

高等数学*开放性实验 初步设想

—— 理论类课程理论联系实际和实践方式之一

基本理念

1. 理论联系实际是我们认识自然及非自然世界的基本的方法论指引。
2. 世界顶级数学家 V. I. Arnold 在其《论数学教学》中开门见山地指出“数学是物理的一部分；物理是实验科学，是自然科学的一部分；数学是物理中做实验比较便宜的那部分”。此处的物理应理解为包括力学等的广泛的物理范畴。借鉴于 V. I. Arnold 有关数学同自然间的关系，我们将认识自然及非自然世界的方法归纳为三种：①“真实实验”；②“数值实验”；③“数学实验”。前二者在力学、物理等学科上已为共识。数学实验，基于数学建模及相关逻辑过程；她可能在某些情形下可以直接确定籍此类实验获得的结论必为真理（确定性结论），而有些情形所得结论（非确定性结论）需基于实践的检验。

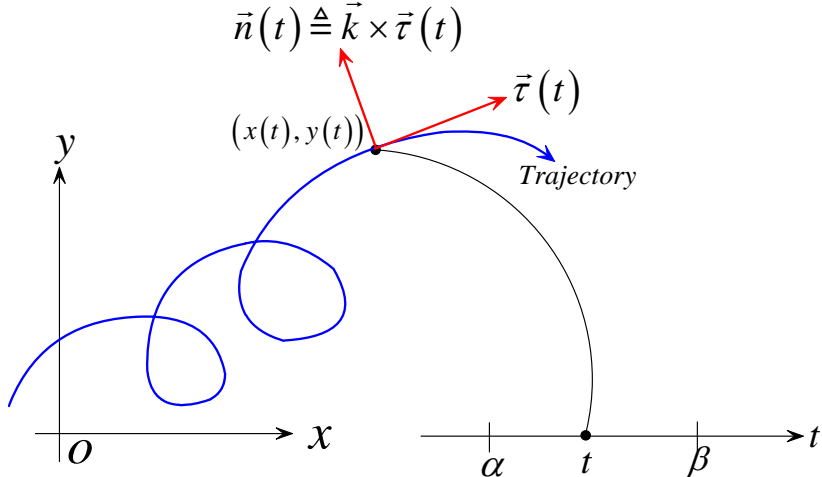
数学实验的主要类别（对具体某项实验可能涉及若干方面）

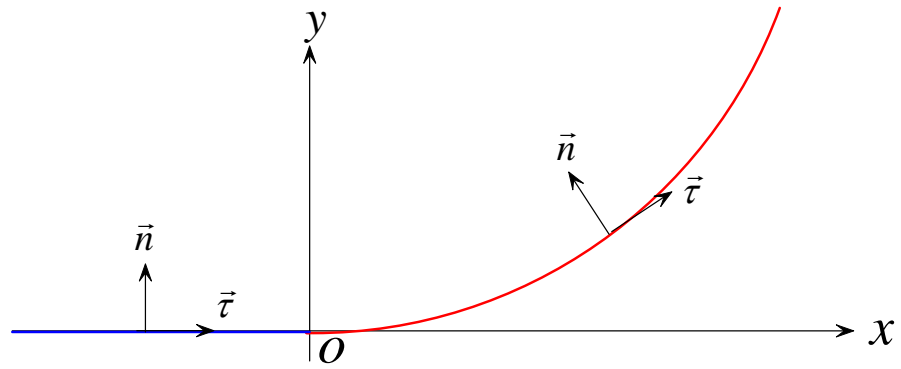
- ① 通过真实实验或者数值实验验证数学实验的确定性结论。
- ② 通过真实实验或者数值实验检验数学实验的非确定性结论或者探究数学实验未能涉及的对象。
- ③ 将面对简单情形的数学实验之思想及方法延拓至复杂情形的研究，并通过数值实验或者真实实验获得相关认识。
- ④ 激发“奇思妙想”，尽量基于简单的真实实验验证或检验数学实验或数值实验所预测的结论，并注重发现新现象。
- ⑤ 通过数值实验或者真实实验将数学实验中的抽象对象（事务或者过程）具体化，以期深化对抽象对象的认识。
- ⑥ 基于真实实验或者数值实验研究数学实验的定性结论。定性结论是数学研究成果的重要形式，然而我们往往知道“存在”，而不知具体的“行为”；由此我们可采用其他实验形式加以研究。

