第一讲

第一章　麦克斯韦方程组

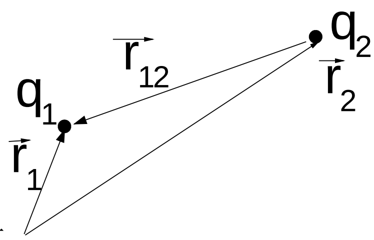
我们在《电磁学》中已经学到了许多电磁现象，而在哪里的数学语言比较简单，比如，通常指利用到积分运算。在《电动力学》，我们使用的数学工具将比较复杂，将主要使用矢量微分运算。本章中，我们将利用矢量运算的语言简要回顾一下 Maxwell 方程，为以后章节中利用这组方程继续深入了解各种电磁现象打下基础。

一、　静电现象的基本理论描述

1．库仑定律

人们定量研究电磁现象是从库伦开始的。1785 年，Coulomb 做了大量的实验总结出真空（空气）中两个点电荷（自身尺寸无限小）之间的作用力满足

$$\boxed{\vec{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^{\ 3}}\vec{r}_{12}} \qquad (1.1.1)$$



其中 q_1,q_2 为两个点电荷所带的电量（单位为 C），

$\varepsilon_0\approx 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$ 为真空介电常数，

$\vec{r}_{12}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ 为 2 指向 1 的矢量。(1.1) 式是由大量实验事实总结出来的数学表达式，物理意义包含了：

1）牛顿第三定律　$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$

2）向心力

3）平方反比

4）同性相斥、异性相吸

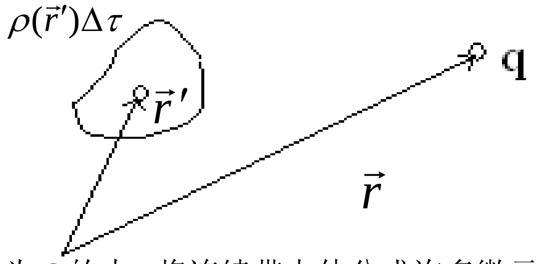
2．叠加原理

库仑定律是针对一对点电荷成立的，若同时存在多个点电荷会如何呢？另外，自然界存在的带电体大多数为连续带电体，对这种情况，静电力又如何描述呢？实验发现，当同时存在多个电荷时，某一特定电荷所受的作用力为其他所有电荷独立施与其上的作用力的线性叠加：

$$\boxed{\vec{F}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{q_iq_j}{r_{ij}^{\ 3}}\vec{r}_{ij}} \qquad (1.1.2)$$

这个原理的核心在于：***电荷之间的相互作用为两体相互作用，与第 3 者的存在与***

*否、大小、正负号都没有关系。*这也是一个实验定律，被大量实验事实所证实。有了这个定律，我们可以非常容易地计算连续带电体之间的相互作用力。



考虑一个连续带电体对处于 $\vec{r}$ 带电量为 q 的力。将连续带电体分成许多微元，其中一个为处于 $\vec{r}_2=\vec{r}'$ 带电量为 $q_2=\rho(\vec{r}')\Delta\tau$ 的点电荷。这里 $\rho(\vec{r}')=\left.\frac{\Delta q}{\Delta\tau}\right|_{\Delta\tau\to 0}$ 为电荷密度，而 $\Delta\tau$ 为此微元的体积。 则根据库仑定律以及线性叠加原理，整个带电体对 q_1 的静电力为

$$\boxed{\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{q\rho(\vec{r}')d\tau}{R^3}\vec{R}} \qquad (1.1.3)$$

其中，$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,'$。*（注：一般情况下我们把源所出的坐标用 $\vec{r}\,'$ 标记，观察点所处的座标用 $\vec{r}$ 标记，由源到观察点的矢量用 $\vec{R}$ 来标记）*。

进一步推广，当有两个连续带电体，其电量分布分别为 ρ_1,ρ_2 时，带电体 1 受到带电体 2 的总的静电力为

$$\boxed{\vec{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau\tau'}\frac{\rho_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r}')d\tau d\tau'}{R^3}\vec{R}} \qquad (1.1.4)$$

3．电场

由（1.1.3）可知，对电荷 q 来说，其所受的力与其本身的电量成正比。这启发我们定义一个物理量

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r})=\vec{F}(\vec{r})/q} \qquad (1.1.5)$$

这个新的物理量与放在这个位置的电荷没有任何关系，而只与空间其他电荷在此地产生的效果有关。这个量被称为电场。电场的引入，不仅方便我们计算静电力，更重要的是给了我们一个静电相互作用的新的图像

