第八讲

上次课：

- 导体静电边界条件：$\varphi|_{Surface}=const.;\quad -\varepsilon\oint dS\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{Surface}=Q$

- Green 及 Green 互易定理：$\sum_{i=1}^{m} q'_i\phi_i=\sum_{i=1}^{m} q_i\phi'_i$

- 静电导体系的电场总能：$W=\dfrac{1}{2}\sum_i \phi_i Q_i$；电容系数：$Q_i=\sum_j C_{ij}\phi_j$

3．固有能和相互作用能

设有两个带电体 1 和 2，他们在空间激发的电场分别为 $\vec{E}_1$和$\vec{E}_2$，则空间总的电场为 $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$ 。 因此，体系的总能量

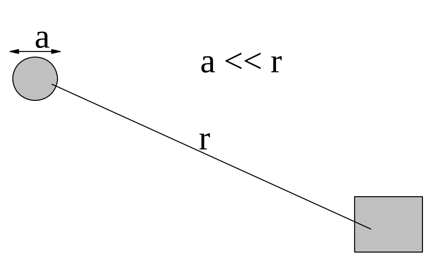
$$W=\frac{\varepsilon}{2}\int\vec{E}^2d\tau=\underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\int E_1^2d\tau+\frac{\varepsilon}{2}\int E_2^2d\tau}_{W_1+W_2}+\underbrace{\varepsilon\int\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2d\tau}_{W_{\rm int}}\qquad(3.3.9)$$

由上式可以看出，系统的总能量由两部分组成。当如下条件之一存在时

（1）两个带电体自身的尺寸远远小于它们之间的距离时，

（2）一个带电体的电量及尺寸远远小于另一个带电体的电量及尺寸，

两个带电体上的电荷分布不因两个带电体之间的相对构型的不同而不同。在这个条件下，上式右方第一和第二项表示 1 或 2 带电体单独存在时的能量 W_1和W_2，称为<u>固有能</u>；上式右方的第三项表示两个体系合起来之后与原来单独存在时的能量差，称为<u>相互作用能</u>，可写成



$$W_{\rm int}=\varepsilon\int\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2d\tau=\varepsilon\int\nabla\varphi_1\cdot\nabla\varphi_2d\tau$$

其中 φ_1,φ_2 为两个带电体<u>单独存在时</u>的空间的电势分布，分别满足

$$\nabla^2\varphi_1=-\rho_1/\varepsilon,\quad \nabla^2\varphi_2=-\rho_2/\varepsilon$$

其中 ρ_1,ρ_2 为两个带电体的电荷分布。可以利用分部积分将上式进一步简化：

$$W_{\rm int}=\varepsilon\int\nabla\cdot(\varphi_1\nabla\varphi_2)d\tau-\varepsilon\int\varphi_1\nabla^2\varphi_2d\tau=\int\varphi_1(\vec{r})\rho_2(\vec{r})d\tau$$

因为两个带电体的自身的尺寸<<它们之间的间距，φ_1在带电体 2 的所处的区间内近似为一常数，则

$$\mathrm{W}_{12} \approx \varphi_1 \int_v \rho_2 d\tau = \varphi_1 q_2 \qquad (3.3.10)$$

此即是相互作用能的表达式。显然（3.3.10）可以应用于小的电荷体系（如点电荷）在大的电荷体系产生的电场中（满足条件（2）），以及点电荷之间的相互作用能（满足条件（1））。

点电荷在外电场中

对一个点电荷 q 放置于外电场中，设点电荷所在的位置处外电场的电势为 $\varphi_{ext}(\vec{r})$，则这个体系的相互作用能为

$$\mathrm{W}_{\mathrm{int}} = q\varphi_{ext}(\vec{r}) \qquad (3.3.11)$$

注意：这个相互作用能是点电荷和外场共有的，不是点电荷自身的。可以与运动粒子在静磁场中的附加动量 $\Delta\vec{\mathrm{P}} = q\vec{A}_{ext}(\vec{r})$ ***相比较，均为带电体与外场共有的“相互作用能（动）量。***

电荷系的相互作用能

现在考虑由一系列点电荷组成的体系的相互作用能。首先考虑相距为 R 的两个点电荷 q_1和q_2 的相互作用能

$$\mathrm{W}_{\mathrm{int},12} = q_1\varphi_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