注：以下附若干数学实验研究事例；均隶属微积分方面的数学实验。

* 此处高等数学泛指大学阶段的各门数学课程，也包括相关数值方法等。

数学实验研究事例

实验名称	转轨设计
实验类别	通过真实实验验证数学实验的确定性结论，探究数学实验未能涉及的对象
研究团队	
指导教师	
研究背景	<div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;">对于平面运动，我们可以构建自然基，如上图所示。基于一维 Euclid 空间上微分学，可得切向加速度、法向加速度的表示：</p> $a_\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} (\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y})(t) = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(t)$ $a_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} (\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y})(t)$ $= \begin{cases} \operatorname{sgn} \left[+ \frac{d^2 y}{dx^2}(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \right] \kappa(t) \vec{v}(t) ^2 & \text{as } \dot{x}(t) \neq 0 \\ \operatorname{sgn} \left[- \frac{d^2 x}{dy^2}(y(t)) \cdot \dot{y}(t) \right] \kappa(t) \vec{v}(t) ^2 & \text{as } \dot{y}(t) \neq 0 \end{cases}$ <p>此处 $\kappa(t) \triangleq \frac{1}{\rho(t)} = \frac{ \ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y} }{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}(t)$ 为曲率。</p> <p style="text-align: center;">将上述理论应用于变轨设计：</p>



如上图所示的变轨，可有如下设计方案：

方案 1: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{as } x \leq 0 \\ R - \sqrt{R^2 - x^2} & \text{as } x > 0 \end{cases}$, 有: $\begin{cases} a_n(0-0) = 0 \\ a_n(0+0) = \frac{|\vec{v}(0)|^2}{R} \end{cases}$,

按理论，车辆运动至 o 点将“感受跳跃”。

方案 2: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{as } x \leq 0 \\ \lambda \cdot x^p & \text{as } x > 0 \end{cases}$, 有: 当 $p > 2$ 时, $\begin{cases} a_n(0-0) = 0 \\ a_n(0+0) = 0 \end{cases}$,

按理论，车辆运动至 o 点将“连续过渡”。

按平面运动在自然基下的表示，我们认识到：

1. 变轨设计应遵循曲率连续的原则，对应轨迹的二阶导数连续。然而，我们肉眼可以“察觉”连续性（图像无间断），一阶导数连续性（切线连续变化），但对二阶导数连续性似乎“无能为力”；我们也无法“察觉”幂函数 $\lambda \cdot x^p$ 对应 $p \leq 2$ 和 $p > 2$ 的区别。
2. 轨迹中如有点其二阶导数不存在，则平面运动在自然基下的表示就不成立（对于典则基也是如此）。由此，转轨设计中，按方案 1，我们理论上无法“预测”在 o 点将发生什么，车辆所受弹力将会是多少等？

基于真实实验

实验目标
(内容)

1. 验证上述方案 1 和方案 2 的理论结论。体会幂函数 $\lambda \cdot x^p$ 对应 $p \leq 2$ 和 $p > 2$ 的区别。
2. 认识二阶导数不存在情形的运动情况。

<p>实验方案</p>	<p>变轨及运动刚体实现:</p> <p>方案 1: 竖直变轨。基于坐标纸, 利用薄钢片制作变轨。车辆可选择金属滑块或玩具小车。</p> <p>方案 2: 水平或竖直变轨。基于坐标纸, 利用钢丝制作变轨。车辆可利用中心穿孔钢珠, 将钢珠串在钢丝内。</p> <p>测试实现:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 在运动刚体上固定加速度传感器, 以测量运行过程的瞬时加速度。 2. 通过光电门测量轨迹某点的瞬时速度。
<p>实验需求</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 导轨制作所需材料等。 2. 加速度传感器 3. 光电门
<p>成果形式</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 真实实验装置及测试系统 2. 研究报告

