第 二 十 六 讲

上次课：

- 绝对时空观的困难（麦-莫实验）
- 相对时空观，**Lorentz** 变换, 四维空间， $x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu$
- 标量、矢量、张量…

4．速度及四维速度矢量

假定在 S 系中考察一个物体的运动，其速度的定义是$\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$。现在假定$S'$系相对$S$系以速度$v$沿着$x$轴运动，则在$S'$系中同一粒子的速度定义为$\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt'}$。因为在相对论时空观中，时间和空间是一起变换的，由 Lorentz 公式得

$$\begin{aligned} dx' &= \left(dx - v dt\right)\gamma_v \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)\gamma_v \end{aligned} \qquad (11.2.11)$$

用上面第四个方程除前三个，则得

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{\left(dx - v dt\right)\gamma_v}{\left(dt - \dfrac{v}{c^2}dx\right)\gamma_v} = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} \\ u'_y = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} \\ u'_z = \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}} \end{cases} \qquad (11.2.12)$$

上式决定了两个参考系中速度的变换，这就是相对论中的速度合成法则。在极限$c \to \infty$的情况下，上式便成为经典力学中速度的矢量合成法则，即

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v, \\ u'_y = u_y, \\ u'_z = u_z, \end{cases} \qquad (11.2.13)$$

根据相对论的速度合成公式(11.2.12)很容易证实，即使u_x和v部接近光速，其合成的速度也不会大于光速，也就是说，在相对论中不可能用运动学的办法得到大于光速的速度。注意到速度的变换公式很复杂，不满足四维矢量的变换公式，这是因为三维空间速度的定义不是相对论谐变的。让我们重新考察速度的定义：$\vec{u}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ - 分子是位置矢量，很容易推广到四维协变形式$x_\mu=\{\vec{r},ict\}$，问题出在分母上：dt不是一个标量，其在不同惯性系中测量值不同！我们知道四维间隔

$$ds^2=-dx_\mu dx_\mu=\left(cdt\right)^2-d\vec{r}\cdot d\vec{r}=\left(cdt\right)^2\left(1-\vec{u}\cdot\vec{u}/c^2\right) \tag{11.2.14}$$

是一个标量，其在不同惯性系中的测量值不变，因此可以定义一个具有时间量纲的标量

$$d\tau=ds/c=dt\sqrt{1-\beta_u^2} \tag{11.2.15}$$

用来替代 dt. 考察$d\tau$的物理意义 – 当我们选取与粒子一起运动的坐标系时有$\beta_u^2=0$，因此得到$d\tau=dt$。故其物理意义既是在粒子静止的坐标系中测量的两个时间的时间间隔，因此我们也把$d\tau$称作“固有时”- Proper Time。因此对任何两个事件的时间间隔，在粒子运动的坐标系中测到的值

$$dt=\frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta_u^2}}=\gamma_u d\tau \tag{11.2.16}$$

比在跟随粒子运动的坐标系中测得的“固有时”增大了$\gamma_u=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}}$倍 – 这就是所谓“时间膨胀”效应。既然“固有时”是个与坐标变换无关的标量，这就启发我们定义这样一个四维矢量：

$$u_\mu=\frac{dx_\mu}{d\tau}=\gamma_u\{\vec{u},ic\} \tag{11.2.17}$$

它显然是在 Lorentz 变换下协变的，而且其三维空间部分与三维速度矢量相关。这就是四维速度。

5．四维波矢量

下面我们证明波矢$\vec{k}$与频率一起构成四维协变矢量 – 亦即，$k_\mu=\{\vec{k},i\omega/c\}$在坐标变换下满足与坐标一样的变换关系。为了证明这件事情，考虑在 S 系下的沿 x 方向传播的一列平面波$e^{i(kx-\omega t)}=e^{i\phi}$。在 S 系的坐标原点 t=0 时刻时开始计数，在

第 N 个波峰通过时停止计数，则 S 系中存在两个事件：

事件 1，$\{0,0,0,0\}$，开始计数 $(\phi_1 = 0)$

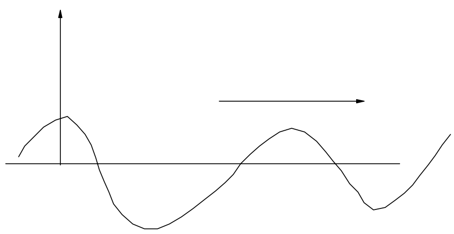
事件 2，$\{0,0,0,t\}$，计数 N 个波峰 $(\phi_2 = 2\pi N)$

