第 二 十 三 讲

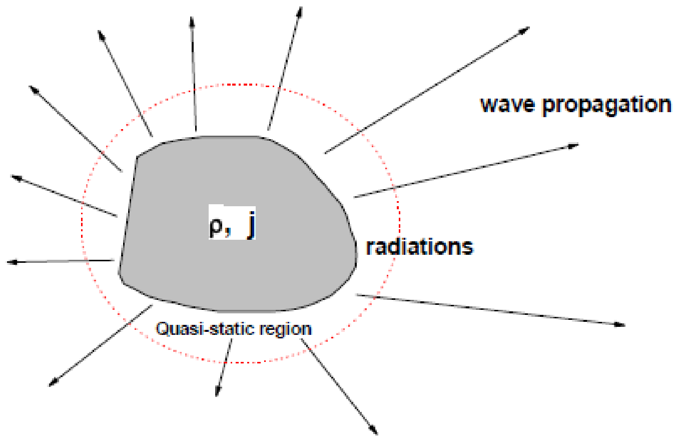
<u>上次课</u>

- 波导中的模式：$k_g = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$，$\omega_c^{mn} = c\pi\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}$
- 截止频率：　　$TE_{10}(TE_{01})$，　TM_{11}
- 波导中模式均为平面电磁波的相干叠加（以满足合适的边界条件）
- 谐振腔 - 只允许分立的频率（对应一定的驻波模式）存在

$$\omega_{mnp} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{d^2}}$$，基模为（**110**）模式

第十二章　电磁波的辐射

我们在第 8-9 两章中已经介绍了电磁波在不同的媒质中的传输行为，然而，我们对电磁波如何产生的却仍然不知道。这一章中，我们将详细介绍电磁波如何从源（电荷、电流分布）区产生出来的，这个过程叫做电磁辐射。



§ 12.1 势、规范、及其满足的方程

<u>1. 势的定义</u>

原则上讲，对确定的电荷分布 $\rho(\vec{r},t)$ 和电流分布 $\vec{j}(\vec{r},t)$，我们求它的辐射电磁场就是求解 Maxwell 方程

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0 \\
\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\
\nabla\cdot\vec{B}=0 \\
\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}
\end{cases}
\tag{12.1.1}
$$

直接求解$\vec{E},\vec{B}$场的方程通常比较麻烦，可以使用并矢格林函数的方法（参考 JA Kong 的书）。类似处理静电、静磁时的情况，我们在处理与源有关的辐射问题时解“势”的问题更加方便。与静电、静磁时相比，在一般情况下标势、矢势的定义有所不同。根据 Maxwell 方程第三式，可定义矢势 A 为

$$\boxed{\nabla\times\vec{A}=\vec{B}} \tag{12.1.2}$$

将其带入 Maxwell 方程第二式，可得

$$\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)=0 \tag{12.1.3}$$

因此可以定义标势，其满足

$$\boxed{\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}=-\nabla\varphi \quad\Rightarrow\quad \vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\nabla\varphi} \tag{12.1.4}$$

2．规范条件（Gauge）

（12.1.2）与（12.1.4）所定义的势并不唯一。给定任意一个标量函数$\Lambda(\vec{r})$，由此定义一对新的标势和矢势：

$$\varphi'=\varphi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t},\quad \vec{A}'=\vec{A}+\nabla\Lambda \tag{12.1.5}$$

