第十二讲

上次课：

- 多极距展开 （源电荷局域在空间的一个小区域内，观察点距离很远）。

  根据泰勒展开， $\frac{1}{R}=\frac{1}{r}-\vec{r}'\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\vec{r}'\vec{r}':\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots$

空间电势为

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\cdots$$

$$\varphi_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0},\qquad \mathrm{Q}=\int\rho(\vec{r}\,')d\tau' \tag{4.5.4}$$

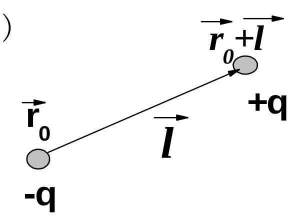
$$\varphi_1=-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla\frac{1}{r},\qquad \vec{p}=\int\rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'d\tau' \tag{4.5.5}$$

$$\varphi_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int\rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'\vec{r}\,'d\tau':\nabla\nabla\frac{1}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{6}\vec{\vec{D}}:\nabla\nabla\frac{1}{r},\qquad \vec{\vec{D}}=3\int\rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'\vec{r}\,'d\tau' \tag{4.5.6}$$

各项的物理意义如下：

第一项是一个点电荷的势，相当于V内电荷都集中在Q点时在P点所产生的势；第二项是偶极子的势，体系相应的偶极矩为 $\vec{p}=\int\rho\vec{r}'d\tau'$。当体系由一正一负两个点电荷组成时，位置分别处于$\vec{r}_0$及$\vec{r}_0+\vec{l}$处，我们经过简单计算可得

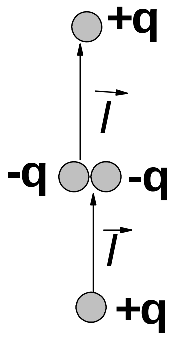
$$Q=0,\quad \vec{p}=q\vec{l} \tag{4.5.7}$$



此即我们熟悉的电偶极距。（4.5.5）是电偶极矩在一般情况下的定义，相当于（4.5.7）式的推广。

第三项称为体系的四极矩的势，$\boxed{\vec{\vec{D}}=3\int\rho\vec{r}'\vec{r}'d\tau'}$ 为体系的四极矩。四极矩可以看作是由大小相等方向相反的偶极子组成的系统，最简单的情况如下图所示。此时，容易证明，$\vec{\vec{D}}$中唯一不为 0 的分量是

$$D_{zz}=6l^2q$$



一般的电荷分布情况下，电四极矩的定义是（4.5.6）式。$\vec{\vec{D}}$是一个并矢，或者说是个 3 x 3 矩阵，共有九个分量，

由于它是对称的，所以只有六个独立分量。$\overset{\leftrightarrow}{D}$中还有一个

隐含的不独立分量，注意到在$\vec{r}\neq 0$处有$\nabla^2\frac{1}{r}=0$，亦即：

$$\nabla^2\frac{1}{r}=\sum_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ij}=\overset{\leftrightarrow}{I}:\nabla\nabla\frac{1}{r}=0 \qquad (4.5.8)$$

上式显示对任意一个常数 C，均有

$$C\overset{\leftrightarrow}{I}:\nabla\nabla\frac{1}{r}\equiv 0 \qquad (4.5.9)$$

若选择此常数正比于$\overset{\leftrightarrow}{D}$矩阵的迹，

$$C=\mathrm{Tr}\{\overset{\leftrightarrow}{D}\}/3=\left(D_{xx}+D_{yy}+D_{zz}\right)/3 \qquad (4.5.10)$$

根据（4.5.6）和(4.5.9)式，我们发现φ_2可改写为

$$\begin{aligned}\varphi_2&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\left(\overset{\leftrightarrow}{D}-\frac{Tr\{\overset{\leftrightarrow}{D}\}}{3}\overset{\leftrightarrow}{I}\right):\nabla\nabla\frac{1}{r}d\tau'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{6}\tilde{\overset{\leftrightarrow}{D}}:\nabla\nabla\frac{1}{r}\end{aligned} \qquad (4.5.11)$$