在 S'系中同样看着两件事件，则电磁波经过 Lorentz 变换后变成 $e^{i(k'x'-\omega't')} = e^{i\phi'}$，事件本身（通过观察点几个波峰）显然不随坐标系的改变而变换

事件 1，$\{0,0,0,0\}$，开始计数 $(\phi_1^{'} = 0)$

事件 2，$\{x',0,0,t'\}$，计数 N 个波峰 $(\phi_2^{'} = 2\pi N)$

因此 $\phi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = k_\mu x_\mu$ 是个四维标量，不随坐标变换而改变。因此 k_μ 一定是个四维矢量。这个问题其实有另一个更简单的看法 – 注意到 $\partial_\mu = \{\nabla, -i\partial_t / c\}$ 是个四维矢量，则其所对应的作用在平面波上得到的值，$k_\mu = \{\vec{k}, i\omega / c\}$，一定也是个四维矢量。



§11.3　麦克斯韦方程的协变形式

根据爱因斯坦的相对性原理，作为描述电磁体系的物理规律的麦克斯韦方程组应该写成协变的形式。下面我们就将我们所关心的方程一一写成在 Lorentz 变换下协变的形式

1．电荷守恒定律 - 四维电流矢量

电荷密度和电流密度之间满足连续性方程，

$$\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad (11.3.1)$$

此方程是在某一个坐标系（记为 S 系）下写出的，在 S'系中 $\vec{j},\rho$ 都应相应变化成

$\vec{j}',\rho'$。根据相对性原理，（11.3.1）的方程形式应当洛伦兹变换下不变。若引入一个四维电流矢量

$$J_\mu = (\vec{j}, ic\rho) \tag{11.3.2}$$

则（11.3.1）式可以写成

$$\partial_\mu J_\mu = 0 \tag{11.3.3}$$

为书写方便，式中 $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ 记为 ∂_μ，由于 ∂_μ 是矢量，若 J_μ 的确是一个四维矢量，则 $\partial_\mu J_\mu$ 为洛伦兹标量故（11.3.3）为相对论协变。***实验告诉我们，电荷是守恒的，电荷在洛伦兹变换下不变，亦即-在任意一个惯性系下测得的电荷量均相同。下面我们将根据这一实验事实证明*** $(\vec{j}, ic\rho)$ ***确实构成四维矢量。***

设在 S 系中有一体积元 $d\Omega$，其中电荷以速度 $\vec{u}$ 运动，体积元 $d\Omega$ 中的总电荷为 $\rho d\Omega$，ρ 是 S 系中测量的电荷密度。在与电荷相对静止的参考系 S_0 中，电荷速度为零，电荷密度为 ρ_0，相应的体积元为 $d\Omega_0$，根据电荷的洛伦兹不变性，我们有

$$\Delta Q = \rho d\Omega = \rho_0 d\Omega_0 \tag{11.3.4}$$

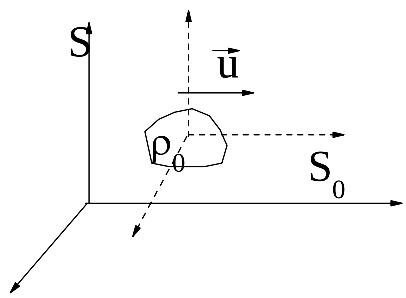
由于 S_0 相对于 S 系以速度 $\vec{u}$ 运动，则两个坐标系的时空微元的变换关系为

$$dx_0 = (dx - udt)\gamma_u,\ dy_0 = dy,\ dz_0 = dz,\ dt_0 = \left(dt - u^2 dx / c^2\right)\gamma_u \tag{11.3.5}$$