将上式代入（12.1.2）和（12.1.4），我们发现$\left\{\vec{A}',\varphi'\right\}$给出与$\left\{\vec{A},\varphi\right\}$完全一样的$\vec{E},\vec{B}$场。在经典电动力学的范畴内，后者对应着真实的物理场，前者（标、矢势）并不对应真实的物理场。因此对于同样的物理体系，$\left\{\vec{A},\varphi\right\}$的选择并不唯一，必须在某一个条件的约束下才可能为唯一确定下来。这个条件称为规范条件。通常使用的规范是库仑规范

$$\nabla\cdot\vec{A}=0 \tag{12.1.6}$$

和洛仑兹规范

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{12.1.7}$$

值得注意的是：洛仑兹规范在静电静磁条件下与库仑规范一致。

3．势所满足的方程

将（12.1.2）与（12.1.4）带入 Maxwell 方程中的第一和第四式，我们得到对势的方程：

$$\begin{aligned}&\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)=-\rho/\varepsilon_0\\&-\nabla^2\vec{A}+\nabla(\nabla\cdot\vec{A})=\mu_0\vec{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})\end{aligned}\qquad(12.1.8)$$

这组方程是$\left\{\vec{A},\varphi\right\}$耦合在一起的，使用起来不方便。利用 Lorentz 规范条件可以将其化简成相当对称而标准的有源波动方程的形式

$$\begin{aligned}&\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi=-\rho/\varepsilon_0,\\&\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}=-\mu_0\vec{j}\end{aligned}\qquad(12.1.9)$$

因此，我们首先根据源的情况求解（12.1.9）得到势，然后再由势求出电磁场。

§ 12.2 推 迟 势

由于$\vec{A}$和φ满足同样的方程，因此我们只要讨论一个标量方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(\vec{r},t)=-\rho(\vec{r},t)/\varepsilon_0\qquad(12.1.9')$$

的解。求解上述方程的标准方法是定义一个格林函数，满足

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')=-\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t')\qquad(12.2.1)$$

这个函数其实就是当t'时刻在$\vec{r}\,'$处做一个扰动时空间所激发的场。定义$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,',T=t-t'$，则发现电势可以表示为：

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\vec{R},T)\rho(\vec{r}\,',t')d\vec{r}\,'dt'\qquad(12.2.2)$$

将（12.2.1）代入上式，很容易证明上式是（12.1.9'）的解。因此知道了格林函数，则具有任意时空分布的源激发的场都可以知道。下面求解格林函数。在 R，T 空间求解非常不方便，利用 Fourier 变换可得

$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int G(\vec{k},\omega)e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}d\vec{k}d\omega$$
$$\delta(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}d\vec{k}d\omega \qquad (12.2.3)$$

带入（12.2.1）可以解得 $(\vec{k},\omega)$ 空间的格林函数的解为

$$G(\vec{k},\omega)=\frac{1}{k^2-k_0^2} \qquad (12.2.4)$$

其中,

$$k_0^2=\varepsilon\mu\omega^2 \qquad (12.2.5)$$

因此，将（12.2.4）带回（12.2.3）可得 $(\vec{R},T)$ 空间的格林函数为

$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}e^{-i\omega T}}{k^2-k_0^2}d\vec{k}d\omega \qquad (12.2.6)$$

求解这个积分并不容易。先计算对 k 的积分：

$$\begin{aligned}G(\vec{R},\omega)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{k^2-k_0^2}d\vec{k}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{e^{ikR\cos\theta}}{k^2-k_0^2}k^2dk\sin\theta d\theta\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2iR}\int_0^\infty\frac{e^{ikR}-e^{-ikR}}{k^2-k_0^2}kdk=\frac{1}{2(2\pi)^2iR}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{k}{k^2-k_0^2}\right)\cdot\left(e^{ikR}-e^{-ikR}\right)dk\\
&=\frac{1}{4(2\pi)^2iR}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)\cdot\left(e^{ikR}-e^{-ikR}\right)dk\\
&=\frac{1}{4(2\pi)^2iR}\times\\
&\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)e^{ikR}dk-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{k-k_0}+\frac{1}{k+k_0}\right)e^{-ikR}dk\right\}\end{aligned} \qquad (12.2.7)$$

