第六讲

上次课

- $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[W_m+\int u\,d\tau\right]=-\oint \vec{S}_p\cdot d\vec{S}$ - 能量守恒及转化
- $\vec{S}_P(\vec{r},t)=\dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ - 能流密度；$u(\vec{r},t)=\dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\dfrac{1}{\mu_0}B^2\right)$ - 电磁场局域能量密度；
- $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\vec{G}_m+\int \vec{g}\,d\tau\right]=-\oint d\vec{S}\cdot\vec{T}$ - 动量守恒及转化
- $\vec{g}=\dfrac{1}{c^2}\vec{S}_P$ - 电磁场局域动量密度，注意与能流、磁场的关系；

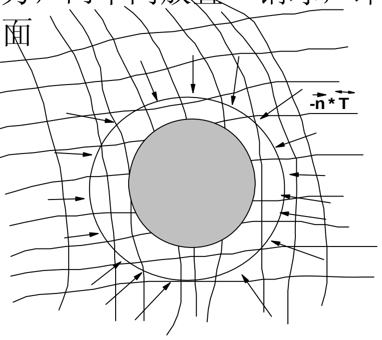
$\overleftrightarrow{T}=\dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\dfrac{1}{\mu_0}B^2\right)\overleftrightarrow{I}-\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}-\dfrac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}$ - 动量流密度

利用（2.2.8）式可以方便地讨论电磁场对物质的作用力。考虑一个放置于电磁场中的物体，取闭合曲面恰好包围此物体，则电磁场对体积内的电荷的作用力可由下式计算：

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\partial\vec{G}_m}{\partial t}=-\oint_S d\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{T}-\int_V\frac{\partial}{\partial t}\vec{g}\,d\tau}\qquad(2.2.10)$$

讨论

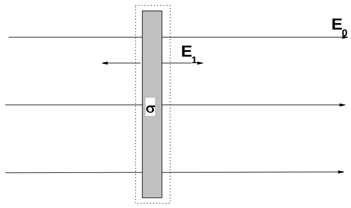
(1) 等式右边第一项$-\oint_S d\vec{S}\cdot\overleftrightarrow{T}$是电磁场通过界面从外面传递到曲面内部的总动量（单位时间内），根据力的定义，这就是外面的电磁场通过界面对闭合区域内的物质施加的总力。如弹性力学中的张力一样，$-\vec{e}_n\cdot\overleftrightarrow{T}$代表面外的场作用在面内的场的单位面积上的应力，故又称$\overleftrightarrow{T}$为**麦克斯韦应力张量**。可以形象地把电磁场想象成一个网，网格之间有张力，网中间放置一钢球，即我们考虑的物质。对网施加扰动，则动量通过界面“流入”闭合区域，一部分变成了区域内部的网的动量，另一部分传递给钢球，给钢球施加了作用力。也可将电磁场想象成水，取任意一个界面，则左边的水物质一直对右边的水施加压力。



(2) 然而这些“总力”不见得都作用到区域内的物质上，还作用到区域内的电磁场上，引发区域内的电磁场的动量的增加。等式第二项就是减去这部分的贡献的。

(3) 在稳态或是场随时间谐变的情况下，第 2 项为 0，或是其时间平均值为 0。此时物质在电磁场中的受力完全由 Maxwell 张量的面积分决定。小心设计一些特定的电磁场结构，比如一束高斯光，处于光场之中的介质小球就会受到力的作用，在光场中移动到达平衡位置。因此我们可以通过改变光束的位置来有效地移动小球，这就是“光镊 “（Optical Tweezers）的基本原理，目前在生物、医学中应用广泛。甚至可以

[例 2] 求放置于均匀电场 $\vec{E}$ 中的一个无限大均匀带电板（面电荷密度为 σ ）的受力。



解：如右图所示，空间的总场为

$$\vec{E}_{right} = \vec{E}_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{e}_x, \quad \vec{E}_{left} = \vec{E}_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{e}_x$$