其中

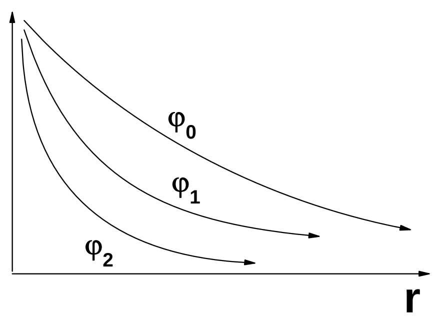
$$\boxed{\tilde{\overset{\leftrightarrow}{D}}=\int\left(3\rho\vec{r}'\vec{r}'-\rho\vec{r}'^2\overset{\leftrightarrow}{I}\right)d\tau'} \qquad (4.5.12)$$

$\tilde{\overset{\leftrightarrow}{D}}$称为约化四极矩，显然它是对称的无迹张量，即

$$\tilde{D}_{ij}=D_{ji},\ \tilde{D}_{11}+\tilde{D}_{22}+\tilde{D}_{33}=0 \qquad (4.5.13)$$

只有 5 个独立分量。

根据（4.5.4-6）可以看出，随着多极矩级数的增加，其对远处的势的贡献更快地减小 $\varphi_0>>\varphi_1>>\varphi_2$*。换言之，随着距离的推进，我们逐渐感知到电荷体的电荷、偶极子、四极子、…的贡献。*



************************* 以下为选读内容

直角坐标系中的多极距表达式比较容易被人理解，但科研中更常用的是球坐标系中的多极距展开。在球坐标下对$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')d\tau'}{R}$作 Tayler *展开，电势为*

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_l^m(\theta,\phi)}{r^{l+1}} \qquad (4.5.14)$$

q_{lm} 称为多极矩，它实质上是笛卡儿坐标系中的多极矩在球坐标系中的表示。非常容易理解 $l=0,1,2,...$ 分别对应于点电荷、偶极距、电四极距、... 的贡献，而他们分别具有 $2l+1$ 个独立分量。其实，我们可以这样来进一步理解多级矩。 在无源区 Laplace 的通解（假设 $r\to\infty$ 时收敛）为

$$\varphi(\vec{r})=\sum_{l,m}\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}Y_l^m(\theta,\phi)=\sum_{l}\frac{\tilde{B}_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) \qquad (4.5.15)$$

其中第二个表达式为轴对称条件下的形式。对比（4.5.14）和（4.5.14），我们理解多极距展开不过是把无源区势函数展开成本征函数的形式，而展开系数由外界条件（进一步由源区的电荷分布）唯一确定！

$$\varphi(\vec{r})=\sum_{l,m}\frac{B_{lm}}{r^{l+1}}Y_l^m(\theta,\phi)=\sum_{l}\frac{\tilde{B}_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

****

[例] 利用多极距展开法计算一个长度为 L 的带电棒（线电荷密度为 λ）的电势（展开到电四极距）

解：设棒的中心在坐标原点，则

$$Q=L\lambda$$
$$\vec{p}=\int\lambda z dz=0$$
$$D_{zz}=\int_{-L/2}^{L/2}3\lambda z^2dz=\frac{\lambda L^3}{4}$$

因此，电势为

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r}+\frac{1}{6}D_{zz}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]+...$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\lambda L}{r}+\frac{\lambda L^3}{24}\frac{(3z^2-r^2)}{r^5}\right]+...=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\lambda\left(\frac{L}{r}\right)+\frac{\lambda}{24}\left(\frac{L}{r}\right)^3(3\cos^2\theta-1)\right]+...$$

你也可以选择直接积分求出电势，然后按照 (L/r) 的幂次展开，结果应当一致。*这里我们可以清晰地看出多极矩展开其实是将电势作幂次展开，展开的特征小*

量是（尺度/距离）。

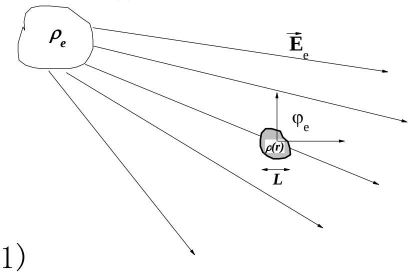
Tips:

（1） 从物理上讲，电偶极距考量的是体系是否破缺镜面反射对称性（x 与-x，y 与-y，z 与-z）；电四极距考量的是体系的更细节的东西：x, y, z 之间的对称性（更广义讲球对称）否被破坏 - 若破坏，则必有电四极距出现。