其中 φ_2 是电荷 q_2 在电荷 q_1 处的势. 同理我们也可以把 $\mathrm{W}_{\mathrm{int},12}$ 表示为 $q_2\varphi_1$，其中 φ_2 为 q_1 电荷在电荷 q_2 的势，所以相互作用能可以写为

$$\mathrm{W}_{\mathrm{int},12} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)$$

因此，有 n 个电荷的体系，其相互作用能可以表示为

$$W_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq\beta}^{n} q_\alpha \varphi_\beta^\alpha \qquad (3.3.11)$$

这里 φ_β^α 是指第 β 导体在第 α 个导体处产生的电势。定义

$$\phi_\alpha = \sum_{\beta\neq\alpha} \varphi_\beta^\alpha \qquad (3.3.12)$$

物理意义为***除电荷*** q_α ***之外***所有其余电荷在电荷 q_α 处的势之和，则有

$$W_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}^{n} q_\alpha \phi_\alpha \qquad (3.3.13)$$

注意此处（3.3.13）的形式虽然与 W 的形式很类似，但ϕ_α 的含义与总能中φ_α 的含义不同 – 前者刨去了自己对自己的贡献，也就是能量中的固有能。相互作用能可正可负，但总能量严格为正。

§ 3.4 静电体系的稳定性问题

我们已经研究了给定导体位置的构型时的静电问题，但静电体系处在这个构型下是否是稳定的？稳定时体系的中电荷分布及导体的构型应满足什么条件？要回答这些问题，我们需要研究体系的能量，因为体系的稳定状态对应于能量取极小值时的状态。一个荷电导体组成的体系的总静电能为

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 d\tau=\frac{\varepsilon_0}{2}\int\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d\tau \qquad (3.4.1)$$

对应于不同的电荷分布$\rho(\vec{r})$，或者等价的说电势分布$\varphi(\vec{r})$，体系具有不同的能量。因此能量 W 是$\rho(\vec{r})$或$\varphi(\vec{r})$的泛函$W=W[\rho(\vec{r})]$。现在的问题即时：

对应怎样的电荷分布（或电势分布），体系的能量为极小值？

问题进一步转化成：对应$\rho(\vec{r})$的一个虚变动$\rho(\vec{r})\to\rho(\vec{r})+\delta\rho(\vec{r})$，我们要求

$$\frac{\delta W}{\delta\rho}=0 \qquad (3.4.2)$$

下面就根据（3.4.2）的要求讨论静电体系的平衡问题。电荷分布的变动$\delta\rho(\vec{r})$有 2 类，一种是导体位置不动，电荷在导体上的再分布，一种是由导电体的位置变动引起的。当然，第 2 中情况也不可避免地引发第一种变化。这里，我们将问题简化，重点考察 2 个情况。

1. 汤姆孙定理

先考虑一种相对简单的情况：每个导体都是不动的，但电荷在导体上可以自由再分布。显然，这种扰动必须满足如下约束条件：

$$\int\delta\rho_i d\tau=\delta Q_i=0 \qquad (3.4.3)$$

让我们考虑由于电荷分布的扰动而引起的能量的变化

$$\delta W=W[\rho+\delta\rho]-W[\rho]=\varepsilon\int\vec{E}\cdot\delta\vec{E}d\tau=-\varepsilon\int\nabla\varphi\cdot\delta\vec{E}d\tau \qquad (3.4.4)$$

其中$\delta\vec{E}$为$\delta\rho$所产生的电场，满足

$$\nabla\cdot\delta\vec{E}=\delta\rho/\varepsilon$$

对（3.4.4）进行分步积分可得

$$\delta \mathrm{W}=-\varepsilon\int\nabla\cdot(\varphi\delta\vec{E})d\tau+\varepsilon\int\varphi\nabla\cdot\delta\vec{E}d\tau=\int\varphi\delta\rho d\tau=\sum_i\int\varphi\delta\rho_i d\tau \qquad (3.4.5)$$

上式第一项可利用高斯定理变为面积分，其结果为零。由于约束（3.4.3）的存在，极值条件须引入拉格朗日不定乘子 λ_i，可得

$$\begin{aligned}0&=\delta W-\sum_i\lambda_i\delta Q_i=\sum_i\int\varphi(\vec{r}_i)\delta\rho_i d\tau_i-\sum_i\lambda_i\int\delta\rho_i d\tau_i\\&=\sum_i\int[\varphi(\vec{r}_i)-\lambda_i]\delta\rho_i(\vec{r})d\tau_i\end{aligned} \qquad (3.4.6)$$