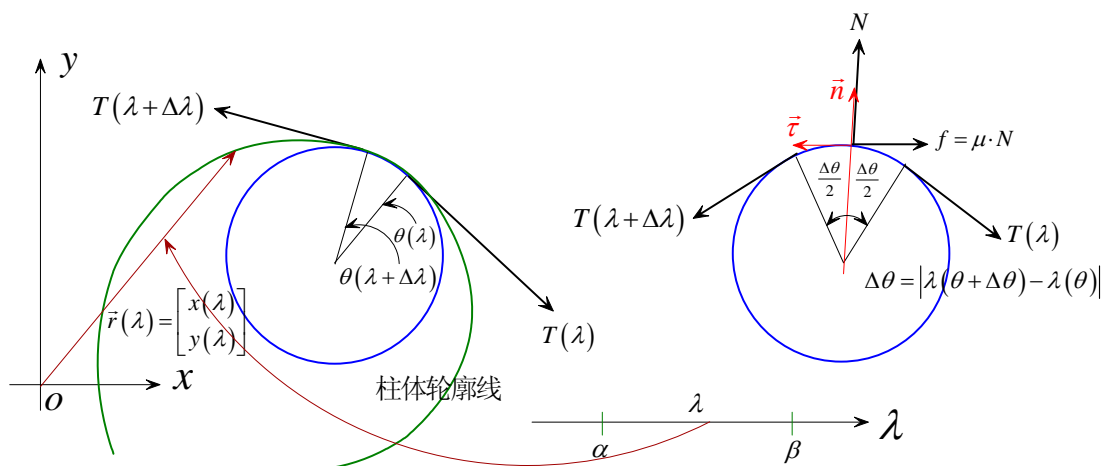
数学实验研究事例

实验名称	铁道游击队的技术——两点间直线运行过程加速度估计理论的实现
实验类别	通过真实实验验证数学实验的确定性结论，探究数学实验中定性结论的具体行为；激发“奇思妙想”，基于简单的真实实验验证和检验数学实验所预测的结论，并注重发现新现象。
研究团队	
指导教师	
研究背景	<p>一维 Euclid 空间上的微分学，基于有限增量公式以及最值问题处理等，对于函数及其各阶导函数的界给予了一些估计。其中有：</p> <p style="text-align: center;">$f(t)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，满足：$\frac{df}{dt}(a) = \frac{df}{dt}(b) = 0$</p> <p>则有：$\exists \xi \in [a,b]$，满足 $\left \frac{d^2 f}{dt^2}(\xi) \right \geq \frac{4}{(b-a)^2} \cdot f(b) - f(a)$</p> <p>我们将上述结论应用于二点间直线运行过程。由此 $f(t)$ 作为位移，$[a,b]$ 作为运行时间区间；自然二点间的运行满足起点及终点处速度为零，即：</p> <p style="text-align: center;">$\frac{df}{dt}(a) = \frac{df}{dt}(b) = 0$。</p> <p>由此，按上述结论，我们认识到：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 运行过程中某时刻的加速度将会超过 $\frac{4 \cdot \text{行程}}{\text{运行时间}^2}$（定义为阈值）。 2. 理论上未能确定加速度超过 $\frac{4 \cdot \text{行程}}{\text{运行时间}^2}$ 的具体时间。
实验目标 (内容)	<p>基于真实实验</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 验证上述理论预测。 2. 研究具有相同行程、相同运行时间，而行进方式不同的运行过程，发生加速度超过阈值的时间点分布情况。
实验方案	<p>方案 1：物体实验。制作导轨以及其上的滑块，利用绳索从起点拉制终点，要求滑块运行时间固定且至终点时速度为零。在滑块上固定加速度传感器，测量加速度超过阈值的时间。</p> <p>方案 2：游戏。要求在固定时间内，由从起点走向终点，且至终点时速度为零；</p>