因为在 S 系中测量运动物体的体积必须同时进行，故 $dt = 0$。所以两参考系之间的体积元的关系为

$$d\Omega_0 = dx_0 dy_0 dz_0 = \gamma_u dx dy dz = \gamma_u d\Omega$$

（11.3.6）



这就是所谓的“运动物体长度收缩”的概念。把（11.44）式代入（11.43）式，则得

$$\rho = \rho_0 \gamma_u \tag{11.3.7}$$

将上式代入电流密度的表达式发现

$$\vec{j} = \rho \vec{u} = \rho_0 \gamma_u \vec{u} \tag{11.3.8}$$

的确 $(\vec{j}, ic\rho) = \rho_0(\gamma_u \vec{u}, ic\gamma_u) = \rho_0 u_\mu$ 正好构成一个正比于四维速度的四维矢量。

2．电磁势方程的协变形式

电磁场可以用矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 来描写，在洛伦兹规范条件下，电磁势方程为

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\vec{A}\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mu_0 \vec{j}\\ -\rho/\varepsilon_0\end{pmatrix} \tag{11.3.9}$$

式中 $\vec{A}$ 和 φ 应满足洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{11.3.10}$$

若我们定义一个四维张量

$$A_\mu = (\vec{A}, i\frac{\varphi}{c}) \tag{11.3.11}$$

则（11.3.9）式的电磁势方程可以写为

$$\Box A_\mu = -\mu_0 J_\mu \tag{11.3.12}$$

洛伦兹条件可以写为

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \tag{11.3.13}$$

(11.3.12)式很清楚地表示出若我们要求 Maxwell 方程在 Lorentz 变换下协变，则 A_μ 一定是一四维矢量，因为等式右方的 J_μ 为一四维矢量，等式的左方亦应为一四维矢量，由于口为一标量，故 A_μ 为—矢量，称为四维势。

3．电磁场张量

现在我们来讨论用场强表示的麦克斯韦方程的协变形式，电磁场强度$\vec{E}$和$\vec{B}$可以用电磁势$\vec{A}$和φ表示，即

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

电磁场强$\vec{E}$和$\vec{B}$不是四维矢量，但是，利用四维矢势A_μ，我们可以把它们表示为一个反对称的二阶张量，即

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{11.3.14}$$

由上式右端不难判断$F_{\mu\nu}$是四维二阶反对称张量(即$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$)，称$F_{\mu\nu}$为电磁场张量，其具体形式为

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3/c \\ iE_1/c & iE_2/c & iE_3/c & 0 \end{bmatrix} \tag{11.3.15}$$

利用$F_{\mu\nu}$和J_μ，我们可以把麦克斯韦方程组中的两个非齐次方程

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$$
$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

合并写成

$$\partial_\mu F_{\nu\mu} = \mu_0 J_\nu \tag{11.3.16}$$

同样可把两个齐次方程

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

合并写成

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0 \tag{11.3.17}$$

(11.3.16）式和（11.3.17）式即是协变形式的麦克斯韦方程组。

§ 11.4　电磁场的变换公式

因为$F_{\mu\nu}$是二阶张量，故不同参考系中的$F_{\mu\nu}$间的变换关系为

$$F'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\beta}\alpha_{\nu\gamma}F_{\beta\gamma} \qquad (11.4.1)$$

把(11.4.2)式具体写成分量的形式，则为

$$\begin{cases} E_1' = E_1, \\ E_2' = \gamma(E_2 - \upsilon B_3), \\ E_3' = \gamma(E_3 + \upsilon B_2), \\ B_1' = B_1, \\ B_2' = \gamma(B_2 + \dfrac{\upsilon}{c^2}E_3), \\ B_3' = \gamma(B_3 - \dfrac{\upsilon}{c^2}E_2), \end{cases} \qquad (11.4.2)$$

假若我们把矢量场按平行和垂直于相对运动速度的方向分解，则（11.4.3）式可表示为

$$\begin{cases} \vec{E}_{\parallel}' = \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}_{\perp}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B})_{\perp} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \vec{B}_{\perp}' = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}_{\perp}' = \gamma(\vec{B} - \dfrac{\vec{\upsilon}}{c^2}\times\vec{E})_{\perp} \end{cases} \qquad (11.4.4)$$

[例 3]　试求匀速运动的点电荷的场。

解　设S'系的原点固定在点电荷q上，则该点电荷相对于S'是静止的, 其场为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}'}{r'^3}, \quad \vec{B}' = 0$$