（2） 函数形式 $(3\cos^2\theta-1)$ *似曾相识，事实上它就是* $P_2=(3x^2-1)/2$ *，也可以认为就是 l=2, m=0 的波函数（这里有轴对称）。*

§ 4.6 多极矩同外场的相互作用

讨论一块电荷集中在小区域内体系的多极矩，不仅可以容易地得到其在远处产生的电场，还可以容易地计算出一个任意的带电体系与外场的相互作用，尽管这两类问题看上去很不相同。上一章中我们知道当一个点电荷在放置在远处的带电体（电荷密度 ρ_e）产生的电势 φ_e 中时，其与外场的相互作用能为 $q\varphi_e(\vec{r})$。现考虑处于 φ_e 中的连续带电体（电荷密度为 ρ），则带电体与外场的相互作用能为



$$U_i=\int\rho(\vec{r})\varphi_e(\vec{r})d\tau \qquad (4.6.1)$$

*应当注意我们得到这个结论的前提是体系与源相距甚远，以至于源的电荷密度不因体系的改变而变化。*因为 V 很小，所以可将 φ_e 在参考点附近（即原点）作泰勒级数展开：

$$\varphi_e(\vec{r})=\varphi_e(0)+\vec{r}\cdot\nabla\varphi_e\big|_{\vec{r}=0}+\frac{1}{2!}\vec{r}\vec{r}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_{\vec{r}=0}+\cdots \qquad (4.6.2)$$

代入(4.6.1)式得

$$U_i=U_i^{(0)}+U_i^{(1)}+U_i^{(2)}+\cdots$$

其中

$$U_i^{(0)}=Q\varphi_e(0) \qquad (4.6.3)$$

$$U_i^{(1)}=\vec{p}\cdot\nabla\varphi_e\big|_0=-\vec{p}\cdot\vec{E}_e\left(\vec{r}=0\right) \qquad (4.6.4)$$

$$U_i^{(2)} = \frac{1}{6}\vec{D}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 \tag{4.6.5}$$

因为$\left(\nabla^2\varphi_e\right)_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{e0}$，而作为外源的$\rho_{e0}$一般分布在离$V$很远处，故在$V$区域内$\rho_e = 0$，因此有$C\vec{\vec{I}}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 = C\nabla^2\varphi_e\big|_0 = 0$。再一次，若我们选择常数 C 满足$C = \mathrm{Tr}\{\vec{D}\}/3$，则有

$$U_i^{(2)} = \frac{1}{6}\vec{\vec{D}}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 = \frac{1}{6}\left[\vec{D} - \frac{1}{3}Tr\{\vec{D}\}\vec{I}\right]:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 = \frac{1}{6}\tilde{\vec{\vec{D}}}:\nabla\nabla\varphi_e\big|_0 = -\frac{1}{6}\tilde{\vec{\vec{D}}}:\nabla\vec{E} \tag{4.6.6}$$

$U_i^{(0)}, U_i^{(1)}$和$U_i^{(2)}$分别代表点电荷、电偶极矩和电四极矩与外电场的相互作用能。***我们发现，电荷感知到外场的积分效应，电偶极子感知到电场，而电四极子感受到电场的微分效应 --- 因此，多极矩随着级数的增加，愈加能感知到外场细微的变化，因为其本身就是结构的细微不对称给出的。***

下面，我们将根据电偶极矩与外场的相互作用能$U_i^{(1)} = -\vec{p}\cdot\vec{E}_e$，来求出电偶极矩在外场中所受的力和力矩。

（A）电偶极矩在外场中受的力

设电偶极子在外电场$\vec{E}_e$中受到外场的作用力$\vec{F}_e$，方向大小未知。假设施加外力$\vec{F}' = -\vec{F}_e$，则偶极子达到平衡，静止不动。现在在此基础上对偶极子沿给定方向附加非常小的外力$\delta\vec{F}'\to 0$，使得偶极子*无限缓慢地*平移$\delta\vec{r}$。将偶极子与外场看成一个体系，则在这个过程中，外力对体系做的功为