电荷 q_1 $\xleftrightarrow{\text{超距}}$ 电荷 q_2 原来的

电荷 q_1 $\Longleftrightarrow$ 电场 $\Longleftrightarrow$ 电荷 q_2 新

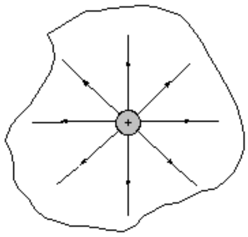
这个图像与原有的超距相互作用的图像不一致，关键是有没有作为作用力中介的电场。在静电范畴分辨不出这两种图像的区别，但场随时间变化时，可以清楚地看到电场向象所有其他物质一样，具有能量、动量等，是一种客观存在的物质。显然，一个连续带电体在空间产生的电场为

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(\vec{r}')d\tau}{R^3}\vec{R}} \qquad (1.6)$$

4．电场的散度性质-高斯定理

要完整了解一个矢量场的性质，我们需知道这个场的散度和旋度两方面的性质，换句话说，我们需知道场对任意闭合曲面的面积分，及对任意闭合曲线的线积分。关于场的散度性质，我们需知道对于任何闭合曲面电场的面积分。在《电磁学》中我们知道$\oint \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S}=Q/\varepsilon_0$。证明如下：

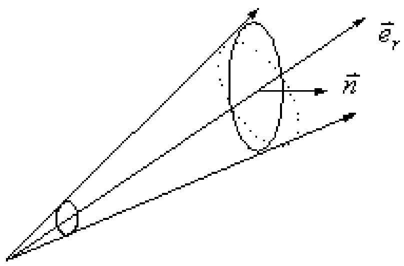
我们先来看点电荷的情况： $\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{e}_r$



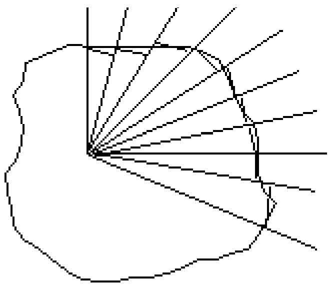
① 闭合曲面包含电荷

$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{S}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot\Delta S'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot r^2\cdot\Delta\Omega=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\Omega$$



则， $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\int\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega=\frac{q}{\varepsilon_0}$

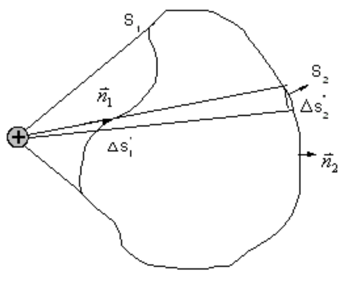


② 闭合曲面内不包含电荷

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\int\vec{E}\cdot d\vec{S}_1+\int\vec{E}\cdot d\vec{S}_2$$

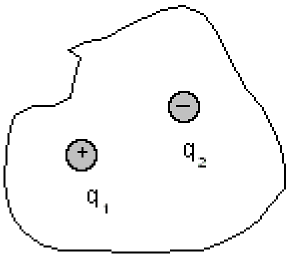
$$=\sum_{i=1}^{N}\vec{E}(\vec{r}_i)\cdot\Delta\vec{S}_i^1+\sum_{j=1}^{N}\vec{E}(\vec{r}_j)\cdot\Delta\vec{S}_j$$

$$=\sum_i\left[\Delta\Omega_i+(-\Delta\Omega_i)\right]=0$$



③ *线性叠加原理*

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0}=\int_\tau \rho(\vec{r})\cdot d\tau/\varepsilon_0} \qquad (1.1.7)$$



此即为 Gauss 定理的数学表达形式。利用数学工具，我们进一步得到 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_\tau \nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})d\tau=\int_\tau \rho(\vec{r})\cdot d\tau/\varepsilon_0$ 考虑到曲面的任意性，我们得

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=\rho(\vec{r})/\varepsilon_0 \qquad (1.1.8)$$

上式为 Gauss 定理的微分表达式。从几何上理解，Gauss 定理描述的是场线是否有奇点，当散度为 0 时，场线在此处连续，而散度不为 0 时就表示空间出现了奇点（或导致场线汇聚、或导致发散）。直接对（1.6）式中电场求散度，得

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \rho(\vec{r}')d\tau\left(\nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\right) \qquad (1.1.9)$$

对比（1.1.9）与（1.1.8），我们得到一个非常有用的公式

$$\boxed{\nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}=4\pi\delta(\vec{R})} \qquad (1.10)$$

Tips：严格直接证明上述公式相当不容易，很多时候把它当作已知的公式直接使用。

习题

P. 30.　1.1,　1.2,　1.3