第十九讲

上次课：

- 偏振：椭圆偏振、圆偏振、线偏振
- 色散介质的介电行为 --- $\vec{D}(t)=\int\varepsilon(t-t')\vec{E}(t')dt'$，

  在单频谐变电场激励下，$\vec{D}_\omega=\varepsilon(\omega)\cdot\vec{E}_\omega$
- 金属介电函数的 Drude 模型：

$$\varepsilon_r(\omega)=1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+i/\tau)}\approx\begin{cases} i\dfrac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}, & \leq \text{GHz} \\ 1-\left(\dfrac{\omega_p}{\omega}\right)^2, & visible \end{cases}$$

GHz 以下-极大的正的虚部；光波段-负的实部

---

§8.4 电磁波在导电介质中的传播

上节中我们系统介绍了金属的有效介电函数 $\varepsilon_r(\omega)$，下面我们研究电磁波在导电介质中的传播。原则上，我们需要在金属中求解如下 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E})=\rho_f \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E} \end{cases} \tag{8.1.1}$$

针对一个特定频率 ω，所有的场量均以 $e^{-i\omega t}$ 形式随时间谐变，

$$\left(\vec{E}(\vec{r},t),\vec{H}(\vec{r},t),\rho(\vec{r},t),\vec{j}(\vec{r},t)\right)=\left(\vec{E}(\vec{r}),\vec{H}(\vec{r}),\rho(\vec{r}),\vec{j}(\vec{r})\right)e^{-i\omega t} \tag{8.4.1}$$

将**金属中的“传导电流”吸收到电位移矢量中（参考第十八讲（8.3.14）式），**<u>**并利用连续性方程**$\nabla\cdot\vec{j}_f+\partial\rho_f/\partial t=0$</u>，可以证明 Maxwell 方程针对时谐场的形式为：

$$\begin{cases} \nabla\cdot(\varepsilon(\omega)\vec{E})=0 \\ \nabla\cdot\vec{H}=0 \\ \nabla\times\vec{E}=i\omega\mu_0\vec{H} \\ \nabla\times\vec{H}=-i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E} \end{cases} \tag{8.4.2}$$

对（8.4.2）中第 2 式同时作用$\nabla\times$，并利用$\nabla\cdot\vec{H}=0$，可得

$$-\nabla^2\vec{H}=\nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\omega^2\varepsilon(\omega)\mu_0\vec{H} \tag{8.4.3}$$

我们立刻发现这个针对单频的“时谐”Maxwell 方程和无色散介质中磁场满足的方程（8.1.5）完全一样！只不过这时“介电常数”依赖于频率，只针对目前的所设的频率正确。（8.4.3）的解是平面波，$\vec{H}(\vec{r})=\vec{H}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$（此时只需考虑空间变化部分，时间部分总是$e^{-i\omega t}$），代入可解得电磁波传播的色散关系

$$\boxed{k^2=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_r(\omega)} \tag{8.4.4}$$

这与一般介质中的色散关系全一样，除了此处ε_r是频率的函数，因此只要知道了$\varepsilon_r(\omega)$就可以求解（8.4.4）得到电磁波传播的行为。注意，上面的讨论是一般成立的，对任何***线形各向同性介质***，只要体系在频域的本构关系 $\vec{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega)$ 已知，我们就可以利用（8.4.4）式电磁波传播的色散关系。下面考虑几个特殊情形。

1. 良导体在 GHz 及以下频段

A. 复波矢

良导体，如金银铜等，在 GHz 及以下频段的有效介电常数为

$$\varepsilon_r(\omega)\approx -const.+\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}\approx\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \tag{8.4.5}$$

将（8.4.5）式代入（8.4.4）可得

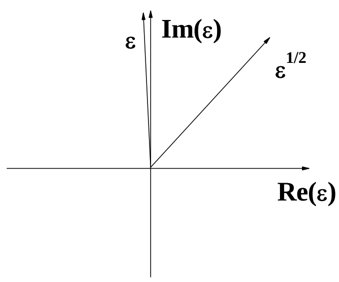
$$k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}\approx\sqrt{\frac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}}\frac{\omega}{c}=(1+i)\alpha \tag{8.4.6}$$