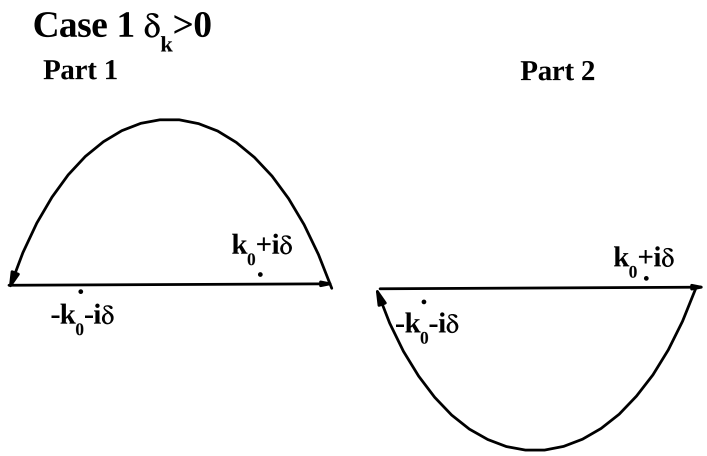
上面的积分中有奇点，若想得到收敛的结果，必须假设 k_0 具有一个很小的虚部。

但这个虚数的符号应当取 + 还是取 - 呢？

选择的依据是“因果关系”！ --- 在正常介质中这个虚部必须为正。
“因果关系”要求电磁波在介质中向前传播（能流的方向）时应当产生焦耳热从而使得能量被耗散。而 k_0 是介质中向前传播的波矢，假设 $k_0=\mathrm{Re}(k_0)+i\delta$，则 $e^{ik_0r}e^{-i\omega t}=e^{i\mathrm{Re}(k_0)r}e^{-\delta r}e^{-i\omega t}$，因此 δ 一定为正。

对上面的两个积分分别选择如下图所示的闭合回路，将被积函数解析延拓到

复平面，则利用留数定理容易推出



$$G(\vec{R},\omega)=\frac{1}{4(2\pi)^2 iR}e^{ik_0R}\times 2\pi i-\frac{1}{4(2\pi)^2 iR}e^{ik_0R}\times(-2\pi i)=\frac{e^{ik_0R}}{4\pi R} \qquad (12.2.8)$$

在（12.2.8）式中加入时间振荡因子 $e^{-i\omega T}$，则发现这个解对应这样一个单频波，

$\frac{e^{ik_0R}}{4\pi R}e^{-i\omega T}$，其物理意义为一个点源的"<u>出射波</u>"--- 即从源点向*外*发射的球面波。

显然这是符合"因果关系"的解。*若选择 k_0 的虚部为负，则结果为不符合因果关系的"会聚波"。*进而将（12.2.8）代入（12.2.6）可得最终的格林函数

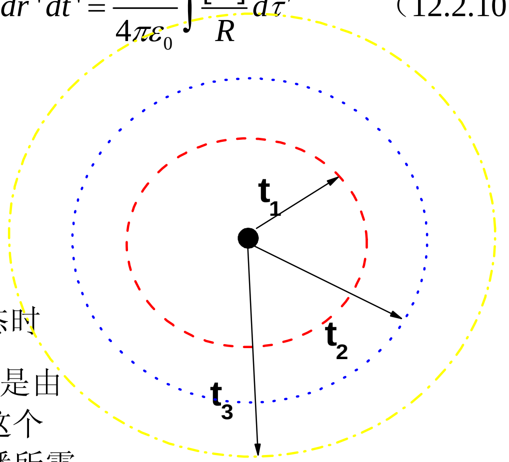
$$G(\vec{R},T)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{ik_0R}}{4\pi R}e^{-i\omega T}d\omega=\frac{1}{4\pi R}\delta\left(R/c-T\right) \qquad （12.2.9）$$

这个解的物理意义更加明晰 – 在原点处 0 时刻作一个激发，则激励的波以球面波的形式传播出去 – 波振幅以 1/R 形式衰减，且只在 R=ct 处有值。将格林函数形式（12.2.9）带入（12.2.4）得到