则 Maxwell 张量为

$$\vec{T} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\left(\hat{x}\hat{x}+\hat{y}\hat{y}+\hat{z}\hat{z}\right) - \varepsilon_0 E^2\hat{x}\hat{x} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\hat{x}\hat{x} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\left(\hat{y}\hat{y}+\hat{z}\hat{z}\right)$$

包围平板做一闭合曲面，如图中虚线所示，计算电磁场对物质的力：

$$\vec{F} = -\oint \vec{n}\cdot\vec{T}dS = -A\hat{x}\cdot\left[\vec{T}_{right} - \vec{T}_{left}\right] = A\hat{x}\frac{1}{2}\varepsilon_0\left[E_{right}^2 - E_{left}^2\right]$$

$$= A\hat{x}\frac{1}{2}\varepsilon_0 4\cdot E_0\cdot\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \hat{x}E_0\cdot Q$$

正是我们预期的结果。

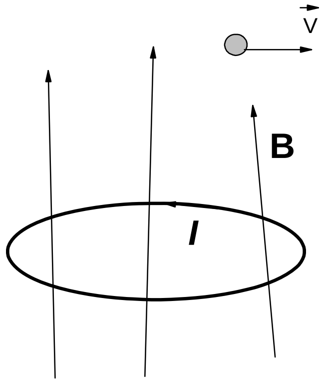
注：这个例子当然有些“杀鸡用牛刀”的感觉，你可以 Argue 说我不用 Maxwell 张量也可以直接写出结果来。然而当电磁场及介质形状均为一般情况时，你就必须使用“牛”刀杀“鸡”了。

[例 3] 质量为 m，带电为 q 的粒子在稳定磁场中运动，试求带电粒子在磁场中的总动量。

解：电荷在磁场中运动时，不仅自己带有机械动量，而且因为其本身带电产生电场，与磁场相互作用后空间总的电磁场会带有动量。这些动量是空间电磁场的，但与电荷存在于磁场中这个事实相关，因此通常算到电荷的总动量里。电磁场的动量为：

$$\vec{G}_{e,m} = \int_V \varepsilon_0\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)d\tau' = \int_V \varepsilon_0\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)d\tau' \qquad (2.2.11)$$

当运动电荷的速度远远小于光速时，可以近似认为运动的电荷只产生电场，其产生的磁场可以忽略，因此有



$$\nabla\times\vec{E} = 0, \quad \nabla\cdot\vec{E} = \varepsilon_0 q\delta(\vec{r}-\vec{v}dt),$$

而空间的磁场完全由外磁场贡献，因此有

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0$$

利用矢量运算公式：

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{E})=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{E}+(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{E}\times(\nabla\times\vec{A})+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{E})$$

以及$\nabla\times\vec{E}=0$的事实 可以推出

$$\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{E}\right)-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{E}-\left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{A} \qquad (2.2.12)$$

利用矢量运算恒等式$\nabla\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{a}\right)\vec{b}+\left(\vec{a}\cdot\nabla\right)\vec{b}$将（2.2.12）式配分成全微分，

$$\begin{aligned}\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)&=\nabla\cdot\left((\vec{A}\cdot\vec{E})\vec{I}\right)-\nabla\cdot\left(\vec{A}\vec{E}+\vec{E}\vec{A}\right)+\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\vec{E}+\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{A}\\&=\nabla\cdot\left[(\vec{A}\cdot\vec{E})\vec{I}-\vec{A}\vec{E}-\vec{E}\vec{A}\right]+\left(q/\varepsilon_0\right)\delta(\vec{r}-\vec{v}t)\vec{A}\end{aligned}$$

把它代人上式后，注意到散度积分可以转化成在表面的面积分=0，我们得到

$$\vec{G}_{e,m}=\int q\vec{A}\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)d\tau'=q\vec{A}(\vec{r}) \qquad (2.2.13)$$

由此我们可以得到带电的运动粒子在外磁场中的总动量为

$$\boxed{\vec{p}=m\vec{v}+q\vec{A}} \qquad (2.2.14)$$

式中$\vec{v}$是带电粒子运动的速度，而$\vec{A}$为电荷运动所处的位置处的矢势，$\vec{p}$是对应于$\vec{v}$的正则动量表达式。(2.2.14)式是量子力学中极为重要的关系式。几点讨论：