其中

$$\alpha=\sqrt{\frac{\sigma_c\mu_0\omega}{2}} \tag{8.4.7}$$

则

$$\vec{k}=(1+i)\alpha\cdot\vec{e} \tag{8.4.8}$$



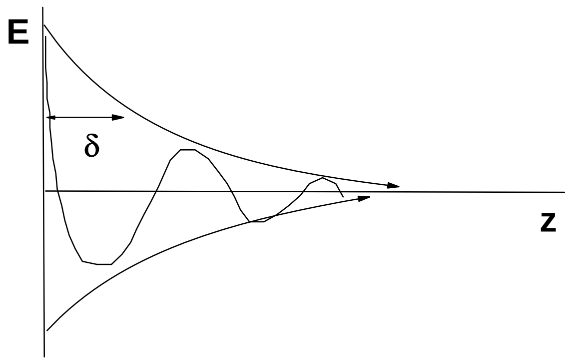
其中$\vec{e}$任意单位矢量（传播方向）。

注意很多教材上假设$\varepsilon_r(\omega)=1+\dfrac{i\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}$，这其实并不完全正确。但事实上，这并不影响解的形式 – 当$\mathrm{Im}(\varepsilon_r)>>\mathrm{Re}(\varepsilon_r)$时，解就是（8.4.6）式的形式，根本与$\varepsilon_r$的实部无关！（参看右上图）。

将（8.4.8）带入（8.4.1），则电磁波在金属中的电场（假设传播方向为 z 方向）为

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{-\alpha z}e^{i(\alpha z-\omega t)} \tag{8.4.9}$$

当然横波条件要求$\vec{E}_0$在 xy 平面。可见，此时平面波的振幅沿传播方向指数衰减。



振幅衰减到$r=0$处的$\dfrac{1}{e}$倍的距离$\dfrac{1}{\alpha}$称为**透入深度（也叫趋肤深度）**，定义为

$$\delta=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\sigma_c\mu\omega}} \tag{8.4.10}$$

因此电磁波不能渗入在导电介质的内部，而是很快在表面的一个厚度为δ的薄层内衰减掉。与此相对应：金属上产生的交流电流一定也只是局域在表层的这个薄层内 – 这个结论我们曾在讨论准静态近似下的电流的趋肤效应时得到过。

Tips*：*这种衰减表示电磁波的能量有消耗。但对良导体，*$\sigma_c\to\infty,\delta\to 0$，*入射的电磁波几乎被 100%反射回去。因此，良导体几乎不能吸收电磁波（在 GHz），可以看作理想导体。

B．电磁场强度之间的关系

由（8.4.2）式中的第 2 式可得

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0 = \frac{\alpha}{\omega}(1+i)\cdot\vec{e}\times\vec{E}_0 = e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{\sigma_c\mu_0}{\omega}}\vec{e}\times\vec{E}_0 \qquad (8.4.11)$$

良导体内的电磁波有如下重要特点：

（1）与介质中的电磁波 $\vec{B}$ 、$\vec{E}$ 之间同相位不同，此处 $\vec{B}$ 、$\vec{E}$ 之间有 $\frac{\pi}{4}$ 的相位差，趋向导体内部时，2 者均指数衰减。

（2）良导体内部的电磁能量是以磁场能形式存在的：

$$U_B \sim \frac{1}{2\mu_0}B_0^2 = \frac{\sigma_c}{2\omega}E_0^2 = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2\right) >> U_E \qquad (8.4.12)$$

这种趋势随着频率的减小增大。当 $\omega=0$ 时，磁能是电能的无限大倍，因此 $\vec{E}$ 只能为 0- 此时电磁场能量只以磁能的形式出现。***这与静电时金属内部不存在静电场的结果一致***。导电介质中电磁波的传播特性如图 8.3 所示。