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{R}\delta(R/c-T)\rho(\vec{r}\,',t')d\vec{r}\,'dt'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{[\rho]}{R}d\tau' \qquad （12.2.10）$$

式中方括号[ ]表示 $t'=t-\frac{R}{c}$，同理可得

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{[\vec{j}]}{R}d\tau' \qquad （12.2.11）$$



我们注意到 $\varphi,\vec{A}$ 的表达式在形式上与静态时的解一致，只是在动态时 t 时刻的辐射场是由此时刻前的一个时刻的扰动贡献的，而这个推迟的时间正是从源到观测点光信号传播所需

的时间。这就是推迟势，其物理的根据是因果关系。

§ 12. 3 多 极 辐 射

很多情况下辐射源电流、电荷分布于空间一很小区域内，而我们则关心远场的行为，此时类似静电、静磁时的处理方法，我们可以作多极展开。

1．推迟势的多极展开

我们讨论的是远离源的场，即 $r>>l$（图 12.2），l 为源的线度。被积函数是 $\vec{R}$ 的函数，我们可以将它在 $\vec{r}$ 处展开为级数，即

$$\frac{[\rho]}{R}=\left.\frac{[\rho]}{R}\right|_{R=r}+\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{R}}\left.\left(\frac{[\rho]}{R}\right)\right|_{R=r}+\ldots=\frac{[\rho]_0}{r}-\vec{r}'\cdot\nabla\frac{[\rho]_0}{r}+\cdots \qquad (12.3.1)$$

式中 $[\rho]_0$ 表示 $\rho\left(\vec{r}',t-\frac{r}{c}\right)$，以后为简便起见，脚标 0 不再写出。同理可得

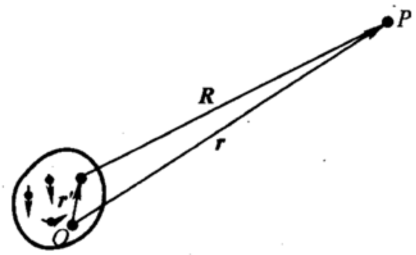


图 12.2

$$\frac{\left[\vec{j}\right]}{R}=\frac{\left[\vec{j}\right]}{r}-\vec{r}'\cdot\nabla\frac{\left[\vec{j}\right]}{r}+\ldots$$

故

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\frac{[\rho]}{r}d\tau'-\int\vec{r}'\cdot\nabla\frac{[\rho]}{r}d\tau'+\ldots\right]$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\left[\vec{j}\right]}{r}d\tau'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{r}'\cdot\nabla\frac{\left[\vec{j}\right]}{r}d\tau'+\cdots$$

我们下面分别研究 $\vec{A}$、φ 展开式中各项的物理意义，以及它们所代表的辐射场的性质。

2．电偶极辐射

φ 展开式中的第一项

$$\varphi_0=\int\frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon_0 r}d\tau'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int[\rho]d\tau'=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad （12.3.2）$$

Q 是系统的总电荷量，一般情况下不随时间变化，没有辐射。第二项

$$\varphi_1 = -\int \vec{r}' \cdot \nabla \frac{[\rho]}{4\pi\varepsilon_0 r} d\tau' = -\nabla \cdot \frac{[\vec{p}]}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{12.3.3}$$

式中$[\vec{p}] = \int \vec{r}'[\rho] d\tau'$，表示系统总的电偶极矩。

$\vec{A}$展开式中的第一项：

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int [\vec{v}\rho] d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\sum_i q_i \vec{v}_i \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt} \left[\sum_i q_i \vec{r}_i \right] = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\dot{\vec{p}} \right] \end{aligned} \tag{12.3.4}$$