	<p>在进行实验的人身上放置加速度传感器，当加速度超过阈值时就接通蜂鸣器（作为警报）。试试看我们是否能“逃过”警报；比比看谁的警报最少或者最晚：）</p> <p>方案 3：结合方案 1，激发“奇思妙想”，在滑块上设置“爆破装置”，保证在运行过程中发生爆破。尽量使得“爆破装置”隐蔽，如通过利用惯性力进行引爆等等。</p>
<p>实验需求</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 导轨制作所需材料等。 2. 加速度传感器 3. 计时器 4. 设计引爆装置所需的相关材料
<p>成果形式</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 真实实验装置及测试系统 2. 研究报告

数学实验研究事例

实验名称	牧童栓牛——对绳上张力分布的研究
实验类别	通过真实实验验证数学实验的确定性结论，探究数学实验中定性结论的具体行为；激发“奇思妙想”，基于简单的真实实验验证和检验数学实验所预测的结论，并注重发现新现象。
研究团队	
指导教师	
研究背景	<div style="text-align: center;"> </div> <p>作为一维 Euclid 空间上微分学的应用，我们可以分析绕在圆柱上的绳的张力，现已知二段的张力，如上图所示。对此，进行如下的数学实验：</p> <p>① 基于力学中的微元分析，获得力平衡方程：</p> $T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \cdot \cos \frac{\Delta\theta}{2} = T(\theta) \cdot \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \mu \cdot N$ $N = T\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta\theta}{2} + T(\theta) \cdot \sin \frac{\Delta\theta}{2}$ <p>此处，μ 为绳子同圆柱之间的静摩擦系数。</p> <p>② 基于无限小分析（主要基于无限小增量公式），可得关于张力分布的常微分方程：$\frac{dT}{d\theta}(\theta) = \mu \cdot T(\theta)$，籍此可得：$\frac{T_b}{T_a} = \exp(\mu \cdot (\theta_b - \theta_a))$</p> <p>基于上述结论，考虑到指数函数的“快速增长”特性（可由极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$ 反映），牧童可以通过将绳子在树上绕过几圈的方式，用较小的拉力拴住“力大无穷”的牛。</p>



进一步，我们考虑绕在一般形状柱体上的绳中的张力，如上图所示。借鉴于上述面对简单情形的数学实验，我们开展面对复杂情形的数学实验：

① 基于力学中的微元分析，获得力平衡方程：

$$T(\lambda + \Delta\lambda) \cdot \cos \frac{|\theta(\lambda + \Delta\lambda) - \theta(\lambda)|}{2} = T(\lambda) \cdot \cos \frac{|\theta(\lambda + \Delta\lambda) - \theta(\lambda)|}{2} + \mu \cdot N$$

$$N = T(\lambda + \Delta\lambda) \cdot \sin \frac{|\theta(\lambda + \Delta\lambda) - \theta(\lambda)|}{2} + T(\lambda) \cdot \sin \frac{|\theta(\lambda + \Delta\lambda) - \theta(\lambda)|}{2}$$

此处圆柱轮廓曲线刻画为：

$$\vec{r}(\lambda) : [\alpha, \beta] \ni \lambda \mapsto \vec{r}(\lambda) = \begin{bmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \end{bmatrix}$$

斜率角 θ 可为轮廓曲线参数 λ 的函数 $\theta = \theta(\lambda)$ ；且有：

$$\operatorname{tg}\theta(\lambda) = \begin{cases} \frac{dy}{dx}(x(\lambda)) = \frac{\dot{y}(\lambda)}{\dot{x}(\lambda)} & \text{as } \dot{x}(\lambda) \neq 0 \\ \frac{dx}{dy}(y(\lambda)) = \frac{\dot{x}(\lambda)}{\dot{y}(\lambda)} & \text{as } \dot{y}(\lambda) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{故有： } |\dot{\theta}|(\lambda) = \frac{|\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}|}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(\lambda) = \kappa(\lambda) \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