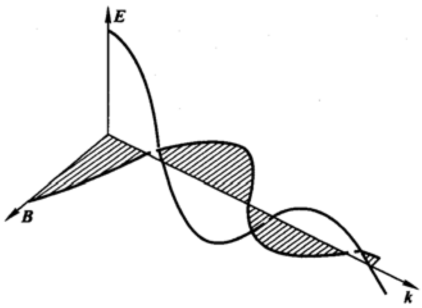


图 8.3

注意：

（1）这里 $U_E \sim \frac{\varepsilon_0}{2}E_0^2$ 指的是纯粹的电场的能量，并没有把“传导电流”携带的机械能量算上。

（2）对色散介质，利用 $U_E \sim \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} \sim \frac{1}{2}\varepsilon(\omega)|E|^2$ 计算介质中电磁场的总能量是不对的，否则你就得到负能量这个荒谬的结论。色散介质中的能量是个复杂的问题，要得到完整的答案，请参考 Landau 的书。

2．良导体在光波段（等离子体中的光波）

在光波段，金属的有效介电常数为 $\varepsilon_r(\omega)\approx 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$，这个模型也被广泛应用于研究其他自由电荷组成的等离子体（唯一的区别是电荷密度不同导致 ω_p^2 不同）。将其带入色散关系可得

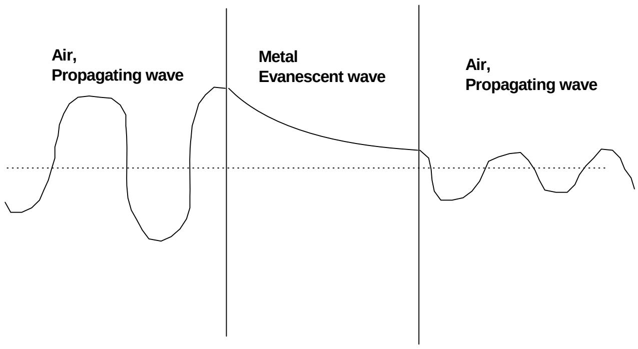
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}) = \frac{1}{c^2}(\omega^2-\omega_p^2) \tag{8.4.13}$$

对此我们作如下的讨论：

(1) 当$\omega < \omega_p$时，k为一纯虚数，可写成$k = i/\delta$， 其中

$$\delta = \sqrt{\frac{c^2}{\omega_p^2-\omega^2}} \tag{8.4.14}$$

此时金属中的电磁场是纯粹的指数衰减的，$E \sim E_0 e^{ikr} = E_0 e^{-r/\delta}$，与（8.4.9）式表示的一边衰减一边振荡（传播）略有不同。这种波称为衰逝波，或者叫消逝波，倏逝波等 （Evanescent wave）。当电磁波由空气入射到金属上时，进入金属后电磁波后的透入深度为δ。

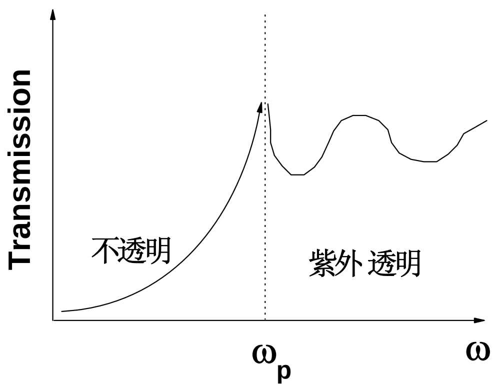


若金属为半无限大，则电磁波完全不能通过金属，因此将被反射回去；若金属板为有限厚度，则会有衰逝波隧穿过去（类似量子力学中的隧穿效应）。δ越大，则隧穿过去的电磁波就越多 （如右图所示）。

(2) 磁场为

$$\vec{B}(z,t) = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times E_0\vec{e}_x e^{-z/\delta}e^{-i\omega t} = \frac{i}{\omega\delta}E_0\vec{e}_y e^{-z/\delta}e^{-i\omega t} \tag{8.4.15}$$

这里磁场与电场有$\pi/2$的相差，与介质、良导体在 GHz 等情形均不相同！这个相位的不同，造成了能流形式在各种介质中的不同！（参考作业题）



（3）当$\omega = \omega_p$时，$\delta \to \infty$，此时隧穿效应达到极值。

(4) 当 $\omega > \omega_p$ ， $0 < \varepsilon_r < 1$ ，$n = \sqrt{\varepsilon_r} < 1$，此时金属（或是等离子体）是比真空还要光疏的介质，光波