因为 $\delta\rho_i(\vec{r})$ 相互独立，上式导致

$$\varphi(\vec{r}_i)=\lambda_i \qquad (3.4.7)$$

因此，若导体系中每个导体的位置固定不变，每一导体上放置一定量的电荷，则当电荷的分布使所有导体均为等势体时，能量到达极小值，体系处于平衡状态。*（思考：严格来说还需证明 $\frac{\delta^2 W}{\delta\rho^2}>0$，你能否证明？*。这就是**汤姆孙定理**。我们在前面讲导体的静电平衡条件时曾通过物理的 Argument 得到过这个结论，这里根据能量在约束条件下达到极小这一平衡判据对这个结论给出了数学上的严格证明。但得到这样的静电平衡状态有两个条件：

1）导体上的电荷不会离开导体；

2）每个导体的位置保持不变。

对条件 1）我们已经知道有<u>非静电来源的表面束缚能</u>（功函数）阻止电荷脱离导体。如果我们将条件 2）放松，使得导体的位置可以发生变化，那么这种导体构型的变动必然导致电荷密度的再分布进一步改变体系的总能量。问题是：什么样的构型是体系的稳定状态呢？

2．<u>恩肖定理</u>

在讨论由于导体构型的变化而产生的能量改变时，我们做如下假设

1） “绝热近似”- 即带电体的运动速度很慢使得每个时刻上面的电荷分布都有足够的时间达到平衡（即称为等势体）。

2） 带电体之间的距离足够远，带电体的运动带来的每个导体上的电荷再分布可以忽略。

在此近似下，我们可以不考虑体系的固有能 （因为在构型发生改变时固有能不变），而只考虑相互作用能：

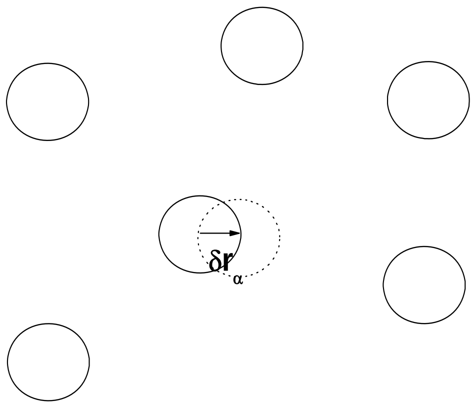
$$W_{\rm int}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}q_\alpha\varphi_\alpha \qquad (3.4.8)$$

$W_{\rm int}$ 是各个导体位置 $\{\vec{r}_\alpha\}$ 的函数，$W_{\rm int}(\{\vec{r}_\alpha\})$，其具有极小值的充要条件是：$W_{\rm int}$ 对

所有电荷的坐标的一阶微商必须为零，而二阶微商必须恒大于零. 简单起见，这里我们只考虑其中一个导体的位置发生了变化$\vec{r}_\alpha \to \vec{r}_\alpha + \delta\vec{r}_\alpha$，则变分后第一个条件要求

$$\nabla_\alpha W_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\varphi_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_\alpha = 0 \qquad (3.4.9)$$

亦即，**在每个导体所在处，由其他导体产生的电场必须相互抵消恒为 0**。



这一条件依赖于具体的导体构型。假设这一个条件能够实现，我们进一步考察这种状态的稳定性问题。让我们检查 W 在某一个“平衡位置”附近对其中一个导体位置做相应扰动$\vec{r}_\alpha \to \vec{r}_\alpha + d\vec{r}_\alpha$，保留到 2 阶，有

$$W(\{\vec{r}_\alpha + \delta\vec{r}_\alpha\}) - W(\{\vec{r}_\alpha\}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=x,y,z}\frac{\partial^2 W}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j + ...$$
$$= \sum_{i,j=x,y,z} B_{i,j} dr_\alpha^i dr_\alpha^j + ... \qquad (3.4.9)$$

其中$B_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial r_\alpha^i \partial r_\alpha^j}$为一个对称矩阵。将 B 矩阵对角化，得到一系列本征值b_i，则有，

$$\delta^2 W = \sum_{i=1,3} b_i \left(d\tilde{r}_\alpha^i\right)^2 + ... \qquad (3.4.9')$$