1）这个附加的动量是电荷与磁场的“相互作用”引起的。没有磁场或是没有电荷都没有这一项贡献；单独只有电荷或是磁场单独存在时也没有这一动量;

2）这个结果是在低速情况下得到的;

3）如何理解这个相互作用引起的“附加动量”？可以考虑建立这个状态的过程，一开始电荷处于无穷远处，没有电磁场动量；当电荷靠近时，必然对线圈产生力的作用，要维持线圈状态不变，必须有外力平衡，则在此过程中一直有外力对体系（线圈+电荷）输入动量（冲量），这部分动量被储存在体系中作为电荷的附加动量。

§2.5 介质中的电磁能量和动量守恒定律

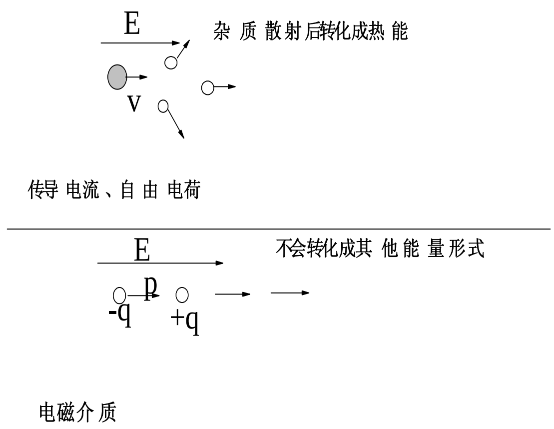
1．电磁能量

在真空中，场只对传导电流作功，而现在介质中因为电磁场的作用而被极化或者磁化，产生了极化电流和磁化电流。在这种情况下，让我们忘记电磁介质的存在，而只关注因极化和磁化而产生的附加电荷/电流。***前面我们已经指出，电磁场“分不清”什么是自由电荷/电流，只要是电荷/电流，电磁场就会对其施加力的作用。因此，此时，电磁场对极化电流和磁化电流同时作功。***故，场对$d\tau$体积内的电荷/电流在单位时间内所作的总功为

$$\frac{dR}{dt}=\int(\vec{j}+\vec{j}_p+\vec{j}_m)\cdot\vec{E}d\tau \qquad (2.5.1)$$

在计算之前，我们仔细分析一下这几项的物理意义。

（1） $\vec{j}\cdot\vec{E}$ 对应的是电磁场对自由电荷做的功，这部分功转化成电荷运动的机械动能（电流），通常（超导除外）这些机械动能与外部环境发生交换（通过杂质的散射），变成了环境的热能。这就是为什么在稳恒电流的条件下，电场不断对电荷做功，但电荷运动的机械能却不发生改变（表现在电流稳恒不变）的原因 - 那些功被环境以热能的形式带走。*因此这部分功是可以转化成其他的能量形式，而且通常这种转化是不可逆的。*



（2）$(\vec{j}_p+\vec{j}_m)\cdot\vec{E}$ 对应的是电磁场对电磁介质中的束缚电荷（流）所做的功，这部分功转化成介质中电荷拉开后的势能，以及这些电荷跟随电场运动时的机械动能。*但这部分能量被束缚在电磁介质中，不会被环境以热能的形式拿走。*而当电磁场离开介质时，这些能量又会以电磁辐射的形式重新返还给电磁场。本质上讲，这部分能量虽然不是电磁场的能量，但它们却是电磁场将介质极磁化后储存到电磁介质中的能量，*它们依附于电磁场而存在*。

搞清楚这两类功的不同，我们可以将第 2 项功对应的能量 – 极（磁）化能 – 归于电磁场在介质的能量中，而只考虑电磁场对第一项的贡献。换句话说，我们把电磁场和电磁介质看成一体，而把传导电流分出来单独考虑。具体来说，我们计算场对 $d\tau$ 体积内的自由电荷/电流在单位时间内所作的总功：

$$\frac{dR_f}{dt}=\int\vec{j}_f\cdot\vec{E}d\tau \qquad (2.5.2)$$

利用 $\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 将自由电流消去，可得

$$\vec{j}_f\cdot\vec{E}=(\nabla\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot\vec{E} \qquad (2.5.3)$$