可以在其中传播。但因为折射率与空气毕竟不同，所以此时一个有限厚度的金属板对电磁波仍然有反射，造成透射率的降低。因此，透射率在$\omega=\omega_p$时达到峰值，人们常有这个峰值所在的频率来探测金属的等离子体共振频率。

（5）金属在 GHz 和在光波段均可以很好的反射电磁波，但机理及表现形式完全不同。前者是靠金属的介电常数的虚部，而后者靠的是负的介电常数。

3．非良导体

对于导电性能不好的导电媒质，比如一些电介质，其既有价带电子贡献的介电性质（ε_r），又因为有少量掺杂的电荷或是其他原因具有很小的电导率σ_c。这种物质的复介电函数可以写成

$$\tilde{\varepsilon}_r(\omega)=\varepsilon_r+i\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \tag{8.4.16}$$

因为电导率很小，$\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}<<1$，（8.4.16）意味着这种物质的介电常数具有很小的虚部。将（8.4.16）带入色散关系（8.4.4）中可得

$$k=\beta+i\alpha\approx\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}+i\frac{\sigma_c}{2\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \tag{8.4.17}$$

电磁波的行为为

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{e}_xE_0e^{-\alpha x}e^{i(\beta z-\omega t)} \tag{8.4.18}$$

显然，电磁波在这种介质中的传播性质又与良导体的两种情况均不同，与真空中的性质相仿，只是波在传播的过程中有少量能量耗散。

§8.5 旋光介质中的电磁波

之前我们研究了一般电介质和导电介质中的电磁波的传播特性。这两种媒介（虽然前者为非色散介质，后者是色散介质）的共同特性*是都是各向同性介质*。下面我们将研究一种*各向异性介质 – 旋光介质*中的电磁波的传播特性。

当对等离子介质施加静磁场时，这类介质叫做旋光介质。比如地球附近的受地磁场影响的等离子体层，或者出于恒定磁场中的金属，都是这类介质。要研究

电磁波在这种介质中的传播行为，类似研究金属中的电磁波，我们还是首先研究其本构关系，然后再求解 Maxwell 方程。

1．旋光介质的本构关系

考虑处于静磁场 $\vec{B}_0$ 中的自由电子气对电场的响应时。忽略杂质的散射项，电子的运动方程为

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=e\left[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}_0\right] \tag{8.5.1}$$

其中，设 $\vec{B}_0=B_0\vec{e}_z$，外电场随时间谐变（$\vec{E}(t)=\vec{E}_0e^{-i\omega t}$）。显然，电子的运动速度也具有 $e^{-i\omega t}$ 因子。设 $\vec{v}(t)$=$\vec{v}_0e^{-i\omega t}$，则(8.5.1)式的 3 个分量形式可以写为

$$\begin{aligned}-i\omega v_{0x}&=\frac{e}{m}E_{0x}+\frac{e}{m}v_{0y}B_0\\-i\omega v_{0y}&=\frac{e}{m}E_{0y}-\frac{e}{m}v_{0x}B_0\\-i\omega v_{0y}&=\frac{e}{m}E_{0z}\end{aligned} \tag{8.5.2}$$

定义 $\omega_B=\frac{|e|B_0}{m}=-\frac{eB_0}{m}>0$，物理意义是电子在垂直磁场平面（xy-平面）内做圆周运动的圆频率，代入（8.5.2）解之可得

$$\begin{aligned}v_{0x}&=\frac{e}{m}\frac{i\omega E_{0x}+\omega_BE_{0y}}{\omega^2-\omega_B^2}\\v_{0y}&=\frac{e}{m}\frac{i\omega E_{0y}-\omega_BE_{0x}}{\omega^2-\omega_B^2}\\v_{0z}&=-\frac{eE_{0z}}{im\omega}\end{aligned} \tag{8.5.3}$$