② 基于无限小分析，我们可以获得：

$$\frac{dT}{d\lambda}(\lambda) = \mu \cdot \left[\kappa(\lambda) \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(\lambda) \right] \cdot T(\lambda)$$

则有：

$$T(\lambda) = T(\alpha) \cdot \exp \left[\mu \cdot \left(\int_{\alpha}^{\lambda} \left[\kappa(\xi) \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(\xi) \right] d\xi \right) \right], \text{ 籍此可得：}$$

	<p>两端张力比: $\frac{T(\beta)}{T(\alpha)} = \exp\left[\mu \cdot \left(\int_{\alpha}^{\beta} \left[\kappa(\xi) \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(\xi)\right] d\xi\right)\right]$</p> <p>显见, 上述一般性结论包含圆柱情形。</p> <p>基于上述面对简单情形以及一般情形的数学实验, 我们可以验证相关数学实验结论。</p>
<p>实验目标 (内容)</p>	<p>基于真实实验</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 基于真实实验验证上述面对简单情形以及一般情形的数学实验结论。 2. 归纳不同柱体轮廓曲线对二端张力比的影响; 籍此研究“最优”的柱体轮廓曲线。
<p>实验方案</p>	<p>方案 1: 用圆柱或其他形状的柱体 (比如截面曲线是椭圆, 螺线……), 其他条件相同的条件下, 测试张力分布, 与 (1) 式的解比照</p> <p>方案 2: 改变初始条件 (比如改变细绳一端悬挂砝码的质量) 测试张力分布</p> <p>方案 3: 选用不同材料 (例如: 表面光滑的钢铁, 粗糙的木头……), 相同形状的圆柱, 在初始条件相同的情况下, 测试张力分布, 甚至可以用这种办法, 测出未知材料的摩擦系数</p> <p>方案 4: 改变细绳的缠绕方式 (比如细绳在柱面上以等距螺线方式缠绕), 测试张力分布, 探究此时张力分布的一些规律。</p> <p>测试实现: 利用力传感器, 将细绳的一端与传感器连接, 另一端与已知质量的砝码连接, 然后用细绳在柱体上缠绕一定角度。系统平衡后, 将连接力传感器的一端逐渐缓慢展开 (相当于减小 θ) 此时计算机绘制出力变化的图线, 得到张力分布</p>
<p>实验需求</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 计算机以及力传感器; 2. 各种形状不同, 材料相同的柱体 3. 各种材料不同, 形状相同的圆柱体 4. 不同质量的砝码, 以及长度足够长的细绳 5. 测量角度的仪器

成果形式	<ol style="list-style-type: none">1. 真实实验装置及测试系统2. 研究报告
------	--

数学实验研究事例

实验名称	基于数值实验研究带有约束的最值问题
实验类别	通过数值实验将数学实验中的抽象对象（事务或者过程）具体化，以期深化对抽象对象的认识。
研究团队	
指导教师	
研究背景	<p style="text-align: center;">\mathbb{R}^m 中带有约束的最值问题，数学提法如下：</p> <p style="text-align: center;">约束： $\Sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = \begin{bmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^r \end{bmatrix} (x) = 0 \in \mathbb{R}^r \right\}$</p> <p>现求： $x_* \in \Sigma$，满足： $\theta(x_*) = \sup_{\Sigma} \theta(x)$ 或者 $\theta(x_*) = \inf_{\Sigma} \theta(x)$，此处 $\theta(x) \in \mathbb{R}$ 为目标函数。</p> <p>对此问题的分析基于有限维 Euclid 空间中的隐映照定理，针对上述约束，有以下结论：</p> <p>如有： $x_0 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \hat{x}_0 \end{bmatrix} \in \Sigma$，满足： $D_{\hat{x}} f(\tilde{x}_0, \hat{x}_0) \triangleq \frac{D(f^1, \dots, f^r)}{D(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^r)}(\tilde{x}_0, \hat{x}_0) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 非奇异，则有：</p> <p>$\exists B_\lambda(\tilde{x}_0) \subset \mathbb{R}^{m-r}$， $B_\mu(\hat{x}_0) \subset \mathbb{R}^r$，满足：</p> <p>$\forall \tilde{x} \in B_\lambda(\tilde{x}_0)$， $\exists \hat{x} \in B_\mu(\hat{x}_0)$，满足约束 $f(\tilde{x}, \hat{x}) = 0 \in \mathbb{R}^r$。</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> <p style="text-align: right; margin-right: 10%;"> $B_\lambda(\tilde{x}_0) \times B_\mu(\hat{x}_0)$ $[B_\lambda(\tilde{x}_0) \times B_\mu(\hat{x}_0)] \cap \Sigma = \varphi(B_\lambda(\tilde{x}_0))$ $B_\lambda(\tilde{x}_0)$ </p> </div>

