\boldsymbol{\Phi}\theta\mathrm{d}\sigma - \int_{\overset{t}{\Sigma}}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\overset{t}{\Sigma}}\left[\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) + \Box\cdot(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{\Phi})\right]\mathrm{d}\sigma - \int_{\overset{t}{\Sigma}}\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\cdot(\Box\otimes\boldsymbol{\Phi})\mathrm{d}\sigma \\ &\quad - \int_{\overset{t}{\Sigma}}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

1.2.2 第二类输运定理

将第三类变形刻画 (性质1.2) 结合微积分中第二类线积分以及面积分的计算式, 可得第二类输运定理. 以下 $\circledcirc$ 表示任何合法的张量代数运算.

1. 物质线第二类输运定理

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{C}}\boldsymbol{\Phi}\circledcirc\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b\boldsymbol{\Phi}\circledcirc\frac{\mathrm{d}\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{\overset{t}{C}}\dot{\boldsymbol{\Phi}}\circledcirc\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l + \int_{\overset{t}{C}}\boldsymbol{\Phi}\circledcirc(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}l, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{C}}\boldsymbol{\tau}\circledcirc\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}l &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b\frac{\mathrm{d}\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)\circledcirc\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{\overset{t}{C}}\boldsymbol{\tau}\circledcirc\dot{\boldsymbol{\Phi}}\mathrm{d}l + \int_{\overset{t}{C}}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{L}^*)\circledcirc\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}l;\end{aligned}$$

2. 物质面第二类输运定理

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\Sigma}}\boldsymbol{\Phi}\circledcirc\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D_{\lambda\mu}}\boldsymbol{\Phi}\circledcirc\left(\frac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\lambda}\times\frac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\mu}\right)(\lambda,\mu)\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\overset{t}{\Sigma}}\dot{\boldsymbol{\Phi}}\circledcirc\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma + \int_{\overset{t}{\Sigma}}\boldsymbol{\Phi}\circledcirc(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\Sigma}}\boldsymbol{n}\circledcirc\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}\sigma &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D_{\lambda\mu}}\left(\frac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\lambda}\times\frac{\partial\overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\mu}\right)(\lambda,\mu)\circledcirc\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\overset{t}{\Sigma}}\boldsymbol{n}\circledcirc\dot{\boldsymbol{\Phi}}\mathrm{d}\sigma + \int_{\overset{t}{\Sigma}}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}^*)\circledcirc\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}\sigma;\end{aligned}$$

3. 物质体输运定理

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{V}} \boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}\tau &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D_{\lambda\mu\gamma}} \boldsymbol{\Phi}\left[\frac{\partial \overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\lambda}, \frac{\partial \overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\mu}, \frac{\partial \overset{t}{\boldsymbol{X}}}{\partial\gamma}\right]_{\mathbb{R}^3}(\lambda,\mu,\gamma)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\overset{t}{V}} \dot{\boldsymbol{\Phi}}\mathrm{d}\tau + \int_{\overset{t}{V}} \theta\,\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\overset{t}{V}} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) + \square\cdot(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{\Phi})\right]\mathrm{d}\tau - \int_{\overset{t}{V}} \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\cdot(\square\otimes\boldsymbol{\Phi})\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\overset{t}{V}} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\tau + \oint_{\partial\overset{t}{V}} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\tau - \int_{\overset{t}{V}} \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)\cdot(\square\otimes\boldsymbol{\Phi})\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

式中不失一般性地认为体积转换项始终为正, 并且最后等式的获得利用了 Gauss-Ostrogradskii 公式.

2 应用事例

3 建立路径

- 为计算物质系统 (物质线, 物质面以及物质体) 上张量场的第一类或第二类积分, 首先按微积分中曲线积分, 曲面积分以及体积分的计算方法将积分转化至参数域, 由于参数域不随时间变化, 故对于时间的导数可以直接移至积分内 (对参数域上的被积张量进行求导), 结合变形刻画可以将所有情形的参数域上的积分再转化至当前构型中物质系统上的积分, 由此可建立所有形式的输运定理.
- 本讲稿获得输运定理的思想与方法基于微积分并利用严格形式的变形刻画, 故分析过程及结论完全严格. 很多文献采用体积元的方法推导体积上输运定理, 实际为物质导数的极限分析. 这样的方法 "貌似" 物理意义清晰, 但却难以推广至物质面, 物质线上的输运问题.