将（8.5.3）代入电流密度公式 $\vec{j}=n_e e\vec{v}$，可得电流密度的形式：

$$\begin{aligned}j_x&=\frac{n_ee^2}{m}\frac{i\omega E_{0x}+\omega_BE_{0y}}{\omega^2-\omega_B^2}e^{-i\omega t}=\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega^2-\omega_B^2}\left(i\omega E_x+\omega_BE_y\right)\\j_y&=\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega^2-\omega_B^2}\left(i\omega E_x-\omega_BE_y\right)\\v_{0z}&=-\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{i\omega}E_z\end{aligned} \tag{8.5.4}$$

我们发现电流和电场之间的关系满足广义欧姆定律

$$j_i=\sigma_{ij}E_j,\quad or,\quad \vec{j}=\vec{\sigma}\cdot\vec{E} \tag{8.5.5}$$

但此时电导率为一个各向异性的矩阵，定义为

$$\vec{\sigma}(\omega)=\frac{\omega_p^2\varepsilon_0}{\left(\omega^2-\omega_B^2\right)}\begin{bmatrix} i\omega & \omega_B & 0 \\ -\omega_B & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\left(\omega^2-\omega_B^2\right)}{i\omega} \end{bmatrix} \tag{8.5.6}$$

有了电导率矩阵，我们可以进一步求出介质的有效介电常数。此时，Maxwell 第四条方程（时域谐变下）为 $\nabla\times\vec{H}=(\vec{\sigma}(\omega)-i\omega\varepsilon_0)\vec{E}$， 将交变条件下"传导电流"看成金属的束缚电流，则对此有效电介质来讲，方程应为 $\nabla\times\vec{H}=-i\omega\vec{\varepsilon}\cdot\vec{E}$。两式对比可得

$$\vec{\varepsilon}_r(\omega)=I+i\frac{1}{\varepsilon_0\omega}\vec{\sigma}=\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \tag{8.5.7}$$

是一个各向异性的"等效介电常数"张量，其中

$$\varepsilon_1=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_B^2},\quad \varepsilon_2=\frac{\omega_p^2\omega_B}{\left(\omega^2-\omega_B^2\right)\omega},\quad \varepsilon_3=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{8.5.8}$$

注意：当 $B_0=0$ 时， $\varepsilon_2=0,\varepsilon_1=\varepsilon_3=1-\omega_p^2/\omega^2$， 体系回到各向同性的等离子体。*所以磁场对等离子体的影响是使得体系的本构关系变成各向异性，而且非对角元素为纯虚数*。具有类似（8.5.7）式的介电常数的体系通常叫做旋电材料，其中的电磁波的行为非常奇异。与此相对应，若磁导率矩阵 $\vec{\mu}_r(\omega)$ 具有（8.5.7）式，则体系称为"旋磁材料"。

习题

P．205， 8.3 （这里的金属指在 GHz 以下的良导体）

补充题：

1） 针对课件中讨论的导电介质的 3 种情形，分别写出当一支初始振幅为 $E_0\vec{e}_x$ 的平面电磁波在 3 种介质中沿 z 方向传播时，能流密度的时间平均值（$\left\langle\vec{S}(z,t)\right\rangle$），以及在 z 点附近单位体积内单位时间产生的焦耳热的时间平均值 $\left\langle\frac{d}{dt}Q(z,t)\right\rangle$。

2） 利用连续性方程 $\nabla\cdot\vec{j}_f+\partial\rho_f/\partial t=0$，证明时谐条件下电磁场满足（8.4.2）。

****

思考题（供有余力同学选作）

****

3） 利用迟逾时间近似考虑杂质散射的影响，重新推导有磁场存在时等离子体的本构关系（$\ddot{\sigma}(\omega),\ddot{\varepsilon}_r(\omega)$），讨论当$\omega>\omega_p$时体系中的电磁波色散关系，以及直流（$\omega\to 0$）条件下的$\ddot{\sigma}$的形式及其所对应的物理。

4）查阅资料（Landau《连续介质电动力学》270 页以及《统计物理 II》第 4 章），搞清楚一个铁磁介质的有效磁导率的形式。