再设S系为实验室参考系，S'系随着点电荷q相对于S系沿x轴以速度υ运动，则由式(11.67)得S系中的场强

$$E_x = E_x', \quad E_y = \gamma(E_y' + \upsilon B_z'), \quad E_z = \gamma(E_z' - \upsilon B_y'),$$
$$B_x = B_x', \quad B_y = \gamma(B_y' - \frac{\upsilon}{c^2}E_z'), \quad B_z = \gamma(B_z' + \frac{\upsilon}{c^2}E_y'),$$

由于$\vec{B}' = 0$，故

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx'}{r'^3}, \quad E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{qy'}{r'^3}, \quad E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{qz'}{r'^3},$$
$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{\upsilon qz'}{c^2 r'^3}, \quad B_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{\upsilon qy'}{c^2 r'^3}.$$

现在必须把$\vec{r}'$用S系中的坐标来表示，为此，设$t=0$时点电荷q正好与S系的原点重合，并且我们在这一时刻测量空间的场，于是，根据格伦兹变换（11.21）

式，我们有

$$x'=\gamma x,\quad y'=y,\quad z'=z$$

所以，从 S' 系的原点到观察点的距离 $\vec{r}'$ 可表示成

$$r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\gamma[x^2+(\frac{y}{\gamma})^2+(\frac{z}{\gamma})^2]^{1/2}$$

这样，S 系中的电场强度为

$$\begin{aligned}\vec{E}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{\gamma^2[x^2+(\frac{y}{\gamma})^2+(\frac{z}{\gamma})^2]^{3/2}}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(1-\frac{\upsilon^2}{c^2})\vec{r}}{[(1-\frac{\upsilon^2}{c^2})r^2+\frac{\upsilon^2}{c^2}x^2]^{3/2}}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(1-\frac{\upsilon^2}{c^2})\vec{r}}{[(1-\frac{\upsilon^2}{c^2})r^2+(\frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{r}}{c})^2]^{3/2}}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(1-\beta^2)\vec{r}}{r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\end{aligned}$$

式中 θ 是 $\vec{r}$ 与 $\vec{\upsilon}$ 的夹角。不难算出磁感应强度

$$\vec{B}=\frac{\vec{\upsilon}}{c^2}\times\vec{E}$$

我们看到，匀速运动的点电荷的场的特点是：

(1) 场分布不再是球对称的，而是与 θ 有关。$\theta=0$ 处场最弱，$\theta=\frac{\pi}{2}$ 处场最强，场向着垂直于速度方向的平面集中，如图 11.10 所示，集中的程度与点电荷运动速度有关，当 $\upsilon\to c$ 时，场基本上集中分布在垂直于 $\vec{\upsilon}$ 的平面内。图 11.11 画出了三种不同 β 值的分布情况。

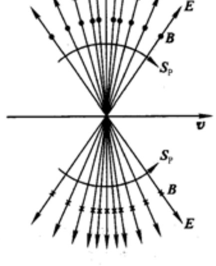


图 11.10

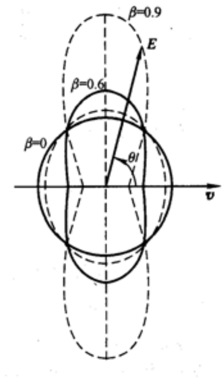


图 11.11

（2）能流分布为

$$\vec{S}_P = \vec{E} \times \vec{H} = \varepsilon_0 [\vec{v}E^2 - \vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{v})]$$

可见

$$\vec{S}_p \cdot \frac{\vec{r}}{r} = 0$$

这说明没有能流沿着径向方向辐射出去。从图 11.10 我们也可直接看出，能流是在以电荷为中心的球面上流动。

(3) 虽然能量并不沿着$\vec{r}$方向辐射出去，但在实验室系看，能流仍在做定向流，只伴随着电荷一起运动，这可以从下述极端情况看出：设$v \to c$，则$\vec{E}$基本上垂直于$\vec{v}$，于是

$$\vec{S}_P = \varepsilon_0 E^2 \vec{v} = \omega \vec{v}$$

式中ω是电磁能量，这就是说，电磁能量以速度$\vec{v}$随着点电荷一起运动。