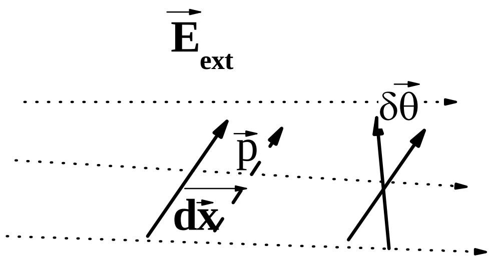
$$\delta W' = \left(\vec{F}' + \delta\vec{F}'\right)\cdot\delta\vec{r} = \vec{F}'\cdot\delta\vec{r} = -\vec{F}_e\cdot\delta\vec{r} \tag{4.6.7}$$

整个体系（电偶极子+外场）的能量增加为

$$\delta U = -\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r}+\delta\vec{r}) + \vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = -\delta\vec{r}\cdot\nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})\right) \tag{4.6.8}$$

根据能量守恒上面 2 式应相等，因此电场对偶极子的作用力为

$$\vec{F}_e = \nabla\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right) = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E} + \vec{p}\times(\nabla\times\vec{E})$$



利用静电场$\nabla\times\vec{E} = 0$，得

$$\boxed{\vec{F}_e = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E}} \quad (4.6.9)$$

因此一个电偶极子在均匀电场中不受力，只有电场非均匀时才收到外场力！

（B）电偶极矩在外场中受的力矩

完全类比于力的处理，设电场对偶极子的力矩为 $\vec{M}_e$，则施加外力矩 $\vec{M}' = -\vec{M}_e$ 将偶极矩准静态地转动一个 $\delta\vec{\theta}$，外力矩作的功为 $\vec{M}'\cdot\delta\vec{\theta} = -\vec{M}\cdot\delta\vec{\theta}$，体系（偶极子+外场）的能量增加为 $\delta\left(-\vec{p}\cdot\vec{E}\right)$，故根据能量守恒有

$$-\vec{M}_e\cdot\delta\theta = -\delta\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right) = -\delta\vec{p}\cdot\vec{E} \quad (4.6.10)$$

因为 $\vec{p}$ 的大小不变，仅改变方向，故

$$\delta\vec{p} = \delta\vec{\theta}\times\vec{p} \quad (4.6.11)$$

这样

$$\vec{M}_e\cdot\delta\vec{\theta} = \left(\delta\vec{\theta}\times\vec{p}\right)\cdot\vec{E} = \left(\vec{p}\times\vec{E}\right)\cdot\delta\vec{\theta} \quad (4.6.12)$$

即

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}} \quad (4.6.13)$$

因此，无论电场均匀与否，只要电偶极子的方向与此处的局域电场方向不一致，则其就会受到一个力矩的作用使其平行于电场！

****

第五章　静 磁 场

本章中我们将学习静磁场的处理。静磁场是由稳恒电流产生的不随时间变化的场。电流是由电场驱动电荷运动而产生的。因为电流在流动过程中一定有能量耗散（将动能交给杂质，以热能形式给环境），静电场本身产生的电流一定不能稳恒！必须有外加的非静电来源的场（电动势）一直给体系提供能量才能保持电流稳恒！因为课程的时间限制，这里我们将略去对稳恒电流的来源及其满足的规律的讨论，而只假设我们得到某种一定分布的稳恒电流 $\vec{j}$，讨论由其产生的静磁场的基本行为。

§5.1 磁场的矢势方程和边值关系

静磁场的基本方程是

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j} \end{cases} \qquad (5.1.1)$$

本构关系（假设为线性、各向同性介质）为 $\vec{B}=\mu\vec{H}$。在两个磁介质的交界面上相应的边值关系为

$$\begin{cases} \vec{e}_n\cdot(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0 \\ \vec{e}_n\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{\alpha} \end{cases} \qquad （5.1.2）$$

类似于静电情形，设法把磁场方程化到标准形式。利用 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，可得

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu\vec{j} \qquad （5.1.3）$$

静磁场满足 $\nabla\cdot\vec{A}=0$ [此结论可由 Biot-Sarvert 定律推出（见第 1 章）]，上式变成

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{j} \qquad （5.1.4）$$

(5.1.4)式即为我们熟知的泊松方程，只不过现在其表现成矢量得方程 – 亦即每一个 A 的分量场都满足泊松方程。所以矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 在静场时满足同一形式的方程。

习题：P. 115, 4.9, 4. 11, 4.14