其中$d\tilde{r}_\alpha^i$对应这一本征值的本征矢量，可以理解为这些扰动的“简正”模式。要得到稳定状态，则要求所有可能的扰动均导致能量上升，亦即所有的本征值均大于 0：

$$\boxed{b_i > 0, \quad i = 1,2,3} \qquad (3.4.10)$$

另一方面，考虑

$$\nabla_\alpha{}^2 W_{\text{int}} = \sum_{j=1}^{n} q_j \nabla_\alpha{}^2 \varphi_j = q_\alpha \nabla^2 \varphi_\alpha \qquad (3.4.11)$$

其中φ_α是除q_α之外所有其他电荷在第α个电荷处产生的势 ***（这里 1/2 消失的原***

因是我们计算$\vec{r}_\alpha$ 的变化时，不仅考虑其它导体对第α 个导体的电势变化，还要考虑第α 个导体在其它带电体处的电势变化，根据对称性，这两项贡献相等）。根据电势满足 Poission 方程，$\nabla^2\varphi_\alpha=\rho$，而此处没有电荷分布，故必有$\nabla^2\varphi_\alpha=0$。所以，

$$\boxed{0=\nabla_\alpha{}^2W_{\text{int}}=\sum_{i=x,y,z}\frac{\partial^2 W}{\partial r_\alpha^i\partial r_\alpha^i}=2Tr[B_{i,j}]=2\sum_{i=1,2,3}b_i} \qquad (3.4.12)$$

很显然，（3.4.12）与（3.4.10）相互矛盾！故W_{int} 不可能有极小值，只可能存在“鞍点”类型的极值点（某些方向为极小，某些方向为极大值）。*因此只有静电相互作用的电荷体系不可能形成稳定状态，任何稳定的静电体系的形成都必须有其他约束力参与.* 如果没有一种非静电的约束力，导体上的各电荷元将在相互斥力的作用下向各个方向飞散到无限远处，孤立的带电导体就不复存在. 为此，在静电学中我们总是假定存在着某种非静电的约束力.

注意：这里所有的讨论都是针对“静电力”，也就是满足$\nabla\times\vec{E}=0$ 的力。当电场随时间变化时，此时的力不再受这个定理的约束。另外，量子力学中可能存在其他来源复杂的力（如交换耦合力），也不受这个定理的约束。

§ 3.5 导体表面所受的静电力

置于静电场内的导体会受到静电场的作用，这种静电力是作用在导体表面的上的，我们可以从两个不同的角度进行计算。

方法 1：Maxwell 张量

我们在上一章中已经详细介绍了如何计算一个放置于电场中的物体的受力问题，

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}=-\oint d\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{T}-\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \vec{g}_{em}d\tau, \qquad (3.5.1)$$

静电场不随时间变化，因此最后一项为 0。作用在导体表面$d\vec{S}$ 上的力恰好等于从外面“流入”导体的动量流，所以单位面积所受的力为

$$\vec{F}_s=-\vec{e}_n\cdot\overleftrightarrow{T} \qquad (3.5.2)$$

真空中的麦克斯韦张力张量

$$\overleftrightarrow{T}=\varepsilon_0(\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I}-\vec{E}\vec{E}) \qquad (3.5.3)$$

因为导体内的场$\vec{E}_{内}=0$，导体外表面的场只有法向分量，故

$$\vec{F}_S = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\vec{e}_n \qquad (3.5.4)$$

可见导体表面单位面积受力的大小等于静电场的能量密度，方向指向导体外法线方向，也就是说，导体受到一种“负压力”.

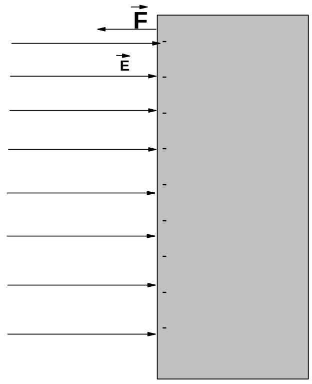
你也许会问：这是电场作用到自由电荷上的力啊！不一定就是作用到导体上的力！其实，导体中的自由电荷平衡时全都集中在导体的表面上，由于有非静电的束缚力才使得电荷不能飞离导体。因而场对自由电荷的作用力通过非静电平衡力转嫁到导体上。换一句话说，把导体和其中的电荷看成一个整体，则外界对电荷的力就等于对整个导体的作用力。