所以，电偶极矩系统所产生的$\vec{A}$和φ为（12.3.3）及（12.3.4）。下面考虑单频的辐射源，$\rho(\vec{r}\,',t') = \rho(\vec{r}\,')e^{-i\omega t'}, \vec{j}(\vec{r}\,',t') = \vec{j}(\vec{r}\,')e^{-i\omega t'}$（任意情况总可以展开成单频结果的叠加）。从联系$\vec{B}$与$\vec{A}$的公式，我们得到电偶极辐射场中的磁场部分为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\left[\dot{\vec{p}}\right]}{r} = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} \tag{12.3.5}$$

电场当然也可以由势推出。但在无源区，电场可以更简单地由磁场导出

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{i\omega} \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \times \nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} \tag{12.3.6}$$

下面仔细分析一下在（12.3.5）和（12.3.6）式中要用到的一项：

$$\nabla \times \frac{[\vec{p}]}{r} = \left(\nabla \times [\vec{p}]\right) \frac{1}{r} + \left(\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times [\vec{p}] \right) \tag{12.3.7}$$

考虑第一项，因为$[\vec{p}] = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c}r}$，则微分运算可以代换成

$$\boxed{\nabla \leftrightarrow i\frac{\omega}{c}\vec{e}_r = ik\vec{e}_r} \tag{12.3.8}$$

再考虑第二项，因$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$，最终，（12.3.7）变为

$$i\frac{\omega}{c}\left[\vec{e}_r \times [\vec{p}] \frac{1}{r}\right] - \frac{1}{r}\left[\vec{e}_r \times [\vec{p}] \frac{1}{r}\right] \tag{12.3.7'}$$

因此，$\frac{\omega}{c}$和$\frac{1}{r}$的比较决定了哪一项大，哪一项小。下面我们分三个区域来讨论。

(1) 远区：不仅要求 $r>>l$，而且 $r>>\lambda$，λ 为辐射场的波长，此时，公式(12.3.7)中第一项远大于第二项。因此在计算电磁场时，只需计算 ∇ 算子作用到 $[\vec{p}]$ 上即可，无需计算其作用到 $\frac{1}{r}$ 上。这等价于做代换（12.3.8）。因此，远区场强的公式为

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\omega^2\mu_0}{4\pi cr}\vec{e}_r\times[\vec{p}] \\ \vec{E} &= -\frac{\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\vec{e}_r\times(\vec{e}_r\times[\vec{p}]), \end{aligned} \tag{12.3.9}$$

(2) 近区： $r<<\lambda$，但仍满足 $r>>l$。这时公式(12.3.5)和(12.3.6)中的旋度算子只要对分母运算即可。因为每对分母运算一次得到一个 $\frac{1}{r}$ 因子，而对分子运算得到一个 $\frac{1}{\lambda}$ 因子，显然 $\frac{1}{r}$ 比 $\frac{1}{\lambda}$ 贡献大。于是我们得到近区的场强为

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{i\omega\mu_0}{4\pi r^2}\vec{e}_r\times[\vec{p}], \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\vec{e}_r\left(\vec{e}_r\cdot[\vec{p}]\right)-[\vec{p}]\right) \end{aligned} \tag{12.3.10}$$

我们注意到此时电场和静态时的电偶极子的电场形式上完全一样，只不过时间上推迟了一个辐射时间而已 – 事实上在这个条件下，"准静态"近似适用（参考第6章）。

(3) 中间区域：虽然 $r>>l$，但 $r\approx\lambda$，这时我们必须同时保留对分母运算的项和对分子运算的项。这是因为对两者运算得到的因子 $\frac{1}{r}$ 和 $\frac{\omega}{c}=\frac{1}{\lambda}$ 是同数量级。

习题

P. 343， 12.1

补充

（1）仿照课件中对真空中格林函数的解（12.2.9）的推导，利用因果关系，推导出一个均匀的负折射介质（$\varepsilon<0,\mu<0$）中的格林函数的解，并解释所得的格林函数的物理意义。

（2）推导（12.3.10）式，计算一个偶极振子在近场条件下的能流分布的时间平均值；**（选作）**证明（12.3.10）满足准静态近似下的 Maxwell 方程。