隐映照定理结论的几何刻画，如上图所示：

局部柱体 $B_\lambda(\tilde{x}_0) \times B_\mu(\hat{x}_0) \subset \mathbb{R}^m$ 中， Σ 为隐映照图像： $\left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \varphi(\tilde{x}) \end{bmatrix} \mid \forall \tilde{x} \in B_\lambda(\tilde{x}_0) \right\}$

由此，定义在约束 Σ 上的目标函数 $\theta(x)$ ，在局部等价于：

$$\tilde{\theta}(\tilde{x}) \triangleq \theta(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})), \quad \forall \tilde{x} \in B_\lambda(\tilde{x}_0)$$

基于链式求导法则，其临界点方程为：

$$\begin{aligned} D\tilde{\theta}(\tilde{x}_*) &= D_{\tilde{x}}\theta(\tilde{x}_*, \varphi(\tilde{x}_*)) + D_{\hat{x}}\theta(\tilde{x}_*, \varphi(\tilde{x}_*)) \cdot D\varphi(\tilde{x}_*) \\ &= D_{\tilde{x}}\theta(\tilde{x}_*, \varphi(\tilde{x}_*)) + D_{\hat{x}}\theta(\tilde{x}_*, \varphi(\tilde{x}_*)) \cdot \left[-(D_{\hat{x}}f)^{-1} \cdot D_{\tilde{x}}f \right](\tilde{x}_*, \varphi(\tilde{x}_*)) = 0 \end{aligned}$$

一般处理带有约束的最值问题，常采用 Lagrange 乘子法；所引入的高阶 Lagrange 函数的临界点方程同上述方程一致。

基于上述理论，我们拟直接基于上述临界点方程，通过数值实验“搜索”临界点。其主要步骤如下：

- ① 基于有限维 Euclid 空间中有界闭集上的压缩映照定理，限定 $B_\lambda(\tilde{x}_0) \subset \mathbb{R}^{m-r}$ 和 $B_\mu(\hat{x}_0) \subset \mathbb{R}^r$ 。
- ② 对于 $\forall \tilde{x} \in B_\lambda(\tilde{x}_0)$ ，通过迭代过程确定压缩映照的“不动点” $\hat{x} \in B_\mu(\hat{x}_0)$ ；籍此获得离散的对应关系： $\forall B_\lambda(\tilde{x}_0) \ni \tilde{x} \mapsto \varphi(\tilde{x}) \in B_\mu(\hat{x}_0)$ ，亦即离散的隐映照表示。
- ③ 当获得隐映照表示，则可基于上述临界点方程，通过数值实验“筛选”出临界点。需指出，上述临界点方程所含各映照的 Jacobian 矩阵都有解析式。

**实验目标
(内容)**

基于数值试验

方案 1：寻找适合的事例，使得理论上可以获得隐映照的表达式。基于上述数值实验获得隐映照的数值表示以检验程序的正确性等。

方案 2：对多个复杂的高维事例，进行数值实验。主要研究内容有：①探究数值实验中如何保证有限维 Euclid 空间中有界闭集上的压缩映照定理所需的条件。

②相关事例对应的隐映照实际存在的空间范围等。

实验方案	
实验需求	台式计算机
成果形式	<ol style="list-style-type: none">1. 数值实验程序2. 研究报告