导体表面的场也可用面电荷表示，即

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_n \qquad (3.5.5)$$

代入（3.5.4）式可得

$$\vec{F}_S = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\vec{e}_n \qquad (3.5.6)$$



方法 2：直接计算电荷受力

如前所述，导体表面受力实际上是电场对面电荷的作用力，所以我们可以直接用洛伦兹力来计算

$$\vec{F} = \int \rho\vec{E}d\tau \qquad (3.5.7)$$

然而直接利用上式计算有困难，因为理想的导体模型为导体的电荷分布为面电荷分布：$\rho(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}_{\|})\delta(z)$，电场在导体的内外表面有不连续：$\vec{E}_+ = \sigma/\varepsilon_0, \vec{E}_- = 0$。代入（3.5.7）时，有

$$\vec{F} = \int \sigma(\vec{r}_{\|})\delta(z)\vec{E}(\vec{r}_{\|}, z)d\vec{r}_{\|}dz\,, \qquad (3.5.8)$$

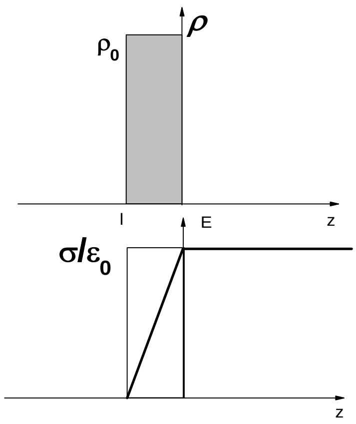
此时对 z 的积分不容易进行，因为将 z=0 代入 E 的表达式时我们不知道该取 $\vec{E}_+$ 还是 $\vec{E}_-$。

这个问题的产生是因为其实导体上的电荷本来就非完全分布于表面上的，面电荷分布只是我们对导体的一个理想化的模型处理。真实情况下，导体的电荷是分布在一个非常薄的表面层内的。模型计算表明，这个过渡区约为10^{-10} m. 让我们取最简单的情况，假设电荷均匀地分布在这个厚度为 l 的过渡层中，则

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & z < -l \\ \rho_0, & -l < z < 0 \\ 0, & z > 0 \end{cases} \qquad (3.5.9)$$

利用 Gauss 定理可容易计算出电场分布，即

$$E=\begin{cases}0, & z<-l \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_0(z+l) & -l<z<0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 l & z>0\end{cases} \qquad (3.5.10)$$



则导体表面所受的力为

$$\vec{F}=\int dS\int_{-l}^{0}\rho_0\vec{E}dz=\int dS\int_{-l}^{0}\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0{}^2(z+l)\vec{e}_n dz$$
$$=\int\frac{1}{2\varepsilon_0}(\rho l)^2\vec{e}_n dS. \qquad (3.5.11)$$

当此过渡层非常小，而我们又不关心过渡层内部的电场时，过渡层的电荷可以等价成面电荷分布，

$$\sigma=\lim_{l\to 0}(\rho l). \qquad (3.5.12)$$

所以，导体表面单位面积所受的力为

$$\vec{F}_S=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\rho l)^2\vec{e}_n=\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2\vec{e}_n \qquad (3.5.13)$$

结果与利用麦克斯韦张力张量所作的计算一致．

Tips: ***这个世界上本来没有奇性（如体电荷分布），人们为了计算以及表述的方便引入了奇异的物理量（如面电荷分布），但未必给你强调这种方便的代价及适用范围。我们在学习的过程中一定要深入掌握原理的来龙去脉，才能对问题理解的更加透彻，在遇到新问题时不会上当或是手足无措。另外，05 级物理系的一位同学曾经证明，上述结论在电荷分布是任意幂次（未必是线性）的情况下都成立。***

习题：

P85， 3.5， 3.8，3.9

小课题（供有兴趣的同学选作）

1） 计算几个典型的静电体系（比如两个点电荷，两个偶极子等）的能量随位置的变化关系，用图形画出它们的依赖关系，体会“静电体系没有约束就没有平衡态”这一结论。

2） 阅读文献”**Wen WJ, et. al, Phys. Rev. Lett. 85 5464 （2000）**”, 搞明白他们是怎样引入非静电力来形成静电稳定体系的。

3） 寻找并阅读 **Lang** 的文章（应当是书上 **P71** 所引的文章），弄明白表面束缚能的来源，理解它是否是静电来源。