将空间部分配分成全微分的形式，得

$$\begin{aligned}\left(\nabla\times\vec{H}\right)\cdot\vec{E}&=\nabla\cdot\left(\vec{H}\times\vec{E}\right)+\vec{H}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)\\&=\nabla\cdot\left(\vec{H}\times\vec{E}\right)-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{aligned}\qquad(2.5.4)$$

这里我们用到了 Faraday 定律$\nabla\times\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t$。对线性无色散介质，有本构关系：

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\ \ \vec{B}=\mu\vec{H}\qquad(2.5.5)$$

则（2.5.3）式可以改写成

$$\vec{j}_f\cdot\vec{E}=-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)-\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}-\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{S}_p-\frac{\partial u}{\partial t}\qquad(2.5.6)$$

其中能流密度及能量密度分别定义为

$$\vec{S}_P=(\vec{E}\times\vec{H}),\quad u=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H})\qquad(2.5.7)$$

根据（2.5.6）式，我们写出介质中的能量转化方程：

$$\boxed{\frac{\partial W^{'}}{\partial t}=\int_V\vec{j}_f\cdot\vec{E}d\tau=-\oint\vec{S}_p\cdot d\vec{S}-\frac{\partial}{\partial t}\int_V ud\tau}\qquad(2.5.8)$$

其中$W^{'}$为体积内的其他的能量形式（***传导电荷的机械能，或者进一步与环境交换出去的热能***），$\int_V ud\tau$为体积内的电磁场能量以及电磁介质中储存的能量，而$\vec{S}_p$为电磁场以及附属于电磁场的极磁化场单位时间内流过单位面积的能量。显然真空中的能量密度和能流密度可以认为是(2.5.7)式的特例。

思考：

1）能流密度$\vec{S}_P$与真空中的不同，这是因为其中包含了介质极磁化后的电荷/流随电磁场的运动而贡献的能量流动，然而仔细计算后发现额外的贡献为$\vec{S}_p-\vec{S}_0=\vec{E}\times\vec{H}-\vec{E}\times\vec{B}/\mu_0=-\vec{E}\times\vec{M}$。这样处理对不对？为什么只有磁化的贡献？

2）你也许有兴趣分清楚介质中的极磁化的能量到底为多少。不假思索的计算将给出：

$$u-u_0=\frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H}\right)-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{B}/\mu_0\right)=\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}-\frac{1}{2}\vec{M}\cdot\vec{B}$$

这个结果是否合理？电磁部分不对称的原因？1/2 的来源？（正确的处理请参照 Jackson P165-169，Landau P48 ）

2．电磁动量

介质里的总电荷分布为$\rho_f+\rho_p$，总电流分布为$\vec{j}_f+\vec{j}_p+\vec{j}_m$，因此场对带电体及介质的作用力也就是对上述电荷和电流的作用，其力密度为

$$\vec{f}_t=(\rho_f+\rho_p)\vec{E}+(\vec{j}_f+\vec{j}_p+\vec{j}_m)\times\vec{B}$$

当电荷电流是总电荷、总电流时，Maxwell 方程与真空中的一样。因此，与上节中推导一样，我们得到

$$\vec{f}_t = -\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}^* - \frac{\partial\vec{g}^*}{\partial t} \tag{2.5.9}$$

其中

$$\overleftrightarrow{T}^* = \left[\frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}\right]$$
$$\vec{g}^* = \varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} \tag{2.5.10}$$

(2.5.9)式及其 $\overleftrightarrow{T}^*$ 和 $\vec{g}^*$ 的表达式虽然和真空中形式一样，但其中的 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 是总场，即不仅含有自由电荷、电流激发的场，还包括 $\rho_p, \vec{j}_p, \vec{j}_m$ 的全部贡献。

若把力密度 $\vec{f}$ 分成两部分：

其中

$$\begin{aligned} \vec{f}_t &= \vec{f} + \vec{f}', \\ \vec{f} &= \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}, \\ \vec{f}' &= \rho_p\vec{E} + (\vec{j}_p + \vec{j}_m)\times\vec{B} \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

显然 $\vec{f}$ 代表场对带自由电荷的带电体（导体）的作用力，$\vec{f}'$ 代表场对介质的作用力。于是对线性无色散介质，我们有

$$\rho_f\vec{E} + \vec{j}_f\times\vec{B} = \nabla\cdot\overleftrightarrow{T}' - \frac{\partial\vec{g}'}{\partial t} \tag{2.5.12}$$

其中

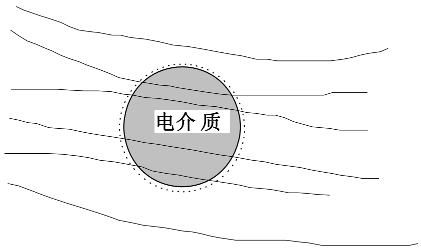
$$\overleftrightarrow{T}' = \left[\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})\overleftrightarrow{I} - \vec{D}\vec{E} - \vec{B}\vec{H}\right]$$
$$\vec{g}' = \vec{D}\times\vec{B} \tag{2.5.13}$$

这样的定义下，我们其实把电磁介质和电磁场看为一个整体，$\vec{g}' = \vec{D}\times\vec{B}$ 中不仅包含了电磁场本身的动量，而且包含了束缚于电磁介质体上的机械动量。后者尽管不是电磁场的动量，但因为它们并不能单独存在，只能束缚于电磁场存在，因此我们把它们也可以归为电磁动量里。

<u>分别讨论一下两种表达式的适用范围</u>

1) （2.5.9）式描述的是场对一块体积内的所有的电荷/电流的作用力，因此若计算某一个电介质物体在真空中的某一电磁场中，则此时，显然应用（2.5.9）式来计算介质物体受到的电磁场的力

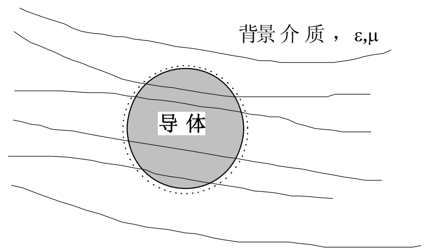
$$\vec{F} = -\oint d\vec{S} \cdot \overset{\rightarrow\rightarrow}{T}^{*} + \frac{d}{dt}\int \vec{g}^{*} d\tau. \qquad (2.5.14)$$



静态或是电磁场随时间简谐变化时，第二项对时间的平均值为 0，故，实际有效力为

$$\langle \vec{F} \rangle = -\oint d\vec{S} \cdot \left\langle \overset{\rightarrow\rightarrow}{T}^{*} \right\rangle \qquad (2.5.15)$$

2）（2.5.13）式适用于计算电磁场对处于介质环境中的金属导体物体的作用力。比如在血液中放置一个金属物体，外加电磁场来控制其运动。此时，应当利用



$$\langle \vec{F} \rangle = -\oint d\vec{S} \cdot \left\langle \overset{\rightarrow\rightarrow}{T}' \right\rangle \qquad (2.5.16)$$

计算其受力。若利用（2.5.15）计算其受力的话，则同时计算了处于导体/介质表面处的介质上的极、磁化电荷的受力，而后者并不能传递到导体物体的上面。

Tips：这些公式形式千变万化，但搞清楚你的问题后，其实并不难分辨应当应用哪一个。

习题

P．59， 2.2， 2.4，2.5

选作

（1） 推导（2.5.13）式。

（2） 小 Project：利用 COMSOL 软件计算一个半径为 R 的介质球处于一个非均匀电磁场中的受力。非均匀电磁场可以是一个点电荷产生的场，也可以是有限大的电容器产生的电场，甚至可以是一束高斯波束。

（3） 考虑两个思考题，翻阅文献，将你的理解总结